Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 8 – Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note

$$N_p(\varphi) = \sup\left\{ |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p \right\} \in [0, +\infty].$$

On rappelle que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $N_p(\varphi) < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 (Distributions tempérées, exemples et contre-exemples)**.**

1. Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et P un polynôme tels que $f(x) = O(P(x))$ lorsque $|x| \to +\infty$, au sens où il existe $C \geqslant 0$ et $R \geqslant 0$ tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| \geqslant R$, $|f(x)| \leqslant C|P(x)|$. Montrer que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Est-ce que $g : x \mapsto e^{x^2}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?
3. Est-ce que $h : x \mapsto e^x e^{ie^x}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

Exercice 2 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs élémentaires)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ et, pour tout $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\tau_a S : \varphi \mapsto \langle S\,, \tau_{-a}\varphi\rangle$.
Justifier que les distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes sont tempérées et calculer leurs transformées de Fourier.

1. $\delta_a^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, la fonction indicatrice de $[-1, 1]$.
4. (*facultatif*) $g_{ab} = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de $[a, b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 3 (Parité et transformée de Fourier)**.** Pour tout $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on note $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T}$ la distribution définie par $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{\varphi}\rangle$. En généralisant le cas des fonctions, on dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est *paire* (resp. *impaire*) si $\check{T} = T$ (resp. si $\check{T} = -T$).

1. Montrer que $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire et que $\operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est impaire.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.
3. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}}$.

Exercice 4 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs moins élémentaires)**.** On note $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction signe, définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$, $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ si $x > 0$.

1. Justifier que S définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et montrer que $x\widehat{S} = -2i$.
2. En déduire que $\widehat{S} = -2i \operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Calculer $\widehat{H}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
4. Justifier que $\operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

L'exercice suivant est adapté de l'examen final de 2021.

Exercice 5 (Transformation de Fourier et convolution dans $\mathcal{S}'$)**.** Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on rappelle que leur convolée est la fonction définie par $\rho * T : x \mapsto \langle \tau_x \check{T}\,, \rho \rangle = \langle T\,, \rho(x - \cdot) \rangle$.

1. Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $N_p(\varphi * \rho) \leqslant C N_p(\varphi)$.
2. Soient φ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\varphi * \rho} = \widehat{\varphi}\, \widehat{\rho}$.
3. Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\rho * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\rho * S} = \widehat{\rho}\, \widehat{S}$.

   Indication. Rappelons qu'on a prouvé dans l'exerice 5 de la feuille 5 que $\rho * S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que $\langle \rho * S\,, \varphi \rangle = \langle S\,, \varphi * \check{\rho} \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 (Régularité du Dirac)**.** Déterminer les $s \in \mathbb{R}$ tels que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7 (Distributions harmoniques)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\Delta T = 0$.

1. Montrer que T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.
2. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que T est un polynôme.
3. Si T est bornée, montrer que T est constante.

Exercice 8 (Théorème de structure des distributions tempérées — *facultatif*)**.** Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on se propose de prouver qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que :

$$S = \big(1 + |x|^2\big)^p (\mathrm{Id} - \Delta)^q f. \tag{1}$$

Commençons par des résultats préliminaires concernant la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1}{1+|x|^2}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer qu'il existe un polynôme $P_{p,\alpha}$ de degré au plus $|\alpha|$ tel que $\partial^\alpha(\psi^p) = \psi^{p+|\alpha|} P_{p,\alpha}$.
2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \cdots, p\}$, montrer qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait $N_k(\psi^p \varphi) \leqslant A \max_{|\gamma| \leqslant k} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty$.

On revient maintenant à notre problème principal.

3. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, résoudre l'équation $(\mathrm{Id} - \Delta)\varphi = f$ d'inconnue $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
4. En déduire que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'opérateur $(\mathrm{Id} - \Delta)^q$ réalise une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même. Expliciter son inverse $(\mathrm{Id} - \Delta)^{-q}$.

Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la distribution $S_{pq} : \varphi \longmapsto \Big\langle S\,, \big(1 + |x|^2\big)^{-p} (\mathrm{Id} - \Delta)^{-q} \varphi \Big\rangle$.

5. Pour p et q assez grands, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $|\langle S_{pq}\,, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_1$.
6. Conclure.