TD6 - Rectifiabilité

EXERCICE 2 - Cantor 4 coins

DÉFINITION [Ensemble rectifiable]

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que E est d-rectifiable s'il existe une famille (au plus) dénombrable

- d'ensembles $A_j \subset \mathbb{R}^d$
- d'applications lipschitziennes $f_j : A_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$

tels que $\boxed{\mathcal{H}^d\left(E \setminus \bigcup_j f_j(A_j)\right) = 0}$ ← $B \setminus C = \{x \in B : x \notin C\}$

Même sans supposer $\mathcal{H}^d(E) < +\infty$: $\mathcal{H}^d|_E$ σ-finie ←

. On peut supposer $A_j = \mathbb{R}^d$
. Version C^1 / sous-variété avec Sard.

Un sous-ensemble d'un ensemble rectifiable est rectifiable.

Quelques rappels, on renvoie à la section 15 des notes de cours

π_W projection orthogonale sur W

Thm 20 p150 (Notes cours)

THÉORÈME [Sur les projections d'un ensemble rectifiable]

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble d-rectifiable, $\mathcal{H}^d$-mesurable et $\mathcal{H}^d(E) > 0$.

Il existe V un d-plan (= sev de dim d) de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tous W d-plans de $\mathbb{R}^n$,

$\boxed{\mathcal{H}^d(\pi_W(E)) > 0}$ sauf (peut-être) si $\boxed{V \cap W^\perp \neq \{0\}}$

$\Updownarrow$ $\pi_V|_W$ pas surjective

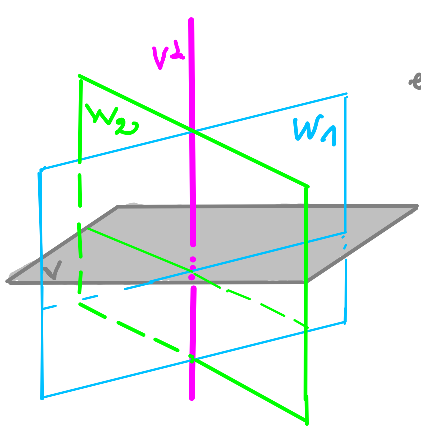
Rque. L'hypothèse $V \cap W^\perp \neq \{0\}$ est équivalente à $W \cap V^\perp \neq \{0\}$:

$\Updownarrow$ $\dim(V \cap W^\perp) \geq 1$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $\dim(W \cap V^\perp) \geq 1$

et $\dim(V \cap W^\perp) = \underbrace{\dim V + \dim W^\perp}_{n} - \dim(V + W^\perp)$

$\dim(V + W^\perp) = \dim((V^\perp \cap W)^\perp)$ $\quad$ $\left\{ (E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp \right.$

$= \dim(V^\perp \cap W)$



DEFINITION - [Ensemble totalement non rectifiable]

$E \subset \mathbb{R}^n$ est dit totalement (ou purement) non d-rectifiable si

$$\mathcal{H}^d(E \cap f(\mathbb{R}^d)) = 0 \quad \forall f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ lipschitzienne}$$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\mathcal{H}^d(E \cap F) = 0$ pour tout F d-rectifiable

Si E totalement non d-rectifiable, $F \subset E$ $\Big\} \Rightarrow F$ totalement non d-rectifiable

THÉORÈME - [Projections des ensembles totalement non rectifiables]

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble totalement non d-rectifiable, $\mathcal{H}^d$-mesurable et tel que $\mathcal{H}^d(E) < +\infty$.

ALORS,

$$\mathcal{H}^d(\pi_V(E)) = 0 \quad \text{pour presque tout d-plan } V$$

$\downarrow$ pour une mesure raisonnable sur la Grassmannienne des d-plans

Nous on utilise le cas $d=1$, $n=2$

$G_{d,n} = \{ V \subset \mathbb{R}^n \text{ s.e.v. de dim } d \}$

Mesure de Haar sur $O(n)$

$\hookrightarrow G_{d,n} \simeq O(n) / O(d) \times O(n-d)$

ou mesure Riemannienne

$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow G_{d,n}$

$\theta \longmapsto$ droite qui fait angle θ avec l'horizontale

$$\mathcal{H}^1(\pi_\theta(E)) = 0 \quad \text{pour } \mathcal{L}^1\text{-presque tout } \theta \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

BUT de l'exercice : Construire un "ensemble de Besicovitch"

i.e. $B \subset \mathbb{R}^2$ borélien

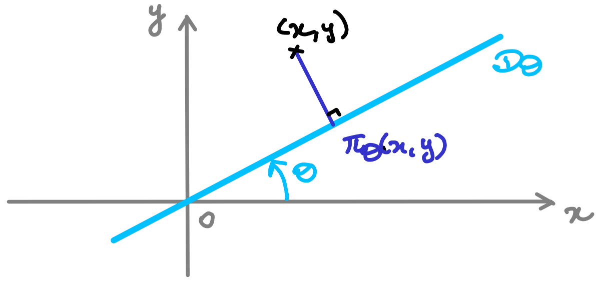
- qui contient un segment (et même une droite affine) dans toute direction.
- $\mathcal{L}^2(B) = 0$. !!!

11- Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ borélien. On suppose qu'il existe $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que

$$\mathcal{H}^1(\pi_{\theta_1}(E)) = \mathcal{H}^1(\pi_{\theta_2}(E)) = 0$$

Montrer que E est totalement non 1-rectifiable.

Rque - On inclut le cas $\mathcal{H}^d(E) = 0$.



π_θ projection orthogonale sur la droite D_θ qui fait un angle θ avec l'horizontale

Supposons que E N'est PAS totalement non 1-rectifiable :

Soit $F \subset \mathbb{R}^2$ borélien 1-rectifiable tel que $\mathcal{H}^1(E \cap F) > 0$ (par def°)

pour tout ensemble F d-rectifiable, il existe un borélien B tel que $F \subset B$ et $\mathcal{H}^d(F) = \mathcal{H}^d(B)$

* $G = E \cap F$ 1-rectifiable (car $\subset F$ 1-rectifiable) et borélien

* $G \subset E \Rightarrow \pi_{\theta_i}(G) \subset \pi_{\theta_i}(E) \Rightarrow \mathcal{H}^1(\pi_{\theta_i}(G)) = 0$

Par le théorème de projections des ensembles rectifiables :

Il existe une droite $V \subset \mathbb{R}^2$ t.q. pour toutes droites $W \subset \mathbb{R}^2$ {droites vectorielles}

$$\underbrace{V \cap W^\perp = \{0\}}_{\Leftrightarrow\ V = W^\perp} \Rightarrow \mathcal{H}^1(\pi_W(G)) > 0$$

$\dim W^\perp = \dim V = 1$

$\Downarrow$

il existe au plus une unique droite $W = V^\perp$ telle que $\mathcal{H}^1(\pi_W(G)) > 0$

et on a deux droites D_{θ_1} et D_{θ_2} différentes : impossible.

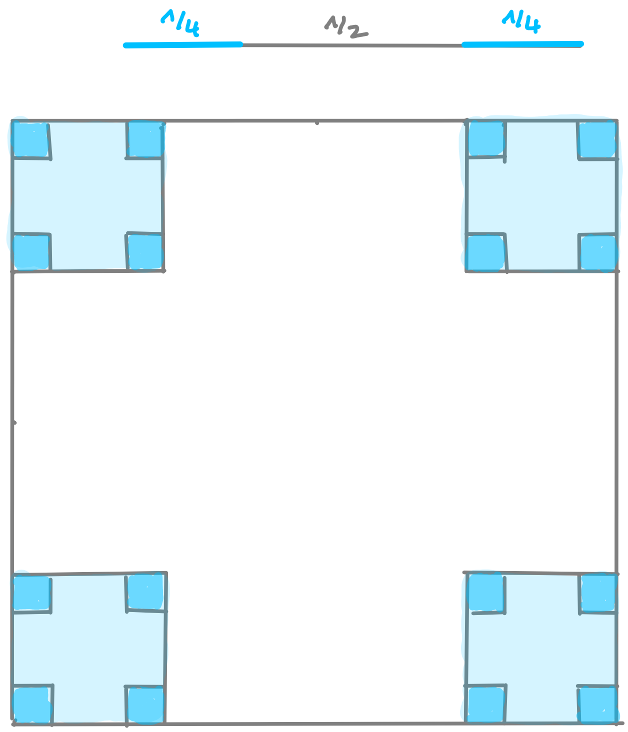
On conclut que E est totalement non 1-rectifiable (y compris $\mathcal{H}^d(E) = 0$)

2/ Soit $E = K \times K$ où K Cantor : $\lambda = \frac{1}{4}$ et $r_n = \lambda^n = 4^{-n}$

Montrer que

(i) E est totalement non 1-rectifiable

(ii) $0 < \mathcal{H}^1(E) < +\infty$



(i) Avec la question 1 : FACILE ! Regardons les projections de E sur l'horizontale (Ox) et la verticale (Oy) ($\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} \pi_{(Ox)}(E) = K & (= K \times \{0\}) \\ \pi_{(Oy)}(E) = K & (= \{0\} \times K) \end{cases}$$

d'où $\mathcal{H}^1(\pi_{(Ox)}(E)) = \mathcal{L}^1(K) = 0$ car cf exo TD4 :

$$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda^d = 1 \\ \text{pour } d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \mathcal{H}^{1/2}(K) < +\infty$$

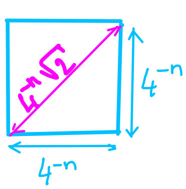
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H}^s(K) = 0 \quad \forall s > \frac{1}{2}$$

Ainsi $\mathcal{H}^1(\pi_{(Ox)}(E)) = \mathcal{H}^1(\pi_{(Oy)}(E)) = 0 \underset{\text{quest° 1-}}{\Rightarrow}$ E totalement non 1-rectifiable

(ii) • $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$, on reprend également la stratégie du TD4 (en plus rapide, on veut seulement $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$).

Soit $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $4^{-n}\sqrt{2} \leq \delta$



$\underset{4^{-n} \cdot \sqrt{2}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{diam}(C)}} \leq \delta$ pour C carré élémentaire de $K_n \times K_n$: $C = I \times J \in \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$

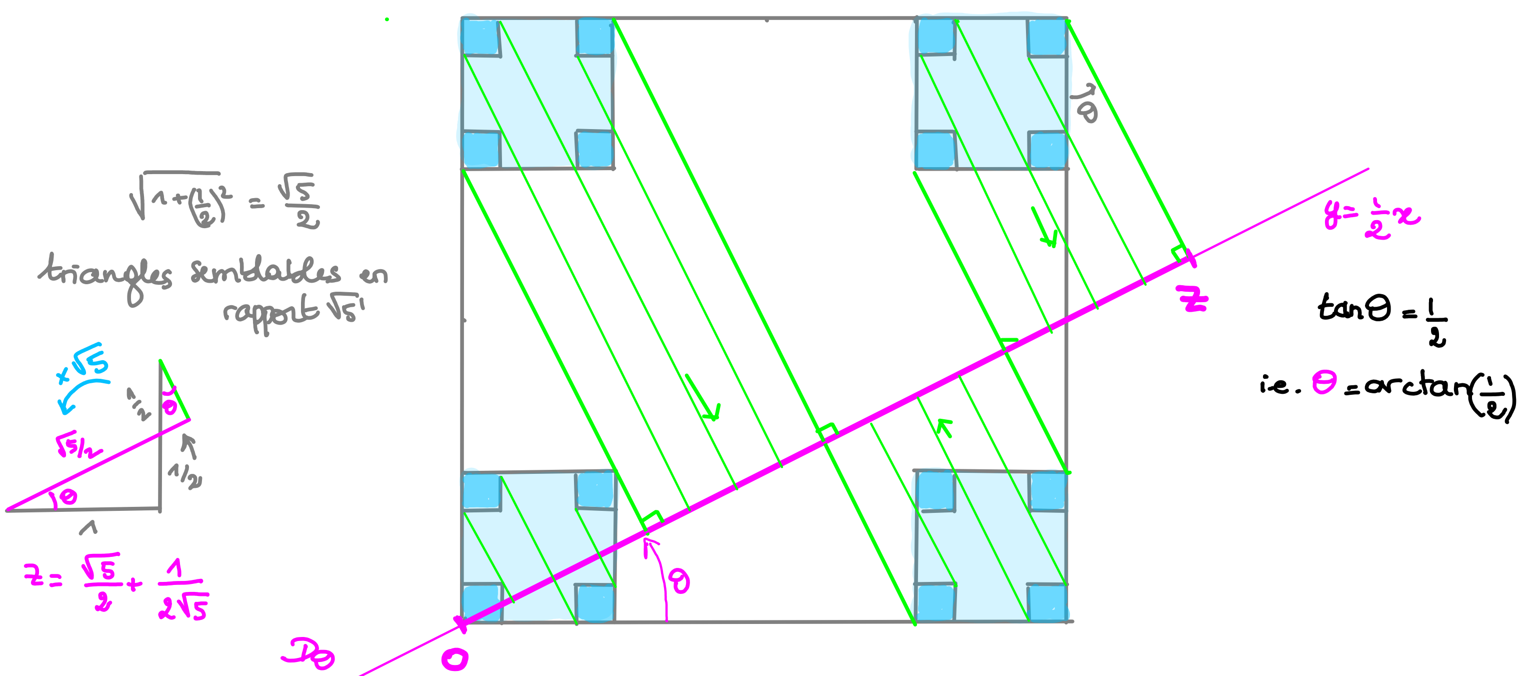
$K \times K \subset K_n \times K_n$ recouvert par 4^{-m} carrés élémentaires de diam $\leq \delta$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^1_\delta(K\times K) \leq \sum_{4^m \text{ carrés}} (4^{-n}\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}^1(K\times K) \leq \sqrt{2} < +\infty}$$

- $\mathcal{H}^1(E) > 0$. On pourrait reprendre la stratégie du TD4.

Ici on a une alternative curieuse...



- $\forall m \in \mathbb{N}$, $\pi_\theta(K_m \times K_m) = [0,z]$ $\supset$ qui nous intéresse

On en déduit que $\pi_\theta(E) = [0,z]$ $(*)$

<u>En effet</u>: $p \in \pi_\theta(K\times K) \iff p = \pi_\theta(x,y)$, $(x,y) \in K\times K$

$\iff p \in \pi_\theta(K_n, K_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \iff p \in [0,z]$

"$\Rightarrow$" puisque $(x,y) \in K_n \times K_n$

"$\Leftarrow$" si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (x_n,y_n) \in K_n \times K_n$, $p = \pi_\theta(x_n,y_n)$:

en particulier $(x_n,y_n) \in [0,1]^2$ compact et on extrait $(x_{n_\ell}, y_{n_\ell}) \xrightarrow[\ell\infty]{} (\bar{x},\bar{y})$.

pour $N \in \mathbb{N}$ donné, $n_\ell \geq N \Rightarrow (x_{n_\ell}, y_{n_\ell}) \in K_N \times K_N \underset{\ell\infty}{\Rightarrow} (\bar{x},\bar{y}) \in K_N \times K_N$

$(K_n \times K_n)$ décroissante $\qquad$ fermé $\qquad \underset{\forall N \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} (\bar{x},\bar{y}) \in K\times K$

finalement, π_θ continue donc

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $p = \pi_\theta(x_{n_\ell}, y_{n_\ell}) \underset{\ell\infty}{\Rightarrow} p = \pi_\theta(\bar{x},\bar{y})$

Grâce à $(*)$, $\underbrace{0 < \mathcal{H}^1([0,z])}_{=z} \leq \mathcal{H}^1(\pi_\theta(E)) \leq \mathcal{H}^1(E)$

[π_θ est 1-Lipschitz

3)_ $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble totalement non 1-rectifiable. On suppose E compact.

On définit $\boxed{L(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (a,b) \in E, y = ax+b\}}$

Montrer que $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$.

(i)_ On vérifie que $L(E)$ est mesurable $\rightarrow$ on veut ensuite le découper en tranches et appliquer FUBINI.

$$L(E) = \bigcup_{(a,b) \in E} \{\text{droite d'éq° } y = ax+b\} = \{(x, ax+b) : (a,b) \in E, \ x \in \mathbb{R}\}$$

Avec l'hypothèse de compacité : c'est facile, on montre que $L(E)$ est fermé : ($\Rightarrow$ mesurable).

Soit $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L(E)$ qui converge vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

On écrit $y_k = a_k x_k + b_k$ avec $(a_k, b_k) \in E$

Par compacité de E : on peut extraire $(a_{k_\ell}, b_{k_\ell}) \xrightarrow[\ell \infty]{} (\bar{a}, \bar{b}) \in E$

Et à la limite $\ell \to +\infty$:

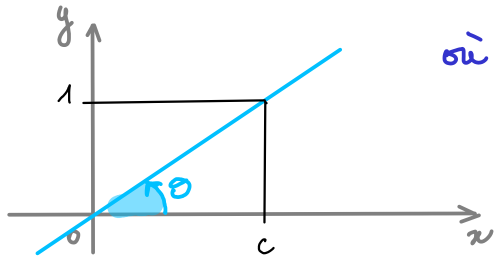
$$\bar{y} = \bar{a}\bar{x} + \bar{b} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in L(E)$$

(ii) Soit $c \in \mathbb{R}$, on considère la tranche verticale au-dessus de c :

$$F_c = L(E) \cap \{x = c\}$$

comme on regarde des ensembles $\subset$ une droite $\mathcal{L}^1 \leftrightarrow \mathcal{H}^1$.

BUT : Montrer que $\mathcal{H}^1(F_c) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(\pi_\theta(E)) = 0$



où π_θ est la projection orthogonale sur la droite qui fait un angle $\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arctan(\frac{1}{c}) \\ \text{ie} \\ c = \frac{1}{\tan\theta} \end{array} \right.$

avec l'axe des abscisses : vecteur directeur $\binom{c}{1}$

Si $c=0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

(mais on peut aussi prendre $c \neq 0$ on va $\int_{c \in \mathbb{R}}$ ou $\int_{c \in \mathbb{R}^*}$ pareil)

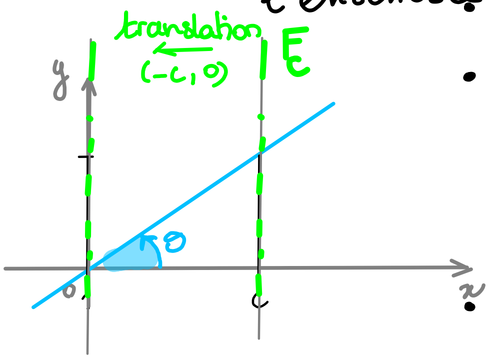
$$\pi_\theta(a,b) = \left(\binom{a}{b} \cdot u_\theta\right) u_\theta \quad \text{avec} \quad u_\theta = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \binom{c}{1}$$

{ u_θ vecteur unitaire dirige la droite bleue

On a $F_c = \{(c, ac+b) : (a,b) \in E\}$ et $ac+b = \binom{a}{b} \cdot \binom{c}{1}$

$$= \binom{a}{b} \cdot u_\theta \sqrt{c^2+1}$$

On rappelle que $\boxed{c \text{ est fixé}}$ ici : on considère plutot l'ensemble

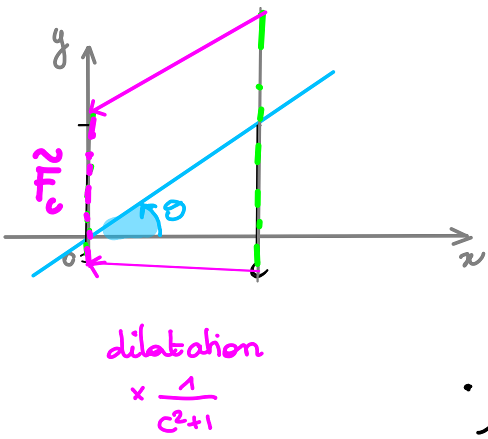


• translaté par $(-c,0)$:

$$\{(0, ac+b) : (a,b)\in E\}$$

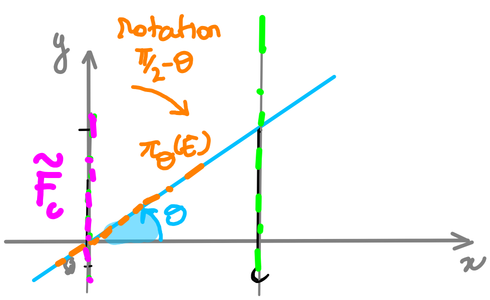
$$\mathcal{H}^1(\qquad " \qquad) = \mathcal{H}^1(F_c)$$

• dilaté par $\frac{1}{c^2+1}$:



$$\tilde{F}_c = \left\{\left(0, \frac{ac+b}{\sqrt{c^2+1}}\right) : (a,b)\in E\right\}$$
$$= \left\{\left(0, \binom{a}{b}\cdot u_\theta\right) : (a,b)\in E\right\}$$

et $\mathcal{H}^1$ est 1-homogène $\Rightarrow \mathcal{H}^1(F_c) = \sqrt{c^2+1}\ \mathcal{H}^1(\tilde{F}_c)$



• on peut alors ramener $\tilde{F}_c$ sur la droite bleue d'angle θ par une rotation (d'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$) R

↳ ne change pas la mesure

$$(0,y) \xrightarrow{R} (y\cos\theta, y\sin\theta) = y\,u_\theta$$

et donc

$$\left(0, \binom{a}{b}\cdot u_\theta\right) \longmapsto \pi_\theta(a,b) \quad : a,b\in E$$

$$\tilde{F}_c \xrightarrow{\sim R} \pi_\theta(E)$$

Finalement $\mathcal{H}^1(F_c) = \sqrt{c^2+1}\ \mathcal{H}^1(\tilde{F}_c) = \sqrt{c^2+1}\ \mathcal{H}^1(\pi_\theta(E))$

et on a bien $\boxed{\mathcal{H}^1(F_c) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(\pi_\theta(E)) = 0}$ $\quad \theta = \arctan(\frac{1}{c})$

iii) On applique le théorème de Besicovitch sur la mesure des projections d'un ensemble totalement non rectifiable.

$$\mathcal{L}^1\left(\left\{\theta \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[: \mathcal{H}^1(\pi_\theta(E)) > 0\right\}\right) = 0$$

$$\underset{c=\frac{1}{\tan\theta}}{\Rightarrow} \quad \mathcal{L}^1\left(\left\{c\in\mathbb{R}^* : \mathcal{H}^1(\pi_{\underset{\arctan\frac{1}{c}}{\underset{\shortparallel}{\theta}}}(E)) > 0\right\}\right) = 0$$

ok ici !

La fonction $\frac{1}{\tan}$ est C^1 donc localement Lipschitz $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$

et si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ Lipschitz, $d \leq m$

$\forall A \subset \mathbb{R}^n,\ \mathcal{H}^d(f(A)) \leq \mathrm{Lip}(f)^d \mathcal{H}^d(A)$

Dans le cas où f est localement Lipschitz : $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{(A\cap B(0,k))}_{A_k}$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}^d(f(A_k)) \leq \mathrm{Lip}(f)^d \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{H}^d(A)}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^d(f(A)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^d(f(A_k))^0 = 0$$

Ainsi, pour $\mathcal{L}^1$-p.t. $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^1(F_c) = 0$ (ii)

et comme $L(E)$ est mesurable : le théorème de Fubini donne

$$\mathcal{L}^2(L(E)) = \int_{c\in\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(F_c)\, \underset{d\mathcal{L}^1(c)}{\underset{\shortparallel}{dc}} = 0$$

41- Vérifier que $L(E)$ est un ensemble de Besicovitch:

$\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ et $L(E)$ contient un segment dans chaque direction

- On a déjà $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$.
- Si on reprend la définition de $L(E) = \bigcup_{(a,b)\in E} \{(x,y) : y = ax+b\}$

↑ droite de pente a

On cherche E tel que $\pi_0(E) = \mathbb{R}\times\{0\}$

$= \{(a,0) : \exists b_a,\ (a,b_a)\in E\}$

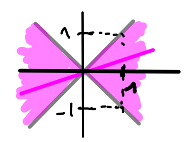
on peut aussi commencer avec $\pi_0(E) \supset [-1,1]\times\{0\}$: dans ce cas

$\forall a \in [-1,1],\ \exists b_a \in \mathbb{R}$ tq $(a,b_a) \in E$

$$L(E) \supset \bigcup_{(a,b_a)\in E} \{y = ax+b\}$$

$$\supset \bigcup_{a\in[-1,1]} \{y = ax+b_a\}$$

Toutes les directions

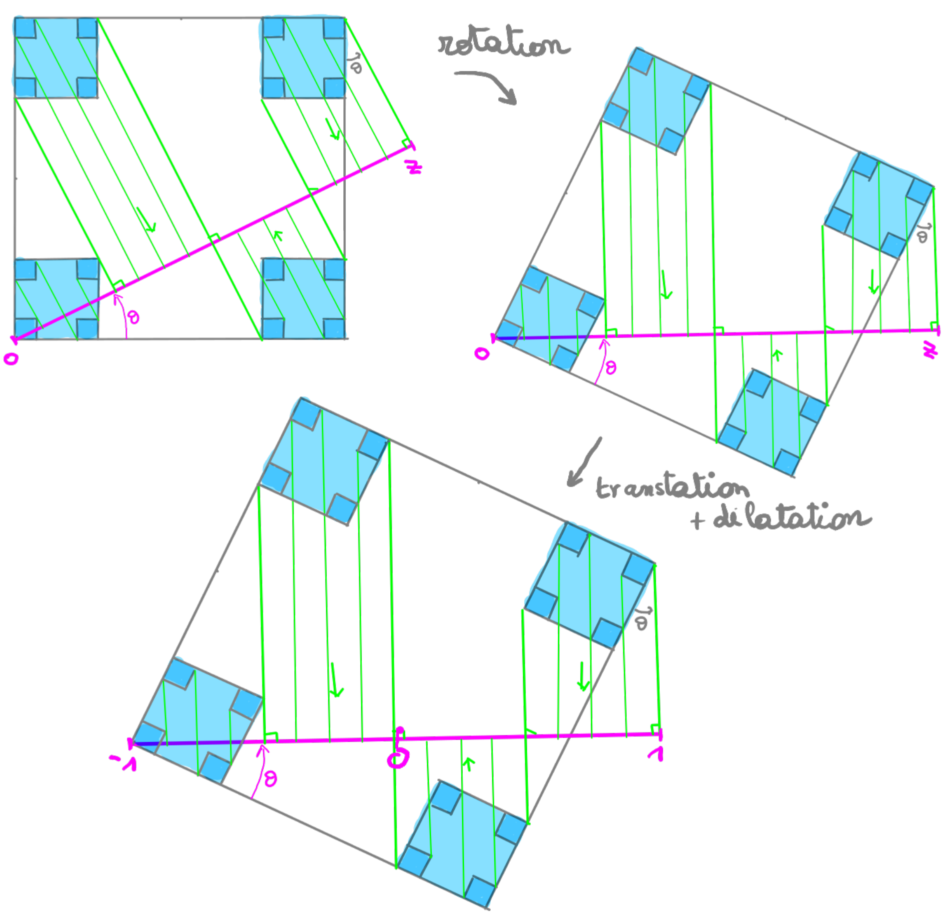


On récupère les directions manquantes par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$B = L(E) \cup R_{\frac{\pi}{2}}(L(E))$$

- On est ramené à trouver E compact totalement non 1-rectifiable tq. la projection sur l'horizontale est un segment
  ↑ après on translate et on dilate pour avoir $[-1,1]$.

On rappelle que le Cantor 4 coins C_4 se projette sur tout un segment sur la droite $y = \frac{1}{2}x$



Si on considère la similitude s qui ramène le segment $[0,z] \subset \mathbb{R}^2$ sur $[-1,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$

$E := s(C_4)$ convient !!