Université Paris-Saclay
2022 – 2023
Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Feuille 6 – Mesure superficielle et formule de Gauss–Green

Exercice 1 (Mesure superficielle en dimension 1)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

1. Soit $a \in I$, déterminer la mesure superficielle σ_a de $\{a\}$
2. Soit Σ une hypersurface (topologiquement) fermée dans I, déterminer sa mesure superficielle σ.
3. Soient a et $b \in I$ tels que $a < b$. Calculer $\left(\mathbf{1}_{]a,b[}\right)'$, naïvement puis par la formule des sauts.
4. Écrire la formule de Gauss–Green sur $]a, b[$. Constater qu'on retrouve une formule bien connue.

Exercice 2 (Mesure superficielle en dimension 2)**.** Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une hypersurface (i.e. une courbe) de classe $\mathcal{C}^1$ et topologiquement fermée, de sorte que sa mesure superficielle $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est bien définie. On se donne un paramétrage local de Γ, i.e. une fonction $\gamma : I \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

- I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,
- γ est un homéomorphisme de I sur $\Gamma \cap \Omega$,
- γ' ne s'annule pas.

Remarque. Pour tout $a \in \Gamma$, il existe un voisinage Ω de a et un paramétrage γ de Γ comme ci-dessus.

Le but de l'exercice est de vérifier que $\sigma_{|\Omega} = T$, où $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est la forme linéaire définie par :

$$T : \varphi \longmapsto \int_I \varphi(\gamma(t))|\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

En d'autres termes, la mesure superficielle σ de Γ coïncide avec la notion d'intégration définie par la longueur d'arc, qui rappelons-le est indépendante du choix du paramétrage.

1. Vérifier que T définit une distribution.
2. Notons (γ_1, γ_2) les composantes de γ. Soit $a \in \Gamma \cap \Omega$, montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de a et un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ tels que $\Gamma \cap V$ soit l'un des deux graphes suivants :
$$\Gamma \cap V = \left\{\left(x_1, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x_1)\right) : x_1 \in J\right\} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma \cap V = \left\{\left(\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}(x_2), x_2\right) : x_2 \in J\right\},$$
3. En déduire que $\sigma_{|V} = T_{|V}$.
4. Conclure que $\sigma_{|\Omega} = T$.

Exercice 3 (Une extension de la formule de coaire)**.** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une submersion $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\Sigma_t = f^{-1}(t)$ qui est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω, éventuellement vide. On note également σ_t pour la mesure superficielle de Σ_t. La formule de coaire énoncée dans le cours affirme que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la formule (1) est en fait valable pour toute fonction-test φ continue et positive, et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

1. Construire une suite croissante $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions positives dans $\mathcal{C}^0_0(\Omega)$ qui convergent simplement vers $\mathbf{1}_\Omega$.

   Indication. Commencer par traiter le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, puis le cas Ω borné et enfin le cas général.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ positive, prouver l'égalité (1) où les deux membres peuvent être finis ou infinis.

   Indication. Utiliser un argument d'approximation et le théorème de convergence monotone.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)\cap L^1(\Omega)$, montrer que $\frac{\varphi}{|\nabla f|} \in L^1(\Sigma_t, \sigma_t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Prouver que φ satisfait la formule (1).

Exercice 4 (Changement de variable sphérique)**.** Pour tout $r > 0$, notons $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$, $\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\}$ et σ_r la mesure superficielle de S_r.

1. Soient $0 \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant +\infty$ et $\varphi \in \mathcal{C}^0(B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}})$ une fonction positive ou intégrable, montrer la *formule de changement de variable sphérique* suivante :

$$\int_{B_{R_2}\setminus\overline{B_{R_1}}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{S_1} \varphi(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta)\right) r^{d-1}\,\mathrm{d}r. \tag{2}$$

2. Montrer que $\sigma_1(S_1) = d \cdot \mathrm{Vol}(B_1)$, où on a noté $\mathrm{Vol}(B_1)$ la mesure de Lebesgue de B_1.

Soit γ la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, qui admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\!\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_*\gamma$ la mesure image de γ par la projection radiale $\pi : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$. On a montré dans l'exercice 4 de la feuille 5 que μ définit une distribution positive dont le support est S_1, et c'est en fait la mesure de probabilité uniforme sur S_1.

3. Comparer μ et σ_1. En déduire les valeurs de $\sigma_1(S_1)$ et $\mathrm{Vol}(B_1)$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer les deux équivalences suivantes :

$$\int_{B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha > -d \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < -d.$$

Définition (Laplacien)**.** On appelle *laplacien* l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ agissant sur distributions sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite *harmonique* si $\Delta T = 0$.

Exercice 5 (Formules de Green pour Δ)**.**

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide et σ la mesure superficielle de $\partial\Omega$. On note $N : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de Ω. Prouver les formules suivantes, appelées respectivement première et seconde formule de Green.

$$\forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ \forall v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \qquad \int_\Omega u\ \Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle u\ \nabla v\,, N\rangle\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \langle \nabla u\,, \nabla v\rangle\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\forall u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}),\ \forall v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \qquad \int_\Omega (u\ \Delta v - v\ \Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle u\ \nabla v - v\ \nabla u\,, N\rangle\,\mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

2. Soit $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\Delta v = 0$ si et seulement si pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide :

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla v\,, N\rangle\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide et $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique telle que $v_{|\partial\Omega} = 0$. Montrer que $v = 0$.

Exercice 6 (Formules de la moyenne)**.** Pour tout $r > 0$, notons encore $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\}$ et σ_r la mesure superficielle de S_r. On note $N : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs radial unitaire issu de 0. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, on définit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ par :

$$g : r \longmapsto \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_r(x).$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g' : r \mapsto \dfrac{1}{r^{d-1}} \displaystyle\int_{S_r} \langle \nabla u(x) \, , N(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma_r(x)$.

On suppose désormais que la fonction u est harmonique.

2. Montrer que g constante dans ce cas, et établir la première formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_r(x). \tag{5}$$

3. En déduire la seconde formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{B_r} u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

   Indication. Utiliser la seconde formule de Green (4) avec $v : x \mapsto |x|^2$, de laplacien constant.

Exercice 7 (Solution fondamentale de Δ)**.** Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$ et $f_d : x \mapsto |x|^{2-d}$. Pour $R > 0$, on note $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$, $S_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = R\}$ et σ_R la mesure superficielle de S_R. On note aussi $N : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs radial unitaire issu de 0.

1. Vérifier que f_d définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, calculer $\nabla f_d(x)$ et $\Delta f_d(x)$, au sens de la dérivation usuelle.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\langle \Delta f_d \, , \varphi \rangle = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \langle \varphi \; \nabla f_d - f_d \; \nabla \varphi \, , N \rangle \, \mathrm{d}\sigma_\varepsilon$.
4. Calculer Δf_d dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
5. (*facultatif*) Pour $d = 2$, on pose $f_2 : x \mapsto \ln|x|$. Calculer Δf_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ par la même méthode que ci-dessus.