EXERCICE 1 -

On rappelle la définition de la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle $\mathcal{H}^d$ dans $\mathbb{R}^n$.

DEF - $E \subset \mathbb{R}^n$

- Pour $\delta > 0$, $\mathcal{H}^d_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} \operatorname{diam}(E_i)^d \ : \ \operatorname{diam} E_i \leq \delta \text{ et } \{E_i\}_{i \in I} \text{ est un recouvrement au plus dnb. de } E \right\}$

  $\Updownarrow$ I fini ou dnb et $E \subset \bigcup_{i \in I} E_i$

- $\mathcal{H}^d(E) := \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^d_\delta(E) = \sup_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^d_\delta(E)$ puisque $\delta \mapsto \mathcal{H}^d_\delta(E) \searrow$

Application de la méthode de Carathéodory pour construire des mesures extérieures.

$\mathcal{H}^d$ mesure borélienne et pas Radon.

Rque Avec cette définition $\mathcal{H}^n = \frac{2^n}{\omega_n} \mathcal{L}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

DEF - Densités ~~inférieures~~/supérieures

Soit μ mesure de Radon (≥ 0) dans $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Theta^*_d(\mu, x) = \limsup_{r \to 0_+} \frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^d}$$

BUT - Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien et $0 < t < +\infty$.

- $\Theta^*_d(\mu, x) \geq t \quad \forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \geq t \mathcal{H}^d(A)$ (i)
- $\Theta^*_d(\mu, x) \leq t \quad \forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq t \mathcal{H}^d(A)$. (ii)

PREUVE de (i) : On veut transmettre une propriété locale sur les boules à tout un ensemble

$\hookrightarrow$ Lemme de recouvrement : plus précisément,

on veut majorer $\mathcal{H}^d_\delta(A)$ (puis $\mathcal{H}^d(A)$)

on cherche un recouvrement qui va bien pour contrôler $\mathcal{H}^d_\delta(A) = \inf \{ \cdots : \text{recouvrements de } A \}$.

Soit $0<\delta<1$ (le "δ" de la pré-mesure de Hausdorff)

On se donne également $0<\eta<1$ (→ traduire la "limsup" en inégalité)

et on considère la famille

$$\mathcal{F}^1_{\eta,\delta} = \left\{ B = B(x,r) : x \in A \ , \ \operatorname{diam} B = 2r \leq \delta \ \text{ et } \ \frac{\mu(B)}{(2r)^d} \geq (1-\eta)t \right\}$$

- $\mathcal{F}^1_{\eta,\delta}$ est un "recouvrement de Vitali" centré sur A

  $\forall x \in A, \ \inf\{ r>0 : B(x,r) \in \mathcal{F}^1_{\eta,\delta} \} = 0$

  la famille contient des boules de rayon arbitrairement petit centrées en x ($\forall x \in A$)

En effet, pour $x \in A$:

$$\Theta^*_d(\mu,x) = \limsup_{r\to 0_+} \frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^d} \geq t$$

$\Rightarrow$ il existe $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $r_i \xrightarrow[\infty]{} 0$, $\forall i$, $2r_i \leq \delta$ et

qui réalise la limsup

$$\frac{\mu(B(x,r_i))}{(2r_i)^d} \geq (1-\eta)t$$

à partir d'un certain rang et on commence à ce rang.

C'est exactement ce qu'on voulait.

- On peut supposer $\mu(A) < +\infty$ (sinon : rien à montrer).

Soit $\varepsilon > 0$ (oui, encore un paramètre ...) par régularité extérieure de μ, soit $\mathcal{U} \supset A$ ouvert t.q

dépend de $\varepsilon > 0$

$$\mu(\mathcal{U}) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

- On veut appliquer le théorème de Besicovitch à $\mathcal{H}^d(A)$, on doit d'abord s'assurer que $\boxed{\mathcal{H}^d(A) < +\infty}$ ($\Rightarrow \mathcal{H}^d_{|A}$ Radon)

Pour cela on va appliquer le Lemme de Besicovitch à la famille

$$\mathcal{F}^1_{\delta,\eta} \cap \{ B : B \subset \mathcal{U} \}$$ et on peut fixer $\eta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$ ici par exemple.

$\underset{\text{Lemme Besicovitch}}{\Rightarrow}$ Il existe ξ_m familles dnb $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{\xi_m}$ de boules de $\mathcal{F}_{\delta,\frac{1}{2}}$

On a bien une boule $B(x,r_x)$ centrée en chaque $x \in A$ et $\sup_x r_x \leq \delta < +\infty$

- 2 à 2 disjointes dans chaque famille
- $A \subset \bigcup_{k=1}^{\xi_m} \bigsqcup_{B \in \mathcal{G}_k} B$

Rque : ζ_m contrôle le nombre max d'overlap entre les boules en tout point.

Le recouvrement de A par $\{B\}_{B\in\mathcal{G}_1\ldots\mathcal{G}_{\zeta_m}}$ est le "bon recouvrement" qu'on peut utiliser dans la définition de $\mathcal{H}^d_\delta(A)$:

$$\mathcal{H}^d_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\zeta_m} \sum_{B\in\mathcal{G}_k} \underbrace{(\operatorname{diam} B)^d}_{\leq \frac{\mu(B)}{t/2}}$$

$\eta = \frac{1}{2}$

$$\leq \frac{2}{t} \sum_{k=1}^{\zeta_m} \sum_{B\in\mathcal{G}_k} \mu(B)$$

$$= \frac{2}{t} \sum_{k=1}^{\zeta_m} \mu\Big(\bigsqcup_{B\in\mathcal{G}_k} B\Big)$$

comme au TD1, on a besoin de contrôler les boules pour revenir à $\mu(A)$ en utilisant des boules dans un ouvert $\mathcal{U}$ proche de A

$$\leq \frac{2}{t}\zeta_m\,\mu(\mathcal{U})$$

$$\leq \frac{2}{t}\zeta_m(\mu(A)+1)$$

d'où $\mathcal{H}^d_\delta(A) \leq \frac{2}{t}\zeta_m(\mu(A)+1)$

$$\underset{\delta\to 0_+}{\Rightarrow}\quad \boxed{\mathcal{H}^d(A) \leq \frac{2}{t}\zeta_m(\mu(A)+1) < +\infty .}$$

- Maintenant qu'on a vérifier que $\mathcal{H}^d(A) < +\infty$, on peut appliquer le théorème de Besicovitch à la même famille :

$$\mathcal{F}'_{\delta,\eta} \cap \{B : B\subset\mathcal{U}\} \qquad \Big(0<\eta<1 \text{ et } \underset{(\hookrightarrow \mathcal{U})}{\varepsilon>0} \text{ libres cette fois}\Big)$$

On a vu que $\mathcal{F}'_{\delta,\eta}$ est un "recouvrement de Vitali centré sur A"

et c'est toujours vrai en demandant $B\subset\mathcal{U}$ en plus car $A\subset\mathcal{U}$ ouvert donc les boules de $\mathcal{F}'_{\delta,\eta}$ vérifient $B\subset\mathcal{U}$ à partir d'un rayon assez petit

$\Rightarrow$ Thm de Besicovitch : Il existe une famille dnb $\mathcal{G}\subset \mathcal{F}'_{\delta,\eta}\cap\{B : B\subset\mathcal{U}\}$ de boules 2 à 2 disjointes t.q.

$$\mathcal{H}^d|_A\Big(A - A\cap \bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^d_\delta\Big(A - A\cap \bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big) = 0 \quad \text{car} \quad \mathcal{H}^d_\delta(E) \leq \mathcal{H}^d(E) \Big(= \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^d_\delta(E)\Big)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^d_\delta$ est (dnb^t) sous-additive par déf°

"$A \subset B \cup C \Rightarrow$ un recouvr^t pour B + un recouvr^t pour C $\to$ recouvrement pour A"

NON

$\Rightarrow \inf\{\dots : \text{recouvr}^t\ A\}$ $\leqslant$ $\inf\{\dots : \text{recouvr}^t\ B + \text{recouvr}^t\ C\}$

$$\mathcal{H}^d_\delta(A) \leqslant \mathcal{H}^d_\delta\Big(A\cap \bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big) + \underbrace{\mathcal{H}^d_\delta\Big(A - A\cap\bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big)}_{=0}$$

$$\leqslant \mathcal{H}^d_\delta\Big(\bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big)$$

$$\leqslant \sum_{B\in\mathcal{G}} (\operatorname{diam} B)^d \quad \text{puisque } \forall B\in\mathcal{G},\ \operatorname{diam} B \leq \delta$$

$\{B\}_{B\in\mathcal{G}}$ se recouvre lui-m̂

$$\leqslant \sum_{B\in\mathcal{G}} \frac{1}{t(1-\eta)}\mu(B) \quad \Big\{ \mu\Big(\bigsqcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{t(1-\eta)} \mu(\mathcal{U})$$

$$\Rightarrow \Big\| \ \mathcal{H}^d_\delta(A) \leqslant \frac{1}{t(1-\eta)}\big(\mu(A) + \varepsilon\big)$$

et il reste à passer à la limite $\delta, \eta, \varepsilon \longrightarrow 0_+$ (indep).

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}^d(A) \leq \frac{1}{t}\mu(A)}$$

constante déf°

PREUVE de (ii) $\quad \Big(\forall x\in A,\ \Theta^*_d(\mu,x) \leq t\Big) \Rightarrow \mu(A) \leq t\,\mathcal{H}^d(A)$

Cette fois-ci on cherche à minorer $\mathcal{H}^d$ et donc $\mathcal{H}^d_\delta$:

on veut une minoration valide pour tous les recouvrements admissibles

↳ on fixe un recouvrement qui réalise (presque) l'inf dans la déf° de $\mathcal{H}^d_\delta$ et on minore

• Idée : Prendre un "δ-recouvrement" $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A tq

$\uparrow$ $\mathrm{diam}\, C_i \leq \delta$

$$\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, C_i)^d \leq H^d_\delta(A)}_{\approx} + \varepsilon$$

$\{C_i\}$ réalise l'inf à ε près.

Mettre chaque C_i dans une boule $B(x_i, \mathrm{diam}\, C_i)$
$\uparrow \in A\cap C_i$

Utiliser l'hypothèse sur $\Theta^{*}_{d}(\mu, x_i)$ pour dire que $\leq (t+\eta)\ldots$

$$\mu(B(x_i, \mathrm{diam}\, C_i)) \lesssim t\,.(\mathrm{diam}\, C_i)^d$$

dès que $\mathrm{diam}\, C_i$ assez petit.

• Problème : dépend du point x ! et on sait seulement que $\mathrm{diam}\, C_i \leq \delta$ avec δ uniforme / x.

• Solution : gagner de l'uniformité en théorie de la mesure : (voir Egorov – Lusin – Glivenko-Cantelli ...)

• Soit $\eta > 0$ (petite marge traduit la limsup $\leq$ en $\leq$ à η près).

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $A_k = \{x\in A : \mu(B(x,r)) \leq (t+\eta)(2r)^d \quad \forall r\in\,]0, \frac{1}{k}]\}$

* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k = A$: soit $x\in A$, par hypothèse ;
 $\subset$ ok

$$\limsup_{r\to 0_+} \frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^d} \leq t \Rightarrow \exists r_0 > 0, \forall r \leq r_0, \frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^d} \leq t+\eta$$

$\uparrow$ dépend de η et $\underline{\underline{x}}$

Il suffit de montrer $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, \quad \mu(A_k) \leq 2^d(t+\eta)\, H^d(A_k)}$ $(*)$

$$\underset{(A_k)\nearrow_{k\infty} A}{\Longrightarrow} \quad \mu(A) \leq 2^d(t+\eta)\, H^d(A)$$

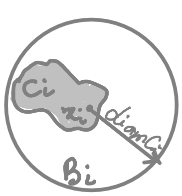
et on conclut avec $\eta \to 0_+$

→ Il reste donc à montrer $(*)$. On fixe $k\in\mathbb{N}^*$

• Soit $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$. (on pourrait directement prendre $\delta = \frac{1}{k}$ p.ex).

Par définition de $H^d_\delta(A_k)$, soit $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ δ-recouvrement de A_k tel que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, C_i)^d \leq H^d_\delta(A_k) + \varepsilon \quad (**)$$



On peut supposer $A_k \cap C_i \neq \emptyset$ sinon on enlève C_i du recouvrement.

Soit $x_i \in A_k\cap C_i$ et $B_i := B(x_i, \mathrm{diam}\, C_i) \supset C_i$

Comme $x_i \in A_k$ et $\operatorname{diam} C_i \leq \delta$ on a pour tout $\delta \leq \frac{1}{k}$:

$$\mu(B_i) \leq (t+\eta)(\operatorname{diam} B_i)^d \leq 2^d (t+\eta)(\operatorname{diam} C_i)^d$$

on injecte dans (**)

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq 2^d (t+\eta)\left(\mathcal{H}^d_\delta(A_k) + \varepsilon\right)$$

et d'autre part

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \geq \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big) \underset{B_i \supset C_i}{\geq} \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\Big) \underset{\{C_i\}_i \text{ recouvre } A_k}{\geq} \mu(A_k)$$

On combine :

$$\mu(A_k) \leq 2^d (t+\eta)\left(\mathcal{H}^d_\delta(A_k) + \varepsilon\right)$$

$\downarrow \delta \to 0$ $\quad \downarrow \varepsilon \to 0$

[$\delta \to 0$ ou bien $\mathcal{H}^d_\delta(A_k) \leq \mathcal{H}^d(A_k)$]

$$\Rightarrow \mu(A_k) \leq 2^d (t+\eta)\, \mathcal{H}^d(A_k) \quad \text{i.e } (*)$$

$\blacksquare$

EXERCICE 2 - Construction de Cantor.

On fixe $0 < \lambda < \lambda' < \frac{1}{2}$.

BUT - Construire un compact $K \subset [0,1]$ tel que

- $0 < \mathcal{H}^d(K) < +\infty$ où d t.q. $\lambda^d = \frac{1}{2}$ i.e. $d = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}$

  $\Leftrightarrow d \log \lambda = -\log 2$

- $\forall x \in K,\ \Theta^d_*(K,x) = \liminf_{r \to 0_+} \frac{\mathcal{H}^d(K \cap B(x,r))}{(2r)^d} = 0$

1- On cherche une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq. $r_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (1) $\begin{cases} r_{n+1} \leq \lambda' r_n \\ r_n \geq \lambda^n \end{cases}$

ET $\exists$ une ss-suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tq

$$\lim_{j\infty} \frac{r_{n_j}}{\lambda^{n_j}} = 1 \quad (2) \quad \text{et} \quad \lim_{j\infty} \frac{r_{n_j}}{r_{n_j - 1}} = 0 \quad (3)$$

Entre n_{j-1} et n_j : saut

Indication : travailler avec $\boxed{a_n = \ln(\lambda^{-n} r_n)}$

On traduit les conditions requises sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_{n+1}}{\lambda^{n+1}} \leq \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{r_n}{\lambda^n} \\ \frac{r_n}{\lambda^n} \geq 1 \end{cases} \underset{\exp\nearrow}{\overset{\ln\nearrow}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} a_{n+1} \leq a_n + \overbrace{\ln(\lambda'/\lambda)}^{\alpha > 0} \\ a_n \geq 0 \end{cases}$$

suite ≥ 0 et croissance au plus linéaire : $a_{n+p} - a_n \leq \alpha p$

$$(2) \Leftrightarrow \lim_{j\infty} a_{n_j} = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \lim_{j\infty} \underbrace{\frac{r_{n_j}}{\lambda^{n_j}}}_{e^{a_{n_j}}} \cdot \underbrace{\frac{\lambda^{n_j - 1}}{r_{n_j - 1}}}_{e^{-a_{n_j-1}}} \cdot \cancel{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lim_{j\infty} e^{-(a_{n_j-1} - a_{n_j})} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{j\infty} a_{n_j - 1} - a_{n_j} = +\infty$$

On essaie avec (2) $a_{n_j} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

et alors (3) $\Leftrightarrow a_{n_j - 1} \xrightarrow[j\infty]{} +\infty$: or avec un écart $p = n_j - 1 - n_{j-1}$

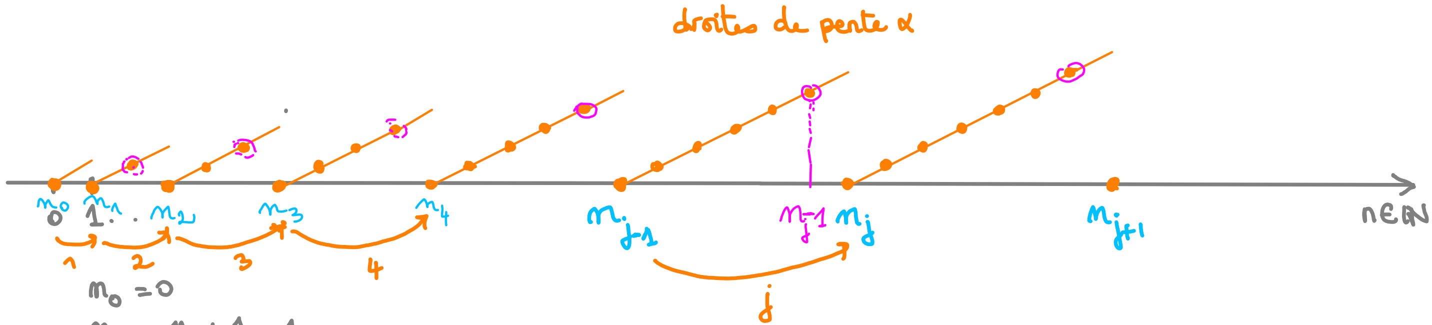
on demande au plus $a_{n_j - 1} - 0 \leq \alpha p$

en particulier, l'écart entre de indices successifs n_{j-1} et n_j dans la sous-suite doit $\xrightarrow[j\infty]{} +\infty$

on essaie avec $n_j = n_{j-1} + j$ et $n_0 = 0$ p. ex

et entre $a_{n_{j-1}} = 0$ et $a_{n_j} = 0$ on croit linéairement avec coeff α (on sature inégalité (1))

$$a_{n_{j-1}+p} = \alpha p \quad \text{pour} \quad p = 0, \dots, \underbrace{j-1}_{n_j = n_{j-1} + j}$$



$n_0 = 0$

$n_1 = n_0 + 1 = 1$

$n_2 = n_1 + 2 = 3$

$n_3 = n_2 + 3 = 6$

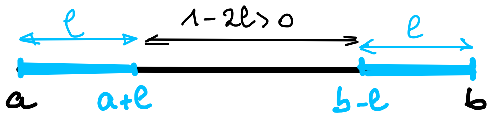
Et on vérifie que la suite $\begin{cases} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \end{cases}$ ainsi définie convient.

On va utiliser la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour construire un Cantor K t.q. à l'itération n on a 2^n segments chacun de longueur r_n.

2/ Définition d'un ensemble de Cantor :

- Étant donné $0 < \ell < \frac{1}{2}$ et un segment $[a,b]$, on définit

$$\mathcal{C}([a,b],\ell) = \{[a, a+\ell], [b-\ell, b]\}$$



$\mathcal{C}([a,b],\ell)$

- Partant de $K_0 = [0,1]$, on définit la suite décroissante de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : (récurrence pour définir la famille d'intervalles $\mathcal{C}_n$)

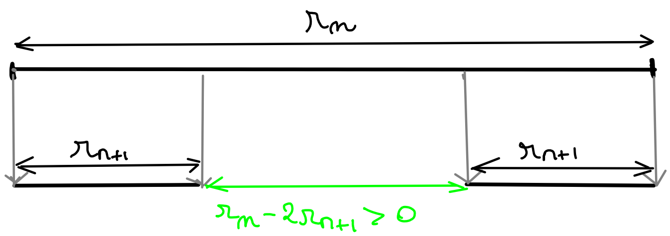
$\mathcal{C}_0 = \{[0,1]\}$ — 1 intervalle

$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{I\in\mathcal{C}_n} \mathcal{C}(I, r_{n+1})$ — 2^{n+1} intervalles

et on peut définir $K_n = \bigcup_{I\in\mathcal{C}_n} I$

Pour le "Cantor tri-adique" $r_n = 3^{-n}$

$I_{n,k}$ ($k\in\{0,1,\dots,2^n-1\}$) $\to$ $I_{n+1,2k}$, $I_{n+1,2k+1}$



$I \in \mathcal{C}_n$, $|I| = r_n$

$\downarrow$

deux intervalles $\in \mathcal{C}_{n+1}$ de longueur r_{n+1}

- Finalement $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ compact (non vide)

Intersection ↘ compacts.

(?) Construction d'une mesure de probabilité μ (sur $[0,1]$, supp $\mu \subset K$) sur K telle que

$\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall I\in\mathcal{C}_n$, $\boxed{\mu(I) = 2^{-n}}$

- On peut définir μ_n sur K_n par $\mu_n = c_n \mathcal{L}^1_{|K_n}$

et on choisit c_n tel que $\mu_n([0,1]) = 1$ i.e. $c_n \underbrace{\mathcal{L}^1(K_n)}_{= 2^n r_n} = 1$

2^n intervalles de longueur r_n

$\Rightarrow c_n = \dfrac{2^{-n}}{r_n}$.

On a par définition de μ_n : $\forall I\in\mathcal{C}_n$: * $\mu_n(I) = 2^{-n}$

* $\forall p\geq n$, $\mu_p(I) = \mu_p(I\cap K_p) = 2^{p-n}\, \mu_p(J) = 2^{-n}$ (2^{p-n} segments de $\mathcal{C}_p$ (disjoints) ; $\mu_p(J) = 2^{-p}$)

• On a une suite de mesures de proba sur $[0,1]$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n([0,1]) = 1 < +\infty$$

$\underset{\text{Banach-Alaoglu}}{\Rightarrow}$ quitte à extraire $\mu_n \xrightarrow[n\infty]{*} \mu$

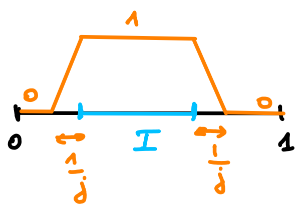
ie $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c([0,1])$, $\int \varphi \, d\mu_n \xrightarrow[n\infty]{} \int \varphi \, d\mu$

$[0,1]$ compact $\mathcal{C}_c([0,1]) = \mathcal{C}([0,1]) = \mathcal{C}_b([0,1])$

avec $\varphi \equiv 1 \in \mathcal{C}([0,1])$: $\mu([0,1])$ mesure de probabilité

• Soit $I \subset [0,1]$ segment

$\mu(I) = \lim_{j\infty} \int \varphi_j \, d\mu$ où $\varphi_j \in \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi_j \xrightarrow[j\infty]{} \mathbb{1}_I$



et $\int \varphi_j \, d\mu_n \geq \mu_n(I) \Rightarrow \limsup_{n\infty} \mu_n(I) \leq \underbrace{\limsup_{n\infty}}_{\lim_{n\infty}} \int \varphi_j \, d\mu_n = \int \varphi_j \, d\mu$

vraie limite ici car $\varphi_j \in \mathcal{C}([0,1])$

Attention : Il faut $I \subset I_j$ ouvert

$\int \varphi_j d\mu \leq \mu(I_j)$

$\lim_{j\infty} \mu(I_j) = \mu(\bigcap I_j) = \mu(I)$

À gauche c'est indép. de j et on prend la $\lim_{j\infty}$ à droite :

$$\mu(I) \geq \limsup_{n\infty} \mu_n(I)$$

Rque : Pté générale : $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ alors $\mu(U) \leq \liminf_{n\infty} \mu_n(U)$ U ouvert

$\mu(K) \geq \limsup_{n\infty} \mu_n(K)$ K compact

• En particulier, pour $I \in \mathcal{C}_p$: $\mu(I) \geq \limsup_{n\infty} \underbrace{\mu_n(I)}_{= 2^{-p} \text{ pour } n \geq p}$

donc $\mu(I) \geq 2^{-p}$ et de plus $\sum_{I \in \mathcal{C}_p} \underbrace{\mu(I)}_{\geq 2^{-p}} = \mu(\bigsqcup_{I \in \mathcal{C}_p} I) \leq \mu([0,1]) = 1$

2^p termes

$1 = 2^p \cdot 2^{-p}$

c'est forcément "=" $\Rightarrow \boxed{\mu(I) = 2^{-p}}$

• Rque : $\operatorname{supp} \mu \subset K$: $\operatorname{supp} \mu = \bigcap \{$tous les fermés de mesure pleine$\}$ ($\mu = 1$)

$1 = \sum 2^{-p} = \sum_{I \in \mathcal{C}_p} \mu(I) = \mu(K_p) = 1 \rightsquigarrow \subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}} K_p = K$

3/ BUT : les mesures μ et $\mathcal{H}^d_{|K}$ sont équivalentes

3a/ Un petit lemme technique.

- $I \subset [0,1]$ intervalle
- $\mathring{I} \cap K \neq \emptyset$

ALORS il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q.

- $I_{m,k} \in \mathcal{C}_m$
- 4 intervalles consécutifs $I_{m,k_1}, I_{m,k_2}, I_{m,k_3}, I_{m,k_4} \in \mathcal{C}_m$ — l'un d'entre eux est $I_{m,k}$

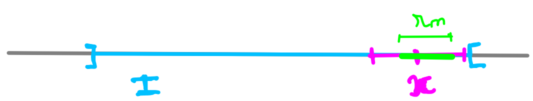
$$I_{m,k} \subset I \cap K \subset I_{m,k_1} \cup I_{m,k_2} \cup I_{m,k_3} \cup I_{m,k_4}$$

- **Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $I_{n,k} \in \mathcal{C}_m$ tq. $I_{m,k} \subset I \cap K$**

$I \cap K \neq \emptyset$: soit $x \in I \cap K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (I \cap K_n)$ — x est dans un segment de $\mathcal{C}_m$ pour chaque génération m

Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $I_{m,k_m} \in \mathcal{C}_m$ contenant x.

On a $|I_{m,k_m}| = r_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$, $x \in \mathring{I}$ ouvert $\Big\} \Rightarrow$ À partir d'un certain rang : $I_{m,k_m} \subset \mathring{I} \subset I$



- **On choisit $I_{m,k}$ le plus grand possible :**

$$m_0 = \min\{n \in \mathbb{N} ; \exists J \in \mathcal{C}_m , J \subset I\}$$

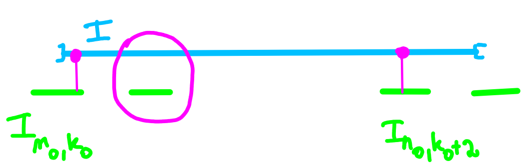
($J = I_{m,k_m}$) — Prendre plutôt $\mathbb{N}$ à cause de la suite extraite n_j (n_0)

← non vide par ce qu'on vient de dire.

On considère tous les segments de $\mathcal{C}_{m_0}$ qui intersectent I et comme I intervalle (connexe) → ces segments sont consécutifs :

$$\{J \in \mathcal{C}_{m_0} : J \cap I \neq \emptyset\} = \{I_{m_0,k_0} ; I_{m_0,k_0+1} ; \dots ; I_{m_0,k_0+p}\}$$

← $p+1$ segments

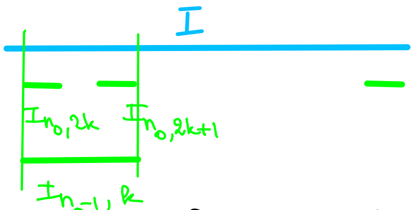


→ I les contient tous sauf peut-être le premier I_{n_0,k_0} et le dernier I_{n_0,k_0+p}

$$\Rightarrow I_{m_0,k_0+1} \cup \dots \cup I_{n_0,k_0+p-1} \subset I$$

• Si on avait $p \geq 5$ segments de $\mathcal{C}_{m_0}$ qui intersectent I :

⇒ I contient 3 (au moins) intervalles consécutifs de $\mathcal{C}_{m_0}$ et donc deux d'entre eux proviennent du même intervalle parent de $\mathcal{C}_{m_0-1}$



[Exemple : $\underbrace{I_{m_0,4} \cup I_{m_0,5}}_{\text{pair}} \cup I_{m_0,6} \subset I$

⇒ $I_{m_0-1,2} \subset I$]

⇒ I contient un segment de $\mathcal{C}_{m_0-1}$

contredit la minimalité de m_0.

On a ainsi $\underbrace{I\cap K \subset I \cap K_{n_0}}_{\text{décroissance de } (K_n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset$ $p \leq 4$ segments consécutifs de $\mathcal{C}_{n_0}$

• Si de plus I est centré en un point de K : $I=[x-r, x+r]$ pour $x\in K$ alors :

$r_m \leq |I| = 2r$ et $r < r_{m-1}$ corriger] [→ [ ] ds I

On reprend les notations ci-dessus :

• I contient un segment $I_{n_0,k}\in \mathcal{C}_{n_0}$ ⇒ $|I_{n_0,k}| \leq |I|$ ⇒ $\boxed{r_{m_0} \leq 2r}$

VÉRIFIER UTILITÉ.

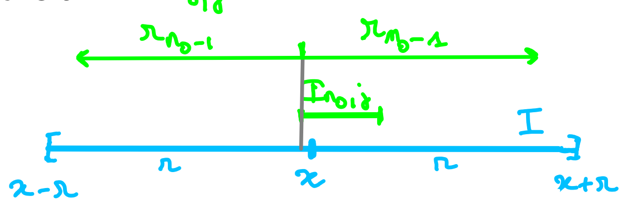
• Par ailleurs,

$$I\cap K \subset I_{m_0,k_0}\cup I_{n_0,k_0+1} \cup I_{n_0,k_0+2}\cup I_{n_0,k_0+3}$$

et $x\in I\cap K$ ⇒ $x \in$ l'un d'eux "$I_{n_0,j}$"

Si on avait $r_{n_0-1}\leq r$

⇒ $[x-r_{n_0-1}, x+r_{n_0-1}] \subset I$



⇒ I contient l'intervalle parent de $I_{m_0,j}$ de longueur r_{m_0-1}

contredit à nouveau la minimalité de m_0.

⇒ $\boxed{r_{n_0-1} > r}$

36/ – Mq. $\forall n,k$, $\mathcal{H}^d(K\cap I_{n,k}) \leq \mu(I_{n,k})$ et en particulier $\mathcal{H}^d(K) < +\infty$

On rappelle que $0<d<1$ tq $2\gamma^d = 1$ ou encore $2 = \gamma^{-d}$

On fixe $\bar n \in\mathbb{N}$ et $\bar k \in \{0,1,\dots,2^{\bar n}-1\}$ ⇝ (?) $\mathcal{H}^d(K\cap I_{\bar n,\bar k}) \leq 2^d \mu(I_{\bar n,\bar k})$

• Soit $\delta > 0$, on cherche un "bon" δ-recouvrement pour estimer

$$\mathcal{H}^d_\delta(K \cap I_{\bar{n},\bar{k}})$$

On va choisir comme pièces du recouvrement des segments de $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$

et plus précisément, comme on veut "$\operatorname{diam} C_i \leq \delta$"

pour $J \in \mathcal{C}_n$, $|J| = r_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

on fixe $N \geq \bar{n}$ tel que $\forall n \geq N,\ r_n \leq \delta$.

• Soit $n \geq N$. Par construction, on peut recouvrir $I_{\bar{n},\bar{k}} \cap K$ ($\subset K_n$) par $I_{\bar{n},\bar{k}} \cap K_n$ constitué de $2^p = 2^{n-\bar{n}}$ segments de $\mathcal{C}_n$ ($n = \bar{n}+p$)

$\hookrightarrow$ 2 segments de $\mathcal{C}_{\bar{n}+1}$: $I_{\bar{n}+1,2\bar{k}}$ et $I_{\bar{n}+1,2\bar{k}+1}$ $(p=1)$

$\to$ 2.2 segments de $\mathcal{C}_{\bar{n}+2}$

$\vdots$

$\to$ 2^p segments de $\mathcal{C}_{\bar{n}+p}$

$2^{n-\bar{n}}$ segments de longueur $r_n \leq \delta$

"bon recouvrement"

$$\mathcal{H}^d_\delta(I_{\bar{n},\bar{k}} \cap K) \leq 2^{n-\bar{n}} \times (r_n)^d$$

nb de segments dans le recouvrement

diam = longueur de chaque segment

$$= \mu(I_{\bar{n},\bar{k}}) \times 2^n (r_n)^d$$

$2^{-\bar{n}} = \mu(I_{\bar{n},\bar{k}})$

• Il reste à contrôler $2^n (r_n)^d$ sachant qu'on peut choisir n'importe quel $n \geq N \leftrightarrow r_n \leq \delta$

$\underbrace{2^n (r_n)^d}_{}$ $\quad 2 = \lambda^{-d}$

$$(\lambda^{-n} r_n)^d$$

on a $\lambda^{-n} r_n \geq 1$ ok bof

$\forall j \in \mathbb{N},\ \lambda^{-n_j} r_{n_j} \xrightarrow[j\infty]{} 1$

On peut conclure : soit $j_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_{j_0} \geq N \Rightarrow \forall j \geq j_0 : (n_j \geq N)$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^d_\delta(I_{\bar{n},\bar{k}} \cap K) \leq \mu(I_{\bar{n},\bar{k}}) \times \underline{(\lambda^{-n_j} r_{n_j})^d} \xrightarrow[j\infty]{} 1$$

(sup)

Ainsi $\mathcal{H}^d(I_{\bar n,\bar k}\cap K) = \lim_{\delta\to 0_+} \mathcal{H}^d_\delta(I_{\bar n,\bar k}\cap K) \leq \mu(I_{\bar n,\bar k})$

indép. de δ

En particulier, $\mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d(\underbrace{I_{0,0}}_{[0,1]}\cap K) \leq \mu([0,1]) = 1 < +\infty$

3c/- Montrer que $\mu \leq C\mathcal{H}^d_{|K}$ (en utilisant l'exo 1) et en particulier $\mathcal{H}^d(K) > 0$.

- Utiliser l'exo 1 : estimer (majorer) $\Theta^*_d(\mu,x) \leq t$ unift, $x\in K$

$\overset{\Rightarrow}{\text{exo 1}}$ $\forall B\subset[0,1]$ borélien, $\Theta^*_d(\mu,x)\leq t : \forall x\in B\cap K$

$\Rightarrow \mu(B) \leq 2^d t\, \mathcal{H}^d(B\cap K)$

$\Rightarrow \mu \leq \underbrace{2^d t}_{C} \mathcal{H}^d_{|K}$

- Soit $x\in K$, $\Theta^*_d(\mu,x) = \limsup_{r\to 0_+} \dfrac{\mu([x-r,x+r])}{(2r)^d}$

Soit $r>0$, par 3a/- il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que

- $[x-r,x+r]\cap K$ recouvert par 4 segments de $\mathcal{C}_n$

- $r_n \leq 2r$ (et $\underbrace{r < r_{n-1}}_{\text{inutile ici}}$)

on a alors

$\mu([x-r,x+r]) = \mu([x-r,x+r]\cap K_n)$ voir question 2 : $\mu({}^cK_n)=1$... $\mu(K_n) = 1 = \mu([0,1])$

$\leq 4\times\mu(\text{segment de }\mathcal{C}_n)$

$\leq 4.\,2^{-n}$ et $2^{-1} = \lambda^d$

$\leq 4(\lambda^n)^d$ et $\lambda^n \leq r_n$

$\leq 4\, r_n^d$ et $r_n\leq 2r$

$\leq 4.(2r)^d$

$\Rightarrow \boxed{\Theta^*_d(\mu,x) \leq 4} \underset{t=4}{\Rightarrow} \mu \leq C\mathcal{H}^d_{|K}$

$C = 4.2^d$

En particulier, $\mathcal{H}^d(K) \geq C^{-1}\underbrace{\mu(K)}_{=1} = C^{-1} > 0$

3d/- Conclure : il manque $\mu \geq C' \mathcal{H}^d_{|K}$ pour avoir l'équivalence des mesures.

- Pour l'instant, on a avec 3b/- $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall I \in \mathcal{C}_n$,

$$\mathcal{H}^d(K \cap I) \leq \mu(I)$$

on peut reprendre la question 3c/- pour <u>minorer</u> cette fois-ci

$$\Theta^*(\mu, x) \geq t \text{ unif}^t\ x \in K$$

Soit $r>0$ et $x \in K$, on reprend le $n \in \mathbb{N}$ du 3a/- tq

$$\begin{array}{l|l} (i) & [x-r, x+r] \text{ contient un intervalle de } \mathcal{C}_n \\ (ii) & \underline{\text{et}} \quad r_n \leq 2r \end{array}$$

$$(i) \Rightarrow \mu([x-r, x+r]) \geq \mu(\text{segment de } \mathcal{C}_n) \geq 2^{-n} = (\lambda^n)^d$$

et si $n = n_j$:

- on ne peut pas minorer $\forall n$
- mais : $\lambda^{n_j} \underset{j\infty}{\sim} r_{n_j}$

$$\frac{\mu([x-r, x+r])}{(2r)^d} \geq \frac{(\lambda^{n_j})^d}{(2r)^d}$$

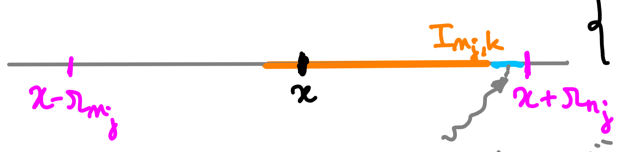
$$\underset{(ii)}{\geq} \left(\frac{\lambda^{n_j}}{r_{n_j}}\right)^d \xrightarrow[j\infty]{} 1 \quad (\ast)$$

Il reste à trouver $(r^{(j)})_{j\infty} \xrightarrow[j\infty]{} 0$ tq $\forall j \in \mathbb{N}$, le n du 3a/- est $n = n_j$

Enfait : c'est <u>plus facile</u>

- Soit $j \in \mathbb{N}$ et $I_{n_j,k} \in \mathcal{C}_{n_j}$ tq $x \in I_{n_j,k}$: il suffit de prendre $r^{(j)} > 0$ tq :

$$\begin{cases} r^{(j)} \leq |I_{n_j,k}| = r_{n_j} \\ \text{et} \quad I_{n_j,k} \subset [x - r^{(j)}, x + r^{(j)}] \end{cases}$$



n'importe quel "$r^{(j)}$ bleu" convient

et on a bien $r_{n_j} \leq 2r^{(j)}$ par l'inclusion

Comme $r^{(j)} \leq r_{n_j}$ $\forall j$, on a bien $r^{(j)} \xrightarrow[j\infty]{} 0_+$ et donc :

$$\Theta^*_d(\mu, x) \geq \limsup_{j\infty} \frac{\mu([x - r^{(j)}, x + r^{(j)}])}{(2r^{(j)})^d} \geq 1 \text{ par } (\ast)$$

$$\underset{\text{exo 1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mu \geq \mathcal{H}^d_{|K}}$$

4/- On vient de voir que $0 < \mathcal{H}^d(K) < +\infty$ ($\Rightarrow \dim_H K = d$)

Montrons que $\forall x \in K$, $\Theta^d_*(K,x) = 0$

$$\Theta^d_*(K,x) = \liminf_{r\to 0_+} \frac{\mathcal{H}^d(K\cap[x-r,x+r])}{(2r)^d}.$$

- On introduit : pour $r>0$,

$$v(r) = \frac{1}{r^d}\sup\{\mu(I) : |I| = r,\ I \text{ intervalle fermé}\}.$$

Mq. $\liminf_{r\to 0_+} v(r) = 0$.

C'est le moment d'utiliser la condition (3) [pas encore utilisée]

↳ entre $K_{m_{j-1}}$ et K_{m_j} on creuse un grand trou central dans chaque segment

$r_{m_j} \underset{j\to\infty}{\ll} r_{m_{j-1}}$

- Soit I intervalle fermé de longueur $|I| = r$. On peut recouvrir (3a/-)

$\begin{cases} I\cap K \text{ par 4 intervalles de } \mathcal{C}_n \\ \text{où } n \text{ vérifie de plus } r_n \leq |I| = r \end{cases}$

$\Rightarrow \mu(I) \leq 4 \times \mu(\text{segment de } \mathcal{C}_n) = 4\cdot 2^{-n} = 4(\lambda^n)^d$

$\leq 4(r_n)^d$

attention, n dépend de I.

On obtient $\frac{1}{r^d}\mu(I) \leq 4\left(\frac{r_n}{r}\right)^d$ ← BUT : $\begin{cases} r \sim r_{m_{j-1}} \\ r_n \sim r_{m_j} \end{cases}$ ← $\frac{r_{m_j}}{r_{m_{j-1}}} \underset{j\infty}{\to} 0$

On choisit, pour $j\in\mathbb{N}$, $r^{(j)} := r_{m_{j-1}} \times \frac{1}{2}$ ← <1 suffit

On regarde ce qui se passe dans une fenêtre I de taille $\lesssim r_{m_{j-1}}$

↳ on ne peut pas mettre de segments de $\mathcal{C}_{m_{j-1}}$: la fenêtre est tout juste trop petite

↳ dès la génération suivante : les segment de $\mathcal{C}_{m_j}$ sont de longueur bcp plus petite et on couvre $I\cap K$ avec 4 d'entre eux

$r_{m_j} \underset{j\infty}{\ll} r_{m_{j-1}}$

$*$ $r^{(j)} < r_{m_{j-1}} \Rightarrow$ le "n" vérifie $r_n \leq r^{(j)} \Rightarrow r_n < r_{m_{j-1}}$

$\Rightarrow r_n \leq r_{m_j}$

suite strict. $(r_k)_k \searrow$

$*$ on revient à $\underbrace{\sup_{I, |I|=r^{(j)}} \frac{\mu(I)}{(r^{(j)})^d}}$ $\leq 4\left(\frac{r_n}{r^{(j)}}\right)^d \leq \underbrace{4 \cdot 2^d\left(\frac{r_{m_j}}{r_{m_{j-1}}}\right)^d}_{\text{indep. de } I \text{ tq } |I| = r^{(j)}}$

$$\Rightarrow v(r^{(j)}) \leq 4 \cdot 2^d \left(\frac{r_{m_j}}{r_{m_{j-1}}}\right)^d \xrightarrow[j\infty]{} 0$$

et $r^{(j)} = \frac{1}{2} r_{m_{j-1}} \xrightarrow[j\infty]{} 0$

$\Rightarrow \liminf_{r \to 0_+} v(r) = 0.$

• En déduire que $\forall x \in K$, $\Theta^d_*(K, x) = 0$

On utilise le 3dL : $\mathcal{H}^d(K \cap [x-r, x+r]) \leq \mu([x-r, x+r])$ ($|\;| = 2r$)

$$\Rightarrow \forall r > 0, \ \frac{\mathcal{H}^d(K \cap [x-r, x+r])}{(2r)^d} \leq v(2r)$$

$$\Rightarrow \Theta^d_*(K, x) = \liminf_{r \to 0_+} \frac{\mathcal{H}^d(K \cap [x-r, x+r])}{(2r)^d} \leq \underbrace{\liminf_{r \to 0_+} v(2r)}_{\text{uniforme par rapport à } x.} = 0$$

5/ On définit K et K' associés à $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ par le même procédé.

$\leadsto$ $0 < \mathcal{H}^d(K), \mathcal{H}^d(K') < +\infty$.

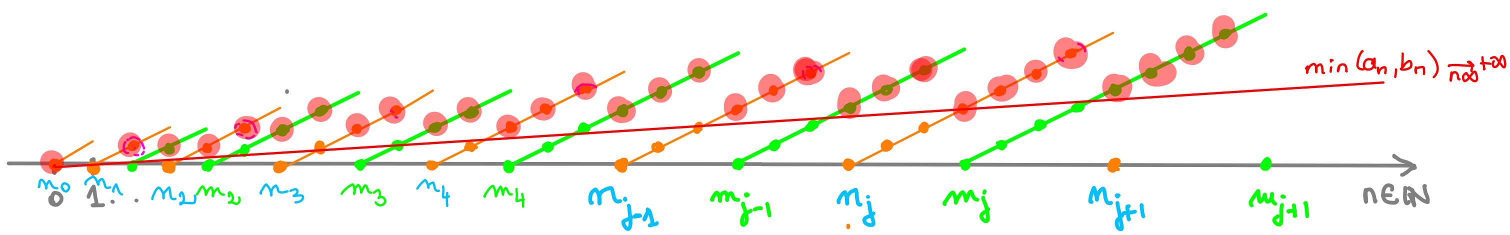
On veut de plus choisir K et K' t.q. $\mathcal{H}^{2d}(K \times K') = +\infty$!

5a/ On demande $(r_n)_n$ et (s_n) deux suites comme au 1/ et qui vérifient de plus :

$$c_n = \max(a_n, b_n) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_n = \ln(\lambda^{-n} r_n) \\ b_n = \ln(\lambda^{-n} s_n) \end{cases}$$

On vient désynchroniser les deux suites en prenant p.ex. la suite $(r_n)_n$, $(n_j)_j$ du 1

et la suite $m_j = n_j + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ pour $(s_n)_n$.



Pour $n_j \leq n < n_{j+1}$ (*) : $\min(a_n, b_n) \geq \alpha \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$ où $\alpha = \ln(\frac{1/2}{\lambda}) > 0$ pente des droites vertes et oranges.

et $n \to +\infty \Rightarrow j$ tq (*) $\to +\infty$

$$\Rightarrow \max(a_n, b_n) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

5b/ $\mu \leftrightarrow K$ et $\mu' \leftrightarrow K'$. On fixe C carré fermé et on suppose $\mathring{C} \cap (K \times K') \neq \emptyset$

Montrer que $\lim\limits_{r \to 0_+} \frac{1}{r^{2d}} (\mu \times \mu')(C) = 0$. (Pas seulement la liminf !)

• On écrit $C = I \times I'$ et on procède comme au (3a) : $\mathring{I} \cap K$ et $\mathring{I} \cap K'$ non vides.

$$\left| \begin{array}{l} n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \,;\, \exists J \in \mathcal{C}_n,\ J \subset I\} \\ n_0' = \min\{n \in \mathbb{N} \,;\, \exists J \in \mathcal{C}_n,\ J \subset I'\} \end{array} \right.$$

et on prend $N = \max(n_0, n_0')$ pour assurer que à la fois I et I' contiennent un segment de $\mathcal{C}_N$.

(3a) • <u>Si par exemple $N = n_0$</u>, on sait qu'on peut recouvrir I avec <u>4 segments consécutifs</u> de $\mathcal{C}_N = \mathcal{C}_{n_0}$, de longueur $r_N \leq r. = |I|$ $(= |I'|)$

On a alors $*\ \mu(I) \leq 4\,\mu(\text{segment de } \mathcal{C}_N) = 4 \cdot 2^{-N} = 4(\lambda^N)^d$

$*\ \mu'(I') \leq 4\,\mu'(\text{segment de } \mathcal{C}_{m_0'}) = 4(\lambda^{m_0'})^d \leq 4 r_{m_0'}^d \leq 4 r^d$ $|I'|$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^{2d}} (\mu \times \mu')(C) = \frac{1}{r^{2d}} \mu(I) \times \mu'(I')$$

$$\leq 4 \left(\frac{\lambda^N}{r}\right)^d \times 4$$

• <u>Par symétrie</u>, si $N = m_0'$, on obtient la même majoration :

$$\frac{1}{r^{2d}} (\mu \times \mu')(C) \leq 16 \left(\frac{\lambda^N}{r}\right)^d \leq 16 \min\left(\frac{\lambda^N}{r_N}, \frac{\lambda^N}{s_N}\right)^d$$

et par définition de N, on a $r \geq r_N$ et $r \geq s_N$

et en revenant à la définition des suites : $a_n = \ln(\lambda^{-n} r_n)$, $b_n = \ln(\lambda^{-n} s_n)$

$$\min\left(\frac{\lambda^N}{r_N}, \frac{\lambda^N}{s_N}\right)^d = \min(e^{-da_n}, e^{-db_n})$$

$$\underset{e^{-t}\searrow}{=} \exp(-d \cdot \max(a_N, b_N))$$

• Quand $r \to 0_+$, $N = N(r) \to +\infty$ car $r_N \leq r \to 0$ [$\lambda^N \leq r_N \leq r \to 0$ $\Rightarrow N \underbrace{\ln\lambda}_{<0} \to -\infty$]

D'où $\limsup\limits_{r \to 0_+} \frac{1}{r^{2d}} (\mu \times \mu')(C) \leq \lim\limits_{N\infty} \exp(-d \underbrace{\max(a_N, b_N)}_{\xrightarrow[N\infty]{} +\infty})$

$$= 0$$

5c) – Conclure que $\mathcal{H}^{2d}(K \times K') = +\infty$.

On utilise l'exercice 1 avec " $t \to 0_+$ " :

• <u>Retour des carrés aux boules</u> : soit $x \in K \times K'$ et $r > 0$

$B(x, r) \subset C = [x - r, x + r]^2$ carré de côté $2r$: on note $C = C_{x,r}$

$$\Rightarrow \frac{(\mu \times \mu')(B(x,r))}{(2r)^{2d}} \leq \frac{(\mu \times \mu')(C_{x,r})}{(2r)^{2d}}$$ et comme $x \in K \times K'$, $\overset{\circ}{C}_{x,r} \cap K \times K' \neq \emptyset$

par la question précédente

$$\Theta^*_{2d}(\mu \times \mu', x) = \limsup_{r \to 0_+} \frac{(\mu \times \mu')(B(x,r))}{(2r)^{2d}} \leq \lim_{r \to 0_+} \frac{(\mu \times \mu')(C_{x,r})}{2^{2d} r^{2d}}$$

$$= 0.$$

- Soit $t > 0$, en particulier $\Theta^*_{2d}(\mu \times \mu', x) \leq t \quad \forall x \in K \times K'$

$$\underset{\text{ex } 1}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(\mu \times \mu')(K \times K')}_{= \mu(K) \times \mu(K') = 1} \leq 2^d \, t \, \mathcal{H}^{2d}(K \times K')$$

$$\Rightarrow \forall t > 0, \quad \mathcal{H}^{2d}(K \times K') \geq 2^{-d} \cdot \frac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0_+]{} +\infty$$