

DIMENSION DE HAUSDORFF & ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES

Glen MÉVEL & Marc-Antoine LENTZ

Table des matières

1	Mesure et dimension de Hausdorff	2
2	Ensembles auto-similaires	5
2.1	Construction d'ensembles fractaux	5
2.2	Dimension d'ensembles auto-similaires	11
	Bibliographie	19

Le présent document s'applique à étudier certains des objets les plus emblématiques des mathématiques : les fractales. Ces ensembles brouillent les limites des dimensions entières intuitives et exigent la mise en place d'outils adaptés à leur description. Sont ainsi introduites les notions de mesure et dimension de Hausdorff, ainsi que celle d'ensembles auto-similaires. Les premières proposent l'élaboration d'une notion de dimension adaptée à la nature particulière des objets fractaux et permettent de les classer et de les ordonner selon cette dimension. Quant à la dernière, elle fourni un cadre à la construction et à la description de ces objets.

1 Mesure et dimension de Hausdorff

L'introduction de la mesure de Hausdorff permet de dépasser certaines limitations de la mesure de Lebesgue usuelle. Ainsi, la mesure de Lebesgue λ_n sur \mathbb{R}^n , définie à partir des pavés de dimension n , ne permet pas de mesurer des surfaces ou des longueurs de façon satisfaisante : les objets de moindre dimension seront invariablement Lebesgue-négligeables. La mesure de Hausdorff, plus granulaire, permet ainsi de donner un sens aux longueurs, aires et hypersurfaces en dimension supérieure et donc de différencier une plus grande variété d'objets. En outre, elle permet d'élargir la notion de dimension en autorisant notamment les dimensions non-entières, comme cela sera utile lors de l'étude des ensembles auto-similaires. La mesure de Hausdorff est donc une extension de la mesure de Lebesgue – plus exactement une collection de mesures – capable de s'adapter à la nature de l'objet étudié, permettant ainsi de lui attribuer une dimension dite de Hausdorff. Procéder ainsi crée un ordre dans la notion de négligeabilité.

Définition 1.1. Soient $n \in \mathbb{N}, \delta > 0, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un δ -recouvrement de E est une collection \mathcal{F} de parties F de \mathbb{R}^n de diamètre $\text{diam}(F) < \delta$ vérifiant $E \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$.

Définition 1.2. Soient $n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}^+, \delta > 0, E \subseteq \mathbb{R}^n$. La *mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de pas δ de E* sur \mathbb{R}^n est

$$H_\delta^s(E) = \inf_{\mathcal{F}} \sum_{F \in \mathcal{F}} \text{diam}(F)^\delta,$$

où la borne inférieure porte sur les δ -recouvrements dénombrables \mathcal{F} de E .

Définition 1.3. La *mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E* sur \mathbb{R}^n est

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E).$$

Proposition 1.1. *De façon équivalente, il est possible d'imposer des recouvrements ouverts (ou fermés) dans les définitions précédentes.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} un δ -recouvrement de E .

$$\forall F \in \mathcal{F}, \text{diam}(F) = \text{diam}(\text{adh}(F))$$

avec $\text{adh}(F)$ l'adhérence de F , qui est fermée. Donc considérer un recouvrement fermé ne change pas la mesure. De même, soient $\epsilon > 0$ et

$$\forall F \in \mathcal{F}, F_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, F) < \epsilon\}$$

le ϵ -voisinage de F , qui est ouvert.

$$\text{diam}(F_\epsilon) < \text{diam}(F) + 2\epsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \epsilon$, imposer un recouvrement ouvert ne change pas la mesure. \square

Proposition 1.2. H^s est une mesure extérieure sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. La mesure de Hausdorff vérifie bien $H^s(\emptyset) = 0$. Elle est de plus sous-additive : en effet, si $E = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} E_i$, tout recouvrement de E est inclus dans une union de sous-recouvrements des E_i , d'où

$$H^s(E) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} H^s(E_i).$$

Elle est donc bien une mesure extérieure. \square

Proposition 1.3. H^s est une mesure borélienne.

Démonstration. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)^2$ vérifiant $d(A, B) > 0$. $\forall \delta \in \left]0; \frac{d(A, B)}{2}\right[$, si \mathcal{F} est un δ -recouvrement de A , alors

$$\forall F \in \mathcal{F}, B \cap F = \emptyset.$$

Par conséquent, les δ -recouvrements de $A \sqcup B$ sont exactement les unions disjointes de δ -recouvrements de A et B . D'où

$$H_\delta^s(A \sqcup B) = H_\delta^s(A) + H_\delta^s(B)$$

et à la limite

$$H^s(A \sqcup B) = H^s(A) + H^s(B).$$

D'après le critère de Carathéodory, H^s est ainsi une mesure borélienne. \square

Exemple 1.1. H^0 est la mesure de comptage, H^n est la mesure de Lebesgue λ_n sur \mathbb{R}^n .

Proposition 1.4. Soient $(E, F) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow F$ α -Hölderienne de constante de Hölder C .

$$H^s(f(E)) \leq C^s H^{\alpha s}(E).$$

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un recouvrement de E . $(f(A_i))_{i \in \mathcal{I}}$ est un recouvrement de $f(E)$.

$$H^s(f(E)) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{diam}(f(A_i))^s \leq C^s \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{diam}(A_i)^{\alpha s}.$$

Ceci étant valable pour tout recouvrement de E , il vient

$$H^s(f(E)) \leq C^s H^{\alpha s}(E).$$

\square

Remarque 1.1. Ce résultat fonctionne a fortiori pour les fonctions Lipschitziennes, qui sont 1-Hölderiennes. Le cas d'égalité est atteint pour les similitudes, décrites ci-après. En particulier, comme celle de Lebesgue, la mesure de Hausdorff est invariante par translations, lesquelles sont des 1-similitudes.

Définition 1.4 (contraction, dilatation, similitude).

1. Une fonction $f : (E, d) \rightarrow (E, d)$, où (E, d) est un espace métrique, est dite *r-contractante* si $r \in (0; 1)$ et

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$$

2. Elle est dite *r-dilatatoire* si

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \geq r \cdot d(x, y)$$

3. Enfin, c'est une *r-similitude* si elle est à la fois *r-contractante* et *r-dilatatoire*, autrement dit si

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) = r \cdot d(x, y)$$

Remarque 1.2. Dans un espace euclidien, les *r-similitudes* sont exactement les compositions d'une isométrie (1-similitude) et d'une homothétie de rapport r . Une isométrie est elle-même la composition d'une application linéaire orthogonale et d'une translation. Les similitudes sont en particulier des applications affines. En outre, toute application affine de « rapport » suffisamment petit est une contraction (mais pas forcément une similitude).

Remarque 1.3. Toute fonction dilatatoire est injective, toute fonction contractante est continue.

Proposition 1.5. Soient $(E, F) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow F$ une *r-similitude*.

$$H^s(f(E)) = r^s H^s(E).$$

Démonstration. f est notamment 1-Hölderienne de constante de Hölder r et vérifie donc $H^s(f(E)) \leq r^s H^s(E)$. $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ est une r^{-1} -similitude, donc 1-Hölderienne et l'inégalité inverse vient immédiatement. \square

Proposition 1.6. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. Si $\exists d \geq 0 \mid H^d(A) < \infty$, alors $\forall d' > d, H^{d'}(A) = 0$
2. Si $\exists d > 0 \mid H^d(A) > 0$, alors $\forall d' < d, H^{d'}(A) = \infty$.
3. $\forall d > n, H^d(A) = 0$

Démonstration. 1. Soit $d \geq 0$ tel que $H^d(A) < \infty$. Soit $\epsilon > 0, H_\epsilon^d(A) < \infty$.

Donc $\exists C > 0$ et $\exists (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un ϵ -recouvrement de A tels que

$$H_\epsilon^d(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^d \leq C.$$

Soit $d' > d$.

$$\begin{aligned} H_\epsilon^{d'}(A) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^{d'} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^d \epsilon^{d'-d} \\ &\leq C \epsilon^{d'-d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

d'où $H^{d'}(A) = 0$.

2. De même, soit $d > 0$ tel que $H^d(A) > 0$. Soit $\epsilon > 0$, $H_\epsilon^d(A) > 0$. $\forall (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ϵ -recouvrement de A ,

$$H_\epsilon^d(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^d.$$

Soit $d' < d$.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^{d'} &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{diam}(F_k)^d \epsilon^{d'-d} \\ &\geq H_\epsilon^d(A) \epsilon^{d'-d} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty. \end{aligned}$$

Donc $H^{d'}(A) = \infty$.

3. Soit $d > n$. La mesure de Hausdorff d -dimensionnelle de A dans \mathbb{R}^n coïncide avec la mesure de Lebesgue λ_d de A vu comme partie de \mathbb{R}^d , laquelle est bien nulle.

□

Définition 1.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E \subseteq \mathbb{R}$. La *dimension de Hausdorff* de E est

$$\dim(E) = \inf\{d \geq 0 \mid H^d(E) = 0\} = \sup\{d \geq 0 \mid H^d(E) = \infty\}.$$

Exemple 1.2. La dimension de Hausdorff d'un point est 0, celle d'une droite est 1... Du fait de la coïncidence entre les mesures de Lebesgue et de Hausdorff, les objets de dimension entière au sens usuel conservent la même dimension au sens de Hausdorff.

Remarque 1.4. La dimension de Hausdorff d'un objet correspond à la seule des mesures de Hausdorff qui peut donner une mesure finie non nulle à cet objet. Mesuré à une dimension inférieure, il apparaît infini, mesuré à une dimension supérieure, il devient négligeable. Seule une mesure de Hausdorff est donc adapté à un objet en particulier : celle correspondant à sa dimension de Hausdorff.

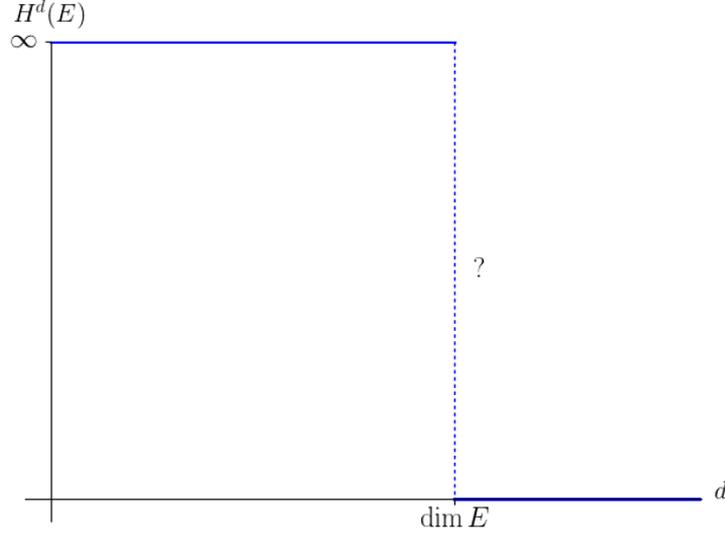
2 Ensembles auto-similaires

2.1 Construction d'ensembles fractaux

Intuitivement, une fractale est un ensemble identique à l'une de ses parties, à échelle près. La combinaison de trois résultats permet de construire de tels ensembles par itération d'un système de fonctions (définition 2.2). Si l'on part de fonctions contractantes, le théorème 2.3 assure qu'un tel système de fonctions est lui-même contractant, pour une métrique donnée par la définition 2.1. Sous des conditions garanties par le théorème 2.1, le classique théorème 2.2 de point fixe pour les fonctions contractantes fournit alors un unique point fixe.

Dans la suite, on considère un compact non-vide E de \mathbb{R}^n , muni de sa distance euclidienne d .

FIGURE 1 – Comportement de la mesure de Hausdorff selon la dimension



On est tenté de définir les ensembles fractaux comme limites de certaines suites de parties de E . Une telle approche requiert une notion de convergence, qu'on peut obtenir pour les compacts non-vides, car il est possible de les munir d'une distance.

Définition 2.1. Pour $A \subseteq E$ et $\delta \geq 0$, on définit :

$$[A]_\delta = \{x \in E \mid \exists a \in A : d(x, a) \leq \delta\}$$

Remarque 2.1. L'inclusion $A \subseteq [B]_\delta$ signifie que tous les points de A sont à distance au plus δ de B .

Proposition-Définition 2.1 (espace métrique des compacts). On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des compacts non-vides de E . On définit la distance de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ entre deux tels compacts A et B par :

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\delta \geq 0 \mid A \subseteq [B]_\delta \wedge [A]_\delta \supseteq B\}$$

Alors, $d_{\mathcal{H}}$ est une distance (symétrique) sur $\mathcal{H}(E)$.

Démonstration. Déjà, cette quantité est nécessairement finie, car on peut la majorer par $\max\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ (qui existe et est fini puisqu' A et B sont des compacts non-vides). La positivité de $d_{\mathcal{H}}$ est claire. Son caractère défini l'est aussi : il est immédiat que $d_{\mathcal{H}}(A, A) = 0$, et si $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ alors on a les inclusions $A \subseteq B$ et $A \supseteq B$, d'où $A = B$. Montrons l'inégalité triangulaire. Soient trois compacts non-vides A, B et C . Posons $d_1 = d_{\mathcal{H}}(A, B)$ et $d_2 = d_{\mathcal{H}}(B, C)$. Il est aisé de voir que $A \subseteq [B]_{d_1}$ et $B \subseteq [C]_{d_2}$. On en déduit :

$$A \subseteq [B]_{d_1} \subseteq [[C]_{d_2}]_{d_1} \subseteq [C]_{d_1+d_2}$$

On obtient de même $[A]_{d_1+d_2} \supseteq C$, et donc $d_{\mathcal{H}}(A, C) \leq d_1 + d_2$. \square

Remarque 2.2. C'est à ne pas confondre avec

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

qui ne définit pas une distance.

Théorème 2.1 (complétion). *L'espace métrique $(\mathcal{H}(E), d_{\mathcal{H}})$ est complet.*

Démonstration. Soit $(A_n)_n \in (\mathcal{H}(E), d_{\mathcal{H}})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On va montrer qu'elle converge vers l'ensemble limite suivant :

$$A = \left\{ x \in E \mid \exists (m_k)_k \text{ extractrice} : \exists (x_k)_k \in \prod_k A_{m_k} : x_k \longrightarrow x \right\}$$

Montrons déjà que $A \in \mathcal{H}(E)$, c'est-à-dire qu' A est un compact non-vidé. Réécrivons cet ensemble ainsi :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$$

L'inclusion (\subseteq) est aisée; montrons l'inclusion (\supseteq) . Notons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Soit $x \in \bigcap_n \overline{B_n}$. Pour tout n , on dispose de suites $(y_p^n)_p$ à valeurs dans B_n , qui convergent vers x . Par une sorte d'extraction diagonale, on construit alors une extractrice $(n_k)_k$ et une suite $(x_k)_k \in \prod_k A_{n_k}$ qui converge vers x , ce qui montre que $x \in A$. La construction est la suivante. Pour construire m_k et x_k , ayant déjà construit m_{k-1} et x_{k-1} , on considère la suite $(y_p^{m_{k-1}+1})_p$, à valeurs dans $B_{m_{k-1}+1}$; comme celle-ci converge vers x , on dispose de p_k tel que $d(y_{p_k}^{m_{k-1}+1}, x) \leq 2^{-k}$; on pose alors $x_k = y_{p_k}^{m_{k-1}+1}$, et l'on dispose de $m_k \geq m_{k-1} + 1$ tel que $x_k \in A_{m_k}$. L'étape initiale est identique en remplaçant $m_{k-1} + 1$ par un indice arbitraire. Pour tout k , on obtient alors $x_k \in A_{m_k}$ tel que $d(x_k, x) \leq 2^{-k}$.

Finalement, $A = \bigcap_n \overline{B_n}$. Il reste à montrer que cet ensemble est un compact non-vidé. Les ensembles $\overline{B_n}$ sont évidemment non-vides et fermés. Comme ils sont inclus dans le compact E , ils sont compacts. Comme ils sont décroissants, le théorème des compacts emboîtés s'applique et donne le résultat.

Montrons maintenant que A est limite de la suite $(A_n)_n$, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M(\varepsilon) : \forall m \geq M(\varepsilon) : d_{\mathcal{H}}(A, A_m) \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(A_m)_m$ est de Cauchy donc on dispose de $M(\varepsilon)$ tel que :

$$\forall m, n \geq M(\varepsilon) : d_{\mathcal{H}}(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $m \geq M(\varepsilon)$. Montrons que $d_{\mathcal{H}}(A, A_m) \leq \varepsilon$.

- Montrons d'abord que $A \subseteq [A_m]_{\varepsilon}$. Soit $x \in A$. Alors, par définition de A , on dispose d'une extractrice $(m_k)_k$ et d'une suite $(x_k)_k \in \prod_k A_{m_k}$ qui converge vers x . En particulier :

$$\begin{aligned} \exists K(\varepsilon, x) : \forall k \geq K(\varepsilon, x) : m_k \geq M(\varepsilon) \\ \exists L(\varepsilon, x) : \forall k \geq L(\varepsilon, x) : d(x, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc pour $k = \max(K(\varepsilon, x), L(\varepsilon, x))$ (ou toute autre valeur plus grande) fixé, on a simultanément :

$$\begin{aligned} d(A_k, A_m) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x, x_k) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

La première inégalité entraîne $\exists y \in A_m : d(x_k, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) \leq \varepsilon$$

D'où $A \subseteq [A_m]_\varepsilon$.

– Montrons maintenant que $[A]_\varepsilon \supseteq A_m$. Comme $(A_n)_n$ est de Cauchy, on peut construire une extractrice $(m_k)_k$ telle que $m_0 = m$ et :

$$\forall k : \forall n, n' \geq m_k : d_{\mathcal{H}}(A_n, A_{n'}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

En particulier :

$$\forall k : d_{\mathcal{H}}(A_{m_k}, A_{m_{k+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Alors, pour $y \in A_m$, on construit par récurrence une suite $(x_k)_k \in \prod_k A_{m_k}$ telle que $x_0 = y$ et :

$$\forall k : d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Cette suite à valeurs dans E est de Cauchy; en effet :

$$\forall k : \forall i > j \geq k : d(x_i, x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^i} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

On en déduit, E étant complet, que cette suite converge vers une valeur $x \in E$. Par définition de A , on a alors $x \in A$. De plus, on a $\forall k : d(y, x_k) \leq \varepsilon$ donc $d(y, x) \leq \varepsilon$. D'où $[A]_\varepsilon \supseteq A_m$. □

Ce résultat nous permettra d'appliquer le théorème classique de point fixe.

Théorème 2.2 (point fixe).

1. Toute fonction contractante admet au plus un point fixe.
2. Si de plus, l'espace métrique (E, d) est complet, alors toute fonction contractante sur (E, d) admet un unique point fixe, vers lequel converge la suite $(f^n(x))_n$ quelque soit le point de départ x .

Démonstration.

1. Soit f une fonction r -contractante. Si x et y sont des points fixes de f , alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$. Comme $r < 1$, on obtient $d(x, y) = 0$ donc $x = y$.
2. Soit $x \in E$. Posons $\delta = d(x, f(x))$. On a :

$$\begin{aligned} d(x, f^n(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &\leq \delta + r\delta + \dots + r^{n-1}\delta \\ &\leq \frac{\delta}{1-r} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m \geq n \geq N$:

$$d(f^m(x), f^n(x)) \leq r^n \cdot d(f^{m-n}(x), x) \leq \frac{\delta}{1-r} r^n \leq \frac{\delta}{1-r} r^N$$

Donc la suite $(f^n(x))_n$ est de Cauchy. Comme l'espace est complet, elle converge. Par continuité de f , la limite y vérifie $f(y) = y$. □

Définition 2.2 (IFS). On appelle *système de fonctions itérées (IFS)* tout ensemble fini de contractions de E . À un système F , on associe la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(E) &\rightarrow \mathcal{H}(E) \\ A &\mapsto \bigcup_{f \in F} \tilde{f}(A) \end{aligned}$$

Théorème 2.3. *Un système de fonctions itérées est une contraction. Plus précisément, si $F = \{f_i\}_i$ où f_i est r_i -contractante, alors la fonction associée à F est r -contractante où $r = \max\{r_i\}_i$.*

Remarque 2.3. Toute fonction r -contractante est également s -contractante pour tout $s \geq r$. En conséquence, on peut supposer que toutes les fonctions du système sont r -contractantes, avec le même rapport r .

Démonstration. C'est la combinaison des deux lemmes 2.1 et 2.2 ci-dessous. □

Lemme 2.1. *Si f est une r -contraction sur E , alors la fonction \tilde{f} induite sur $\mathcal{H}(E)$ est également r -contractante.*

Démonstration. Déjà, f induit bien une fonction sur $\mathcal{H}(E)$, car elle est contractante donc continue, donc \tilde{f} préserve la compacité.

Montrons que cette fonction induite est r -contractante. Soient $A, B \in \mathcal{H}(E)$. Posons $\delta = d_{\mathcal{H}}(A, B)$. Montrons que $\tilde{f}(A) \subseteq [\tilde{f}(B)]_{r\delta}$. Soit $f(a) \in \tilde{f}(A)$ avec $a \in A$. On dispose de $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq \delta$. Alors, $f(b) \in \tilde{f}(B)$ et $d(f(a), f(b)) \leq r \cdot d(a, b) \leq r\delta$, donc $f(a) \in [\tilde{f}(B)]_{r\delta}$. D'où l'inclusion $\tilde{f}(A) \subseteq [\tilde{f}(B)]_{r\delta}$. On obtient de même que $[\tilde{f}(A)]_{r\delta} \supseteq \tilde{f}(B)$, donc $d_{\mathcal{H}}(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \leq r\delta$. □

Lemme 2.2. *Si f et g sont deux r -contractions sur $\mathcal{H}(E)$, alors $f \cup g$ l'est aussi.*

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{H}(E)$. Posons $\delta = d_{\mathcal{H}}(A, B)$. Montrons que $f(A) \cup g(A) \subseteq [f(B) \cup g(B)]_{r\delta}$. On a

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(f(A), f(B)) &\leq r\delta \\ d_{\mathcal{H}}(g(A), g(B)) &\leq r\delta \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(A) &\subseteq [f(B)]_{r\delta} \\ g(A) &\subseteq [g(B)]_{r\delta} \end{aligned}$$

On en déduit $f(A) \cup g(A) \subseteq [f(B)]_{r\delta} \cup [g(B)]_{r\delta} = [f(B) \cup g(B)]_{r\delta}$. Par symétrie, on a finalement $d_{\mathcal{H}}(f(A) \cup g(A), f(B) \cup g(B)) \leq r\delta$. □

Corollaire 2.1. *Tout système de fonctions itérées admet un unique point fixe. Celui-ci s'obtient comme limite de la suite $(F^n(A))_n$ pour $A \in \mathcal{H}(E)$ arbitraire (par exemple $A = E$).*

Remarque 2.4. En notant $F = \{f_1; \dots; f_k\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F^n = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_n} F_i \quad (1)$$

où $\mathcal{I}_n = \{1; \dots; k\}^{\{1; \dots; n\}}$ et $F_i = \widetilde{f}_{i_1} \circ \dots \circ \widetilde{f}_{i_n}$ (qui est $r_{i_1} \dots r_{i_n}$ -contractante).

Remarque 2.5. Si A vérifie $\widetilde{f}_i(A) \subseteq A$ pour tout i (par exemple si $A = E$), autrement dit si $F(A) \subseteq A$, alors la suite $(F^n(A))_n$ est décroissante, et le point fixe A_∞ de F est alors $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(A)$. En particulier, $A_\infty \subseteq A$.

Remarque 2.6. Si de plus les f_i sont injectives (par exemple si elles sont dilatatoires) et que les $\widetilde{f}_i(A)$ sont disjoints, alors les ensembles $(F_i(A))_{i \in \mathcal{I}_n}$ sont disjoints. En outre, le point fixe A_∞ vérifie la même propriété, il est totalement discontinu, et pour tout $x \in A_\infty$ il existe une unique suite $i \in \{1; \dots; k\}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x \in F_{i_0, \dots, i_n}(A_\infty)$$

Autrement dit :

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \downarrow F_{i_0, \dots, i_n}(A_\infty)$$

Définition 2.3 (fractales).

- Un *ensemble fractal* est le point fixe d'un système de fonctions itérées.
- Si les fonctions itérées sont affines, on parle d'*ensemble auto-affine*.
- Si les fonctions sont des similitudes, on parle d'*ensemble auto-similaire*.

Exemple 2.1. Dans le cas dégénéré d'un système réduit à une seule r -contraction f , on a $\text{diam } A = \text{diam } \widetilde{f}(A) \leq r \cdot \text{diam } A$ donc $\text{diam } A = 0$. On en conclut qu' A est réduit à un point : $A = \{x\}$ avec x l'unique point fixe de la contraction f .

Exemple 2.2. On appelle *ensemble triadique de Cantor* (figure 2) l'ensemble auto-similaire obtenu par le système $\frac{1}{3}$ -contractant suivant sur $E = [0; 1]$:

$$\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{3}x \\ x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Plus généralement, on peut définir l'ensemble de Cantor de rapport $r < \frac{1}{2}$ par le système r -contractant suivant :

$$\begin{cases} x \mapsto rx \\ x \mapsto rx + (1-r) \end{cases}$$

Remarque 2.7. L'ensemble triadique de Cantor présente de nombreuses propriétés. C'est l'ensemble des points de $[0; 1]$ qui peuvent s'écrire en développement triadique (propre ou non) sans le chiffre 1. Il est en bijection naturelle avec, et même homéomorphe à, $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$.

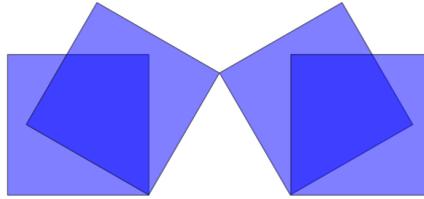
FIGURE 2 – Construction de l'ensemble triadique de Cantor, avec pour compact initial le segment $[0 ; 1]$



Exemple 2.3. Le *flocon de von Koch* (figures 3, 4 et 5) est l'ensemble auto-similaire donné par le système $\frac{1}{3}$ -contractant suivant, E étant le carré unité de \mathbb{C} et $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$\begin{cases} z \mapsto \frac{1}{3}z \\ z \mapsto \frac{1}{3}jz + \frac{1}{3} \\ z \mapsto \frac{1}{3}\bar{j}z + \frac{1}{3}(1 + j) \\ z \mapsto \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$$

FIGURE 3 – Les similitudes du carré unité pour construire le flocon de von Koch



Exemple 2.4. Le *triangle de Sierpiński* (figures 6 et 7) est donné dans le carré unité de \mathbb{C} par :

$$\begin{cases} z \mapsto \frac{1}{2}z \\ z \mapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ z \mapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(1 + i) \end{cases}$$

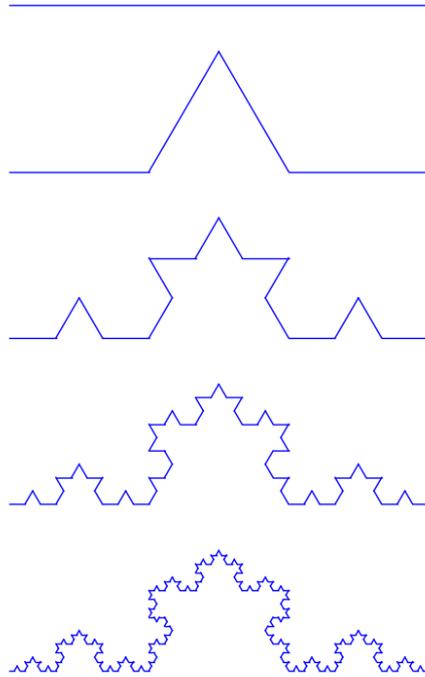
Les figures 5 et 7 montrent un calcul du flocon de von Koch et du triangle de Sierpiński avec un autre compact initial que l'ensemble le plus naturel. Ceci illustre l'unicité du point fixe du système itéré.

2.2 Dimension d'ensembles auto-similaires

Les ensembles auto-similaires tels qu'on vient de les construire présentent des dimensions de Hausdorff qui peuvent être non entières. En fait, on peut obtenir n'importe quelle dimension réelle positive (exemple 2.7).

Exemple 2.5. Il est aisé de voir que la longueur (mesure de Lebesgue) de la n -ième étape de construction de l'ensemble de Cantor de rapport r est $2^n r^n$, longueur qui tend vers 0 (puisque $r < \frac{1}{2}$, donc l'ensemble est de dimension inférieure à 1. De

FIGURE 4 – Construction du flocon de von Koch, avec pour compact initial le segment $[0; 1]$



même, la longueur de la n -ième étape de construction du flocon de von Koch est $(\frac{4}{3})^n$, ce qui tend vers l'infini, donc la dimension est supérieure à 1. Enfin, pour le triangle de Sierpiński, la surface $(\frac{3}{4})^n$ tend vers 0, donc la dimension est inférieure à 2.

Remarque 2.8. Si A est l'ensemble fractal donné par le système $\{f_i\}_i$ où f_i est r_i -contractante, et que les parties $f_i(A)$ sont disjointes, alors :

$$H^d(A) = H^d\left(\bigsqcup_i f_i(A)\right) = \sum_i H^d(f_i(A)) \leq \sum_i r_i^d \cdot H^d(A)$$

Si de plus, les f_i sont des r_i -similitudes (A est auto-similaire), alors l'inégalité est une égalité :

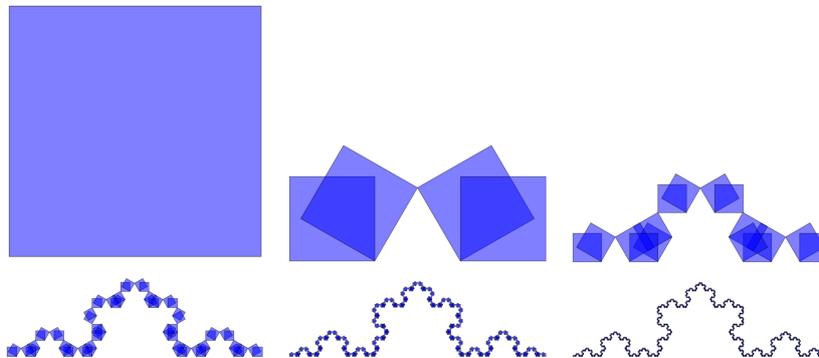
$$H^d(A) = \left(\sum_i r_i^d\right) H^d(A)$$

On en déduit que si d est la dimension de Hausdorff de A et que $H^d(A)$ est fini non-nul, alors d est la solution (unique, par valeurs intermédiaires) de l'équation :

$$1 = \sum_i r_i^d$$

Exemple 2.6. L'exemple trivial vu ci-dessus est de dimension 0, et $1 = r^0$.

FIGURE 5 – Construction du flocon de von Koch, avec pour compact initial le carré $[0; 1]^2$



Exemple 2.7. L'ensemble de Cantor de rapport r est défini par deux r -similitudes d'images disjointes donc, à supposer qu'il admet une mesure de Hausdorff finie non-nulle, sa dimension d vérifie $1 = 2r^d$, soit $d = \log_r \frac{1}{2}$. C'est une fonction croissante de r ; pour r parcourant $(0; \frac{1}{2})$, d prend toutes les valeurs de $(0; 1)$.

Par exemple, l'ensemble de Cantor de rapport $\frac{1}{3}$ est de dimension $\log_3 2 \simeq 0,631$.

Remarque 2.9. En mesurant manuellement l'ensemble de Cantor de rapport r (noté C_r) afin d'en déduire sa dimension, on trouve l'encadrement suivant pour la dimension $d_0 = \log_r \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} \leq H^{d_0}(C_r) \leq 1$$

En particulier, cette quantité étant finie non-nulle, C_r est bien de dimension d_0 .

Démonstration.

Majoration – En considérant la construction de C_r par retraits successifs, on voit que cet ensemble peut se recouvrir par deux intervalles de longueur r (les intervalles $[0; r]$ et $[1-r; r]$), donc $H_r^d(C_r) \leq 2r^d$. L'étape suivante de la construction donne un recouvrement de C_r par quatre intervalles de longueur r^2 , donc $H_{r^2}^d(C_r) \leq 4(r^2)^d$. Plus généralement, pour tout $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $r^n \leq \delta$, la n -ième étape de la construction donne :

$$H_\delta^d(C_r) \leq (2r^d)^n$$

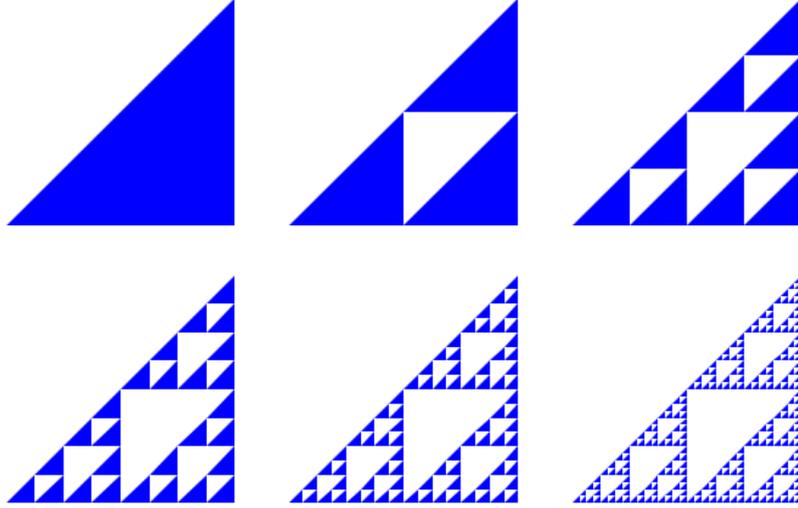
Lorsque d vérifie $2r^d \leq 1$ (c'est-à-dire $d \geq d_0$), on en déduit :

$$H^d(C_r) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^d(C_r) \leq 1 < \infty$$

Ceci montre que $\dim C_r \leq d_0$. En fait, pour $2r^d < 1$ (c'est-à-dire $d > d_0$), on en déduit même que $H_\delta^d(C_r) = 0$ pour tout δ , d'où l'on retrouve que $H^d(C_r) = 0$.

Minoration – L'autre versant – minorer la mesure de Hausdorff et donc la dimension – est plus difficile. Fixons $d = d_0$. Montrons d'abord un résultat utile.

FIGURE 6 – Construction du triangle de Sierpiński, avec pour compact initial un triangle



Pour $n \in \mathbb{N}$, nommons $I_1^n, \dots, I_{2^n}^n$ les 2^n intervalles, de longueur $\text{diam } I_i^n = r^n$, de la n -ième étape de la construction de C_r . Soit $I \subseteq [0; 1]$ un intervalle arbitraire. On considère l'ensemble :

$$E(n, I) = \{i \mid I_i^n \subseteq I\}$$

Comme I est un intervalle, les éléments de $E(n, I)$ sont consécutifs. Si $E(n, I)$ contient au moins trois éléments $i-1, i, i+1$, alors l'intervalle I inclut aussi l'intervalle $I_{\lfloor i/2 \rfloor}^{n-1}$ « parent » soit de I_{i-1}^n et I_i^n (si i est pair), soit de I_i^n et I_{i+1}^n (si i est impair). En considérant le rang n_0 minimal tel que $E(n_0, I) \neq \emptyset$ (s'il existe), on en déduit que $\text{card } E(n_0, I) \leq 2$. Pour $n \geq n_0$, on peut alors établir la majoration suivante :

$$\text{card } E(n, I) < 2^{n-n_0} (\text{card } E(n_0, I) + 2) \leq 4 \cdot 2^{n-n_0}$$

En effet, si $E(n_0, I) = \{i; \dots; j\}$, alors les intervalles de l'étape n inclus dans I sont des « descendants » des intervalles $I_{i-1}^{n_0}, \dots, I_{j+1}^{n_0}$ de l'étape n_0 (l'intervalle I peut couvrir partiellement $I_{i-1}^{n_0}$ et $I_{j+1}^{n_0}$), et chaque intervalle de l'étape n_0 présente 2^{n-n_0} « descendants » à l'étape n . Maintenant, la quantité :

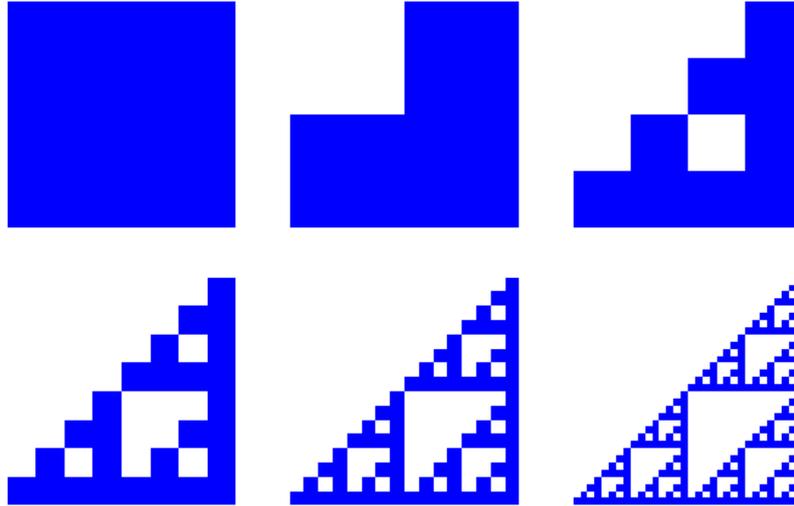
$$L(n, I) = \sum_{i \in E(n, I)} (\text{diam } I_i^n)^d = \text{card } E(n, I) \cdot r^{nd}$$

peut se majorer ainsi :

$$L(n, I) < 4 \cdot 2^{n-n_0} \cdot r^{nd} = 4 (2r^d)^{n-n_0} (r^{n_0})^d \leq 4(\text{diam } I)^d$$

où l'on a utilisé l'hypothèse initiale $2r^d = 1$, et le fait que $r^{n_0} \leq \text{diam } I$ puisque l'intervalle I inclut au moins un intervalle $I_i^{n_0}$.

FIGURE 7 – Construction du triangle de Sierpiński, avec pour compact initial le carré $[0; 1]^2$



Muni de ce fait, on peut minorer la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle de C_r . On peut supposer dans la définition de la mesure de Hausdorff que les recouvrements considérés sont des recouvrements par des ouverts et même, puisqu'on se trouve dans la droite réelle, par des intervalles ouverts. Soient donc $(J_j)_j$ des intervalles ouverts recouvrant C_r . Alors, comme C_r est compact et que les J_j sont ouverts, on dispose d'un nombre de Lebesgue δ , tel que toute partie de C_r de diamètre au plus δ soit incluse dans l'un des J_j . En particulier, pour n suffisamment grand, on a $r^n \leq \delta$ et chacun des intervalles I_i^n est inclus dans au moins l'un des intervalles J_j . Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_j (\text{diam } J_j)^d &> \frac{1}{4} \sum_j L(n, J_j)^d \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j, i | I_i^n \subseteq J_j} (\text{diam } I_i^n)^d \\
 &\geq \frac{1}{4} \sum_i (\text{diam } I_i^n)^d \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2^n \cdot (r^n)^d \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Cette minoration montre enfin que $H^d(C_r) \geq \frac{1}{4}$. □

Remarque 2.10. On peut en fait montrer que $H^d(C_r) \geq 1$, et donc $H^d(C_r) = 1$. [Fal86]

Dans de nombreux cas pratiques, les parties de l'ensemble auto-similaire ne sont pas complètement disjointes. Cependant, elles le sont « essentiellement ». Par exemples

dans les cas du triangle de Sierpiński et du flocon de von Koch, les parties peuvent avoir un point commun. On souhaite donc étendre le résultat précédent à de tels ensembles auto-similaires. En outre, on n'a pas encore élucidé si l'ensemble admet bien en général une mesure de Hausdorff finie non-nulle.

À l'exemple des ensembles de Cantor, la majoration est aisée à obtenir (puisqu'il suffit d'exhiber des recouvrements suffisamment petits) et n'exige aucune hypothèse. La minoration en revanche est bien plus difficile (car il faut minorer la taille d'un recouvrement arbitraire). On aura besoin d'hypothèses spécifiques et on emploiera des outils moins *ad-hoc* que dans l'exemple des ensembles de Cantor.

Théorème 2.4 (majoration). *Si A est l'ensemble fractal donné par le système $\{f_i\}_i$ où f_i est r_i -contractante, alors $\dim A \leq d_0$ et $H^{d_0}(A) < \infty$, où d_0 est l'unique solution de l'équation :*

$$1 = \sum_i r_i^{d_0}$$

Remarque 2.11. La fonction $d \mapsto \sum_i r_i^d$ est décroissante, de valeur k en 0, et tend vers 0 quand $d \rightarrow \infty$.

Démonstration. Soit $d \geq d_0$, de sorte que $\sum_i r_i^d \leq 1$. Soit $\delta > 0$. On va majorer $H_\delta^d(A)$. En notant $r = \max\{r_i\}_i$, on dispose de n assez grand pour que $r^n \cdot \text{diam } A \leq \delta$ (A étant borné car compact). Par ailleurs, comme A est le point fixe du système F :

$$A = F^n(A) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_n} F_i(A)$$

avec les notations de la remarque 2.4. En outre, pour $i \in \mathcal{I}_n$, la fonction F_i est $r_{i_1} \cdots r_{i_n}$ -contractante, donc :

$$\text{diam } F_i(A) \leq r_{i_1} \cdots r_{i_n} \cdot \text{diam } A \leq r^n \cdot \text{diam } A \leq \delta$$

Les $(F_i(A))_{i \in \mathcal{I}_n}$ forment donc un recouvrement de A par des ensembles de diamètres au plus δ , d'où :

$$\begin{aligned} H_\delta^d(A) &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}_n} (\text{diam } F_i(A))^d \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}_n} (r_{i_1} \cdots r_{i_n})^d (\text{diam } A)^d \\ &= \left(\sum_{i=1}^k r_i^d \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^k r_i^d \right) (\text{diam } A)^d \\ &\leq (\text{diam } A)^d \end{aligned}$$

Ainsi :

$$H^d(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^d(A) \leq (\text{diam } A)^d < \infty$$

Étant établi pour tout $d \geq d_0$, ceci montre que $\dim A \leq d_0$. □

Définition 2.4 (OSC). On dit qu'un système de fonctions itérées $\{f_i\}_i$ vérifie la *condition d'ensemble ouvert* (abrégé *OSC* pour l'anglais *open set condition*) s'il existe un ouvert non-vide $\mathcal{O} \subseteq E$ tel que

$$\mathcal{O} \supseteq \bigsqcup_i \widetilde{f}_i(\mathcal{O})$$

Théorème 2.5 (minoration). Si A est l'ensemble fractal donné par le système $\{f_i\}_i$, que les f_i sont s_i -dilatatoires et que le système vérifie la condition d'ensemble ouvert, alors $\dim A \geq d_1$ et $H^{d_1}(A) > 0$, où d_1 est l'unique solution de l'équation :

$$1 = \sum_i s_i^{d_1}$$

Démonstration. On se place dans le cadre simplifié où les $\widetilde{f}_i(A)$ sont disjoints. Alors, la remarque 2.6 s'applique. Fixons $d = d_1$. Le lemme 2.3 permet de définir une mesure extérieure μ sur E telle que $\mu(F_i(a)) = (s_{i_1} \cdots s_{i_n})^d$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathcal{I}_n$. En effet :

$$\sum_{j=1}^k (s_{i_1} \cdots s_{i_n} s_j)^d = (s_{i_1} \cdots s_{i_n})^d \underbrace{\sum_j s_j^d}_{=1} = (s_{i_1} \cdots s_{i_n})^d$$

Pour minorer la mesure de Hausdorff, on va appliquer le lemme 2.4 à cette mesure extérieure μ qu'on vient de construire.

On pose $\delta = \min\{d(\widetilde{f}_i(A), \widetilde{f}_j(A)) \mid i \neq j\}$; par compacité et disjonction, $\delta > 0$. Soit U un ensemble de diamètre $r < \delta$. Supposons qu' U intersecte A en un point x . Soit $i \in \{1; \dots; k\}^{\mathbb{N}}$ la suite associée à x par la remarque 2.6. On pose $n = \min\{\ell \mid s_{i_0} \cdots s_{i_\ell} \delta \leq r\}$. Si j_1, \dots, j_n est une suite différente de i_1, \dots, i_n , Alors, les ensembles disjoints $F_{i_1, \dots, i_n}(A)$ et $F_{j_1, \dots, j_n}(A)$ sont séparés par une distance au moins r . En effet :

$$\begin{aligned} F_{i_1, \dots, i_n}(A) &\subseteq \widetilde{f_{i_n}}(A) \\ F_{j_1, \dots, j_n}(A) &\subseteq \widetilde{f_{j_n}}(A) \end{aligned}$$

donc avec $m = \min\{\ell \mid i_\ell \neq j_\ell\}$ et en utilisant le caractère dilatatoire, on a :

$$\begin{aligned} d(F_{i_1, \dots, i_n}(A), F_{j_1, \dots, j_n}(A)) &\geq s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} \cdot d(F_{i_m, \dots, i_n}(A), F_{j_m, \dots, j_n}(A)) \\ &\geq s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} \cdot d(\widetilde{f_{i_m}}(A), \widetilde{f_{j_m}}(A)) \\ &\geq s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} \delta \\ &> r \end{aligned}$$

Ainsi, $A \cap U \subseteq A \cap \mathcal{B}(x, r) \subseteq F_{i_1, \dots, i_n}(A)$, d'où :

$$\mu(U) = \mu(A \cap U) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_n}(A)) = (s_{i_1} \cdots s_{i_n})^d \leq (r/\delta)^d$$

c'est-à-dire $\delta^d \cdot \mu(U) \leq (\text{diam } U)^d$. Le lemme 2.4 s'applique alors et donne :

$$H^d(E) \geq \delta^d \mu(E) = \delta^d > 0$$

□

Lemme 2.3 (mesure définie par subdivisions successives). Soit $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ un borélien borné. Soient $(E_k^n)_{k \in K_n}^{n \in \mathbb{N}}$ des boréliens tels que $E_0^0 = E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $(E_k^n)_k$ soient disjoints, en nombre fini, et que chacun soit inclus dans l'un des E_{k-1}^n . Autrement dit, les E_k^n munis de la relation d'inclusion définissent un arbre de racine E , de branchement fini et de profondeur infinie. Supposons de plus que $\max\{\text{diam } E_k^n \mid k \in K_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Par ailleurs, soient $(E_k^n)_{n,k}$ des masses (réels positifs) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall j \in K_n : \sum_{\substack{k \in K_{n+1} \\ E_k^{n+1} \subseteq E_j^n}} \mu_k^{n+1} = \mu_j^n$$

Alors il existe une mesure extérieure μ , unique sur les boréliens, qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall k \in K_n : \mu(E_k^n) &= \mu_k^n \\ \forall A \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \bigsqcup_{k \in K_n} E_k^n : \mu(A) &= 0 \end{aligned}$$

Lemme 2.4 (« mass distribution principle »). Soit μ une mesure extérieure non-nulle sur E et d un réel positif. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall U \subseteq E : \text{diam } U \leq \varepsilon \implies \mu(U) \leq (\text{diam } U)^d$$

alors $\mu(E) \leq H^d(E)$ et $\dim E \geq d$.

Démonstration. Soit $\delta \leq \varepsilon$ et $(U_i)_i$ un δ -recouvrement de E . On a par σ -sous-additivité :

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq \sum_i (\text{diam } U_i)^d$$

Par infimum, on en déduit $\mu(E) \leq H_\delta^d(E)$, et donc $H^d(E) \geq \mu(E) > 0$. \square

Corollaire 2.2 (mesure & dimension d'un ensemble auto-similaire). Si A est l'ensemble auto-similaire donné par le système $\{f_i\}_i$ où f_i est une r_i -similitude et que le système vérifie la condition d'ensemble ouvert, alors la dimension de A est l'unique solution d de l'équation :

$$1 = \sum_i r_i^d$$

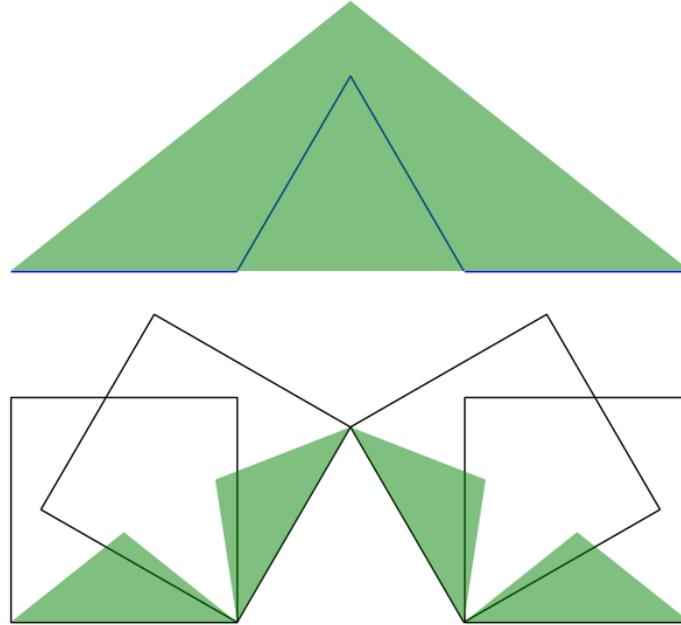
De plus, $0 < H^d(A) < \infty$.

Exemple 2.8. La dimension d du triangle de Sierpiński vérifie $1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d$, soit $d = \log_2 3 \simeq 1,585$. Comme ouvert vérifiant la condition d'ensemble ouvert, on peut prendre l'intérieur du triangle qu'on a pris comme compact initial dans la figure 6.

Exemple 2.9. La dimension d du flocon de von Koch vérifie $1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^d$, soit $d = \log_3 4 \simeq 1,262$. Un ouvert vérifiant la condition d'ensemble ouvert est illustré sur la figure 8; la disjonction se vérifie facilement par un calcul d'angles.

Remarque 2.12. On connaît la dimension du flocon de von Koch et l'on sait que sa mesure est finie non-nulle pour cette dimension. On en connaît des bornes[ZZJ03] mais on ignore encore sa valeur exacte.

FIGURE 8 – Condition d'ensemble ouvert pour le flocon de von Koch



Bibliographie

- [Fal86] Kenneth Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1986.
- [Fal04] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [Mag12] Francesco Maggi. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems : An Introduction to Geometric Measure Theory*. Cambridge University Press, 2012.
- [Val13] Robert W Vallin. *The elements of Cantor sets : with applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Vil05] Cédric Villani. *Intégration et analyse de Fourier*. notes de cours, ENS Lyon, 2005.
- [Zie04] William P Ziemer. *Modern Real Analysis*. lecture notes, Indiana University & Purdue University, 2004.
- [ZZJ03] Zhi Wei Zhu, Zuo Ling Zhou, and Bao Guo Jia. On the lower bound of the hausdorff measure of the koch curve. *Acta Mathematica Sinica*, 19(4) :715–728, 2003.