Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 4 – Espace de Sobolev sur un intervalle

Exercice 1 (Convergence dominée L^p)**.** Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ telle que :

- il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;
- il existe $g \in L^p(X, \mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.

Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(X, \mu)$.

Quitte à modifier f, g et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f partout sur X, et que cette suite elle est dominée par g partout sur X. En passant à la limite simple, on a $|f| \leqslant g$. En particulier f et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $L^p(X, \mu)$.
Alors, la suite $((f_n - f)^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur X et y est dominée par $2^p g^p$ qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.

Exercice 2 (Injection de Sobolev, cas I non borné)**.** La proposition 1.8.5 du cours affirme que, si I est un intervalle ouvert borné, alors tout $u \in H^1(I)$ admet un représentant continu sur $\overline{I}$, et qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall u \in H^1(I)$, $\|u\|_\infty \leqslant C\|u\|_{H^1}$. Le but de l'exercice est de montrer que ce résultat reste valable si on ne suppose pas I borné.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $u \in H^1(I)$.

1. Montrer que u admet un représentant, encore noté u, tel que $|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2$ pour tout $x, y \in I$. En déduire que u admet un unique représentant continu sur $\overline{I}$.
   On a $u \in L^2(I) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ et u admet une dérivée généralisée $u' \in L^2(I) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Soit $x_0 \in I$, d'après la prop. 1.8.2 du cours, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que
   $$x \longmapsto \int_{x_0}^x u'(t)\,\mathrm{d}t + c \qquad \text{(i)}$$
   soit un représentant de la classe $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Dorénavant on identifie $u \in H^1(I)$ avec la fonction (i). Soient x et $y \in I$, par Cauchy–Schwarz on obtient :
   $$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |u'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (\max(x,y) - \min(x,y))^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |x - y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2.\end{aligned}$$

Donc l'équation (i) définit un représentant de u vérifiant $|u(x)-u(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}\|u'\|_2$ pour tout $x, y \in I$. Ce représentant est $\frac{1}{2}$-höldérien sur I. En particulier, il y est uniformément continu et se prolonge donc uniquement en une fonction continue sur $\overline{I}$. Ce représentant continu sur $\overline{I}$ de u est unique vu que deux fonctions continues égales presque partout sont égales.

Dans la suite on identifiera u à son unique représentant continu.

2. Soit $J \subset I$ un intervalle de longueur $\ell \in \,]0, +\infty[$. Soit $x \in J$, montrer que pour tout $y \in J$, $|u(x)| \leqslant |u(y)| + \sqrt{\ell}\|u'\|_2$. En déduire que $|u(x)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} + \sqrt{\ell}\right)\|u\|_{H^1}$ par intégration sur J.

   Pour tout $y \in J$, la question 1 donne que :

$$|u(x)| - |u(y)| \leqslant \big||u(x)| - |u(y)|\big| \leqslant |u(x) - u(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}\|u'\|_2 \leqslant \sqrt{\ell}\|u'\|_2.$$

   Donc, $|u(x)| \leqslant |u(y)| + \sqrt{\ell}\|u'\|_2$. On intègre maintenant cette relation sur J par rapport à la variable y. Comme J est de longueur ℓ, on obtient :

$$\ell|u(x)| = \int_J |u(x)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int_J |u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_J \sqrt{l}\|u'\|_2\,\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\ell}\|u\|_2 + \sqrt{\ell}^3\|u'\|_2,$$

   où la dernière inégalité vient de Cauchy–Schwarz. Finalement on obtient la relation souhaitée en divisant par $\ell > 0$ de part et d'autre.

3. Conclure qu'il existe $C \geqslant 0$ telle que pour tout $u \in H^1(I)$, $\|u\|_\infty := \sup_{x \in \overline{I}}|u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^1}$.

   Soit $\ell = \min(1, \mathrm{Long}(I))$. On a $\ell \in]0, 1]$ et donc $\frac{1}{\ell} \geqslant 1 \geqslant \ell$.

   Soit $u \in H^1(I)$, identifié à son unique représentant continu. Pour tout $x \in I$, il existe $J_x \subset I$ intervalle de longueur ℓ qui contient x. D'après la question 2, on a donc

$$|u(x)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} + \sqrt{\ell}\right)\|u\|_{H^1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\ell}}\|u\|_{H^1}.$$

   Cette relation est valable pour tout $x \in I$, donc pour tout $x \in \overline{I}$ par continuité de u sur $\overline{I}$. Ainsi, $\|u\|_\infty \leqslant C\|u\|_{H^1}$ pour $C = \frac{2}{\sqrt{\ell}}$.

4. Soit $x \in \overline{I}$, montrer que $\Phi_x : u \mapsto u(x)$ est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$.

   D'abord, Φ_x est bien définie et linéaire de $H^1(I)$ dans $\mathbb{C}$. D'après la question 3, pour tout $u \in H^1(I)$,

$$|\Phi_x(u)| = |u(x)| \leqslant \|u\|_\infty \leqslant C\|u\|_{H^1}.$$

   Donc Φ_x est continue sur $H^1(I)$.

Exercice 3 (Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)**.** Soient I un intervalle ouvert, le but de l'exercice est de montrer que (l'espace des restrictions à I des fonctions de) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\big(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\big)$.

1. On considère $I =]a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $u \in H^1(I)$, montrer qu'il existe $u_0 \in H^1_0(I)$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $u = u_0 + v_{|I}$. En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$, au sens où pour tout $u \in H^1(I)$ il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\psi_n)_{|I} \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$

   Indication. Rappelons que pour $f \in H^1(I)$ on a $f \in H^1_0(I)$ si et seulement si $f(a) = 0 = f(b)$.

   La classe de fonctions $u \in H^1(I)$ admet un unique représentant continu par la prop. 1.8.5 du cours ou par l'exercice 2. Dans la suite on identifie u à ce représentant continu.

   En suivant l'indication, on veut $u_0(a) = 0 = u_0(b)$, c'est-à-dire $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$. Soit donc $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$ (il en existe bien). On pose $u_0 = u - v_{|I}$.

Comme $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sa restriction est dans $H^1(I)$, et on a donc $u_0 \in H^1(I)$. Comme de plus $u_0(a) = 0 = u_0(b)$ on a $u_0 \in H_0^1(I)$ par la prop. 1.8.8 du cours.

Par définition, $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$. Il existe donc une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}(I)$ telle que $\|u_0 - \varphi_n\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Rappelons qu'on peut voir $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en étendant les fonctions de $\mathcal{D}(I)$ par 0 hors de I (les fonctions de $\mathcal{D}(I)$ s'annulent *au voisinage de* a et b). Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\psi_n = \varphi_n + v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a alors $\left\|u - (\psi_n)_{|I}\right\|_{H^1} = \|u_0 - \varphi_n\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$.

2. Considérons maintenant le cas $I = \mathbb{R}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0,1]$, constante à 1 sur $[-1,1]$ et supportée dans $[-2,2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\chi_n : x \mapsto \chi(\frac{x}{n})$. Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, montrer que $\chi_n u \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$.

   Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a en particulier $u \in L^2(\mathbb{R})$. Vérifions que $\chi_n u \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} u$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant |x|$ on a $\chi_n(x) = 1$, donc $(\chi_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\chi_n u| \leqslant |u| \in L^2(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 1 on a donc $\|\chi_n u - u\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On s'intéresse maintenant aux dérivées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule la dérivée de $\chi_n u$ (au sens des distributions) par la règle de Leibniz, ce qui est licite car $\chi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$(\chi_n u)' = \chi_n' u + \chi_n u' = \chi_n u' + \frac{1}{n}\chi'\Big(\frac{\cdot}{n}\Big)u$$

   Comme u et $u' \in L^2(\mathbb{R})$ et χ et χ' sont bornées, on a bien $(\chi_n u)' \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\|(\chi_n u)' - u'\|_2 \leqslant \|\chi_n u' - u'\|_2 + \left\|\frac{1}{n}\chi'\Big(\frac{\cdot}{n}\Big)u\right\|_2 \leqslant \|\chi_n u' - u'\|_2 + \frac{1}{n}\|\chi'\|_\infty \|u\|_2.$$

   Dans le membre de droite, le premier terme tend vers 0 par le même argument que précédemment, car $u' \in L^2(\mathbb{R})$. Le second terme tend également vers 0. Donc $\|(\chi_n u)' - u'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, on a bien $\|\chi_n u - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$. Que dire de l'inclusion $H_0^1(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$?

   Soient $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question 2, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|\chi_n u - u\|_{H^1} < \varepsilon$. Pour ce n, la fonction $\chi_n u$ est dans $H^1(\mathbb{R})$ et nulle hors de $J =]-2n, 2n[$. En particulier, $(\chi_n u)_{|J} \in H_0^1(J)$ par la prop. 1.8.8 du cours. Comme $\mathcal{D}(J)$ est dense dans $H_0^1(J)$ par définition, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|\chi_n u - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\chi_n u - \varphi\|_{H^1(J)} < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, $\|u - \varphi\|_{H^1} < 2\varepsilon$. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$ et donc $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.

4. Pour $I \neq \mathbb{R}$, est-ce que $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H^1(I)$?

   Si $I \neq \mathbb{R}$, il a au moins une borne finie, disons par exemple que $a = \inf(I) > -\infty$. D'après la question 4 de l'exercice 2, l'application d'évaluation $\Phi_a : u \mapsto u(a)$ est continue. Si $\mathcal{D}(I)$ était dense dans $H^1(I)$ on aurait donc $u(a) = 0$ pour tout $u \in H^1(I)$. Or, il existe $u \in H^1(I)$ tel que $u(a) \neq 0$. Par exemple $u = \chi_{|I}$, où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\chi(a) = 1$.

5. Il reste à traiter le cas d'intervalles du type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$. Soit $I =]0, +\infty[$, en combinant les arguments utilisés dans les questions 1 et 2 montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$.

   Soit $u \in H^1(I)$, identifié à son représentant continu sur $[0, +\infty[$. Il existe $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $v(0) = u(0)$. On pose $u_0 = u - v_{|I} \in H^1(I)$. En reprenant la même fonction χ qu'à la question 2, les mêmes calculs montrent que $\chi_n u_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$ dans $H^1(I)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\|u - (v_{|I} - \varphi_{|I})\right\|_{H^1} = \left\|u_0 - \varphi_{|I}\right\|_{H^1} \leqslant \|u_0 - \chi_n u_0\|_{H^1} + \|\chi_n u_0 - \varphi_{|I}\|_{H^1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u_0 - \chi_n u_0\|_{H^1} < \varepsilon$. Alors $\chi_n u_0 \in H^1_0(]0, 2n[)$, car cette fonction s'annule en 0 et $2n$. Par définition de $H^1_0(]0, 2n[)$, il existe dans $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2n[) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|\chi_n u_0 - \varphi\|_{H^1(I)} = \|\chi_n u_0 - \varphi\|_{H^1(]0,2n[)} < \varepsilon$. En posant $\psi = v + \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\|u - \psi_{|I}\| < 2\varepsilon$. Ainsi $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est bien dense dans $H^1(I)$.

Exercice 4 (Dérivation d'un produit et intégration par parties dans H^1)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $u, v \in H^1(I)$.

1. Montrer que $uv \in H^1(I)$ et que $(uv)' = u'v + uv'$.

   D'après l'exercice 2, les fonctions u et v sont L^∞. Comme v, u' et v' sont des fonctions L^2, on a donc $uv \in L^2(I)$ et $u'v + uv' \in L^2(I)$. Il suffit donc de montrer que $(uv)' = u'v + uv'$ au sens des distributions.

   Si $u \in \mathcal{C}^\infty(I)$ alors $(uv)' = u'v + uv'$ en appliquant la règle de Leibniz pour le produit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et d'une distribution. Dans le cas général, on va procéder par approximation en utilisant le résultat de l'exercice 3.

   Comme $u \in H^1(I)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$ (ici et dans la suite on écrit encore u_n pour la restriction à I de u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(u_n v)' = u_n' v + u_n v'$. Il s'agit donc de prouver les convergences suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   $$(u_n v)' \xrightarrow[n\to+\infty]{} (uv)', \qquad u_n' v \xrightarrow[n\to+\infty]{} u' \qquad \text{et} \qquad u_n v' \xrightarrow[n\to+\infty]{} uv',$$

   ce qui impliquera la formule souhaitée.

   Par l'inégalité de Sobolev (exercice 2 question 3), il existe $C \geqslant 0$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leqslant C\|\cdot\|_{H^1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\|u_n v - uv\|_2 = \|(u_n - u)v\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_\infty \|v\|_2 \leqslant C\|u_n - u\|_{H^1}\|v\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   La convergence dans $\left(L^2(I), \|\cdot\|_2\right)$ implique la convergence faible dans $L^2(I)$ et donc la convergence dans $\mathcal{D}'(I)$ (voir l'exercice 8 de la feuille 3). Plus élémentairement, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $|\langle u_n v - uv\,, \varphi\rangle| \leqslant \|u_n v - uv\|_2 \|\varphi\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $u_n v \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} uv$, et par continuité de la dérivation $(u_n v)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (uv)'$. Comme ci-dessus,

   $$\|u_n v' - uv'\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_\infty \|v'\|_2 \leqslant C\|u_n - u\|_{H_1}\|v'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   donc $u_n v' \xrightarrow[n\to+\infty]{} uv'$ dans $L^2(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$. Enfin,

   $$\|u_n' v - u'v\|_2 \leqslant \|v\|_\infty \|u_n' - u'\|_2 \leqslant \|v\|_\infty \|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{ii}$$

   Donc $u_n' v \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'v$ dans $L^2(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$.

2. En déduire que pour tout $[a, b] \subset \overline{I}$ la formule d'intégration par parties suivantes est valide :

   $$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On vient de montrer que $uv \in H^1(I)$. En reprenant la solution de l'exercice 2 question 1, on voit que l'unique représentant continu sur $\overline{I}$ de uv s'écrit sous la forme :

$$uv : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} (uv)'(t)\,\mathrm{d}t + c,$$

où $x_0 \in I$ et $c \in \mathbb{C}$. D'après la question 1, si $[a, b] \subset \overline{I}$ on a donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = uv(b) - uv(a) = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui établit (1).

Exercice 5 (Singularité ponctuelle)**.** Soient $I =]a, b[$ et $J =]b, c[$, avec $-\infty \leqslant a < b < c \leqslant +\infty$. Soient $u \in H^1(I)$ et $v \in H^1(J)$, on note $w = u\mathbf{1}_I + v\mathbf{1}_J$.

1. Est-ce que $w \in H^1(]a, c[)$?

   Indication. Calculer la dérivée de w.

   Dans la suite on identifie u et v à leurs représentants continus sur $]a, b]$ et sur $[b, c[$ respectivement. L'existence et l'unicité de ces représentants est donnée par l'exercice 2.

   Si $w \in H^1(]a, c[)$ alors il coïncide presque partout sur $]a, c[$ avec une fonction continue. Cela suggère qu'on peut raccorder continuement u et v en b, c'est-à-dire que $v(b) = u(b)$. On va vérifier que $w \in H^1(]a, c[) \iff v(b) = u(b)$.

   Pour commencer, on a $w \in L^2(]a, c[)$. En effet,

$$\int_a^c |w(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_b^c |v(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

   Suivant l'indication, on calcule la dérivée de w dans $\mathcal{D}'(]a, c[)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, c[) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle w', \varphi\rangle = -\langle w, \varphi'\rangle = -\langle \mathbf{1}_I u, \varphi'\rangle - \langle \mathbf{1}_J v, \varphi'\rangle = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c v(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Comme u et $\varphi_{|I} \in H^1(I)$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties (1) établie dans l'exercice 4. De même pour v et $\varphi_{|J} \in H^1(J)$. Donc, en identifiant u et v à leurs représentants continus,

$$\begin{aligned}
\langle w', \varphi\rangle &= -[u(x)\varphi(x)]_a^b + \int_a^b u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - [v(x)\varphi(x)]_b^c + \int_b^c v'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -u(b)\varphi(b) + v(b)\varphi(b) + \int_a^c (u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \langle (v(b) - u(b))\delta_b, \varphi\rangle + \left\langle u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J, \varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

   Ainsi $w' = u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J + (v(b) - u(b))\delta_b$. Comme ci-dessus, on a $u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J \in L^2(]a, c[)$ car $u' \in L^2(I)$ et $v' \in L^2(J)$. On a donc, comme annoncé,

$$w \in H^1(]a, c[) \iff w' \in L^2(]a, c[) \iff (v(b) - u(b))\delta_b \in L^2(]a, c[) \iff v(b) = u(b).$$

   En effet $\delta_b \notin L^2(]a, c[) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(]a, c[)$. Une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(]a, c[)$ telle que $T_f = \delta_b$ vérifierait $T_{f_{|]a,b[\cup]b,c[}} = (\delta_b)_{|]a,b[\cup]b,c[} = 0$, donc $f = 0$ presque partout sur $]a, b[\cup]b, c[$ par injectivité de $g \mapsto T_g$, et donc $\delta_b = T_f = 0$.

2. Expliquer comment prolonger $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ en $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|\widetilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

   On identifie u à son représentant continu sur $[0, +\infty[$. Par la question 1, il est naturel de chercher le prolongement sous la forme $\widetilde{u} = v\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ avec $u(0) = v(0)$. Un choix naturel pour assurer la continuité en 0 et la condition sur les normes est de choisir $v : x \mapsto u(-x)$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{C}$.

   Si on montre que $v \in H^1(\mathbb{R}_-^*)$ et $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)} = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$ on aura bien $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ par la question 1, et même $\widetilde{u}' = v'\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u'\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ vus les calculs ci-dessus. On aura alors :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_-^*} |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_+^*} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_-^*} |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_+^*} |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)}^2 + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2 = 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2,\end{aligned}$$

   ce qui prouvera que la condition sur les normes est satisfaite.

   On a

$$\int_{\mathbb{R}_-^*} |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_-^*} |u(-x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_-^*} |-u'(-x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

   Il suffit donc de montrer que v' est représentée par la fonction $x \mapsto -u'(-x)$. Cette fonction étant L^2 on aura bien $v \in H^1(\mathbb{R}_-^*)$ et $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)}^2 = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-^*)$, on a

$$\langle v' \,, \varphi \rangle = -\langle v \,, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}_-^*} u(-x)\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}_+^*} u(x)\varphi'(-x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} u(x)\check{\varphi}'(x) \,\mathrm{d}x,$$

   où $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$ définit une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \subset H^1(\mathbb{R}_+^*)$. Par intégration par parties dans H^1 (voir exercice 4), on a donc :

$$\langle v' \,, \varphi \rangle = [u(x)\check{\varphi}(x)]_0^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}_+^*} u'(x)\check{\varphi}(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}_+^*} u'(x)\varphi(-x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_-^*} -u'(-x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

   D'où le résultat.

Exercice 6 (La règle de la chaîne)**.** Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$. Soit I un intervalle ouvert, le but de l'exercice est de montrer que pour tout $u \in H^1(I)$, on a $G \circ u \in H^1(I)$ et

$$(G \circ u)' = \big(G' \circ u\big)u'. \tag{2}$$

1. Soit $u \in H^1(I)$, montrer que $G' \circ u$ est bornée. En déduire que $(G' \circ u)u'$ et $G \circ u$ sont L^2.

   D'après l'exercice 2, la fonction u est bornée sur I, par une constante $A \geqslant 0$. Comme G' est continue sur $[-A, A]$ elle y est bornée par une constante $B \geqslant 0$. Alors, pour tout $x \in I$ on a $|G'(u(x))| \leqslant B$. Donc $G' \circ u$ est bornée.

   On a $u' \in L^2(I)$ et $G' \circ u \in L^\infty(I)$ donc $(G' \circ u)u' \in L^2(I)$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in I$, $|G(u(x))| = |G(u(x)) - G(0)| \leqslant B|u(x)|$. Donc $|G \circ u| \leqslant B|u| \in L^2(I)$.

2. Conclure en utilisant un argument de densité.

   Pour tout $u \in H^1(I)$ on a $|G \circ u| \leqslant B|u| \in L^2(I)$ et $(G' \circ u)u' \in L^2(I)$. Il suffit donc de prouver (2) pour avoir $G \circ u \in H^1(I)$. La formule (2) est vrai si $u \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Dans le cas général on procède par approximation, comme dans l'exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (restrictions à I de fonctions de) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(G \circ u_n)' = (G' \circ u_n)u_n'.$$

Il s'agit donc de prouver que $(G \circ u_n)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G \circ u)'$ et $(G' \circ u_n)u_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G' \circ u)u'$, ce qui établira (2).

D'après l'exercice 2, il existe $C \geqslant 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant C\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H^1(I)$. En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} u$ et donc il existe $\widetilde{A}$ tel que $\|u_n\|_\infty \leqslant \widetilde{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $\widetilde{B}$ le maximum de $|G'|$ sur $\left[-\widetilde{A}, \widetilde{A}\right]$. Pour tout $x \in I$,

$$|G(u_n(x)) - G(u(x))| \leqslant \widetilde{B}\|u_n - u\|_\infty \leqslant C\widetilde{B}\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $G \circ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} G \circ u$ dans $L^\infty(I)$ donc dans $\mathcal{D}'(I)$. Par continuité de la dérivation, $(G \circ u_n)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G \circ u_n)'$

L'autre convergence à montrer est plus subtile, et on va passer par l'évaluation contre des fonctions-test. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément donc simplement vers u, où on identifie u et son représentant continu. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a $(G' \circ u_n)\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} (G' \circ u)\varphi$ simplement sur I. Cette suite est dominée par $\widetilde{B}|\varphi| \in L^2(I)$, donc par l'exercice 1 on a $(G' \circ u_n)\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} (G' \circ u)\varphi$. Par ailleurs, $\|u_n' - u'\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme le produit $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire continu de $L^2(I) \times L^2(I)$ dans $L^1(I)$, on en déduit que $(G' \circ u_n)u_n'\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} (G' \circ u)u'\varphi$ dans $L^1(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$.

3. Que dire de l'hypothèse $G(0) = 0$ lorsque I est borné ?

   On a utilisé $G(0) = 0$ uniquement dans la question 1 pour montrer que $G \circ u$ est dominé par $|u|$ et en déduire $G \circ u \in L^2(I)$. Si I est borné, quitte à considérer le représentant de u qui est continu sur le compact $\overline{I}$, on a $G \circ u$ continue, donc bornée, et donc L^2 sur $\overline{I}$. Dans ce cas, l'hypothèse $G(0) = 0$ est donc inutile.

Définition (Convergence faible)**.** Soit $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers x dans H si $\langle x_n\,, y \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x\,, y \rangle$ pour tout $y \in H$.

Théorème 1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente.*

Exercice 7 (Inégalité de Poincaré générale)**.** Soit I un intervalle ouvert borné et soit V un sous-espace fermé de $H^1(I)$ ne contenant aucune fonction constante non nulle.

1. Donner au moins trois exemples de sous-espaces V comme ci-dessus.

   On peut penser à $V = H_0^1(I) = \left\{u \in H^1(I) \;\middle|\; u_{|\partial I} = 0\right\}$ qui est fermé car adhérence de $\mathcal{D}(I)$. D'autres exemples sont $V = \{0\}$, $V = \mathbb{C}u$ avec $u \in H^1(I)$ non constante.

   On peut aussi construire toute une classe d'exemples de la façon suivante. Soit $K \subset I$ un compact. En identifiant les éléments de $H^1(I)$ à leur représentant continu, on a une application linéaire $u \mapsto u_{|K}$ de $\left(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\right)$ vers $\left(C^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ qui est continue grâce à l'inégalité de Sobolev (voir la question 3 de l'exercice 2). Le noyau de cette application $\left\{u \in H^1(I) \;\middle|\; u_{|K} = 0\right\}$ est donc un sous-espace fermé ne contenant pas de constante non nulle.

On se propose de montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ telle que $\|u\|_2 \leqslant C\|u'\|_2$ pour tout $u \in V$. On va raisonner par l'absurde, en supposant qu'il n'existe pas de tel $C \geqslant 0$.

2. Prouver qu'il existe alors une suite (u_n) dans V telle que $\|u_n'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_2 = 1$.

   D'après notre hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in V$ telle que $\|v_n\|_2 > n\|v_n'\|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_2}$ de sorte que $\|u_n\|_2 = 1$. Alors

$$\|u_n'\|_2 = \frac{\|v_n'\|_2}{\|v_n\|_2} < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3. Montrer qu'on peut de plus supposer que (u_n) converge faiblement dans V vers une fonction u.
   Comme V est un sous-espace fermé de $H^1(I)$, on a que $(V, \langle \cdot\,,\cdot\rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert. La suite $(\|u_n'\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée par $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \|u_n\|_2^2 + \|u_n'\|_2^2 \leqslant 1 + M^2. \tag{iii}$$

   D'après le thm. 1, on peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente dans V, qui vérifie encore les propriétés de la question 2. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par cette suite extraite, on peut donc supposer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ faiblement dans V.

4. Montrer que $\int_I u_n'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $v \in L^2(I)$.
   Soit $v \in L^2(I)$, notons $\alpha_v : u \mapsto \int_I u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. La forme linéaire α_v est continue sur $H^1(I)$. En effet, pour tout $u \in H^1(I)$,

$$|\alpha_v(u)| \leqslant \|v\|_2\|u'\|_2 \leqslant \|v\|_2\|u\|_{H^1}.$$

   Par restriction, α_v définit une forme linéaire continue sur V. Il existe donc $w \in V$ tel que $\alpha_v = \langle w\,,\cdot\rangle$ en restriction à V. En utilisant la convergence faible de u_n vers u,

$$\int_I u_n'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \langle w\,,u_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle w\,,u\rangle = \int_I u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Prouver que $u = 0$.
   Soit $v \in L^2(I)$,

$$\left|\int_I u_n'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|u_n'\|_2\|v\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   D'après la question 4 on a donc $\int_I u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$. En particulier, pour $v = u'$, on obtient que $u' = 0$. Donc $u \in V$ est constante. Par hypothèse sur V on a donc $u = 0$.

6. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite uniformément convergente sur I.

   Indication. On pourra utiliser le théorème d'Arzela–Ascoli.

   On rappelle l'énoncé du théorème d'Arzela–Ascoli.

   Théorème 2 (Arzela–Ascoli)**.** *Soit K un compact, on considère $\big(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\big)$. Une partie $A \subset \mathcal{C}^0(K)$ est d'adhérence compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

   (a) pour tout $x \in K$, $\{f(x) \mid f \in A\}$ est bornée ;

   (b) A est équicontinue, i.e. pour tout $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe U voisinage de x tel que $\forall f \in A$, $\forall y \in U$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $H^1(I)$ et admettent donc un unique représentant continu sur $K = \overline{I}$ (voir exercice 2). Par l'inégalité de Sobolev et l'inégalité (iii), il existe $C \geqslant 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_\infty \leqslant C\|u_n\|_{H^1} \leqslant C\sqrt{1+M^2}.$$

En particulier, pour tout $x \in K$, $\{u_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

D'après la question 1 de l'exercice 2, chacune des u_n est $\frac{1}{2}$-höldérienne avec une constante associée inférieure à $\|u_n'\|_2 \leqslant M$. Soient $x \in K$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $|y-x| < \delta$ alors $|u_n(y) - u_n(x)| \leqslant M|y-x|^{\frac{1}{2}} < M\sqrt{\delta}$. Donc $|u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon$ si on choisit $\delta = \frac{\varepsilon^2}{M^2}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

Par le thm. 2, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est d'adhérence compacte dans $\big(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\big)$. On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément convergente sur $K = \overline{I}$.

7. Conclure.

Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite extraite, on peut supposer que cette suite converge uniformément sur $\overline{I}$ vers une fonction $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$.

Comme I est borné, on a

$$\|u_n - \widetilde{u}\|_2^2 = \int_I |u_n(x) - \widetilde{u}(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{Long}(I)\|u_n - \widetilde{u}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{u}$ dans $L^2(I)$ et donc $\|\widetilde{u}\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\|u_n\|_2 = 1$.

De façon similaire à ce qu'on a fait à la question 4, pour tout $v \in L^2(I)$, la forme linéaire $\beta_v : u \mapsto \int_I u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $H^1(I)$, donc en restriction à V. Il existe donc $w \in V$ tel que $\beta_v = \langle w\,,\cdot\rangle$ en restriction à V. On a alors :

$$\left|\int_I \widetilde{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_I u_n(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_I |u_n(x) - \widetilde{u}(x)||v(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|u_n - \widetilde{u}\|_2\|v\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc

$$\int_I \widetilde{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_I u_n(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\langle w\,, u_n\rangle = \langle w\,, u\rangle = 0.$$

En prenant $v = \widetilde{u}$ on obtient $\|\widetilde{u}\|_2 = 0$, contradiction

Il existe donc une constante $C \geqslant 0$ telle que $\|u\|_2 \leqslant C\|u'\|_2$ pour tout $u \in V$.

Exercice 8 (Inégalité de Gagliardo–Nirenberg — *facultatif*)**.** On considère un intervalle ouvert I non borné. Le but de l'exercice est de prouver que pour tout $u \in H^1(I)$

$$\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u_2'\|^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

1. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout x et $y \in I$, montrer que $u(x)^2 = u(y)^2 + 2\int_x^y u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que la restriction de u à I vérifie (3).

Comme u^2 est $\mathcal{C}^1$, on a $u(x)^2 - u(y)^2 = \int_x^y (u^2)'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x, y \in I$, ce qui montre la relation souhaitée.

Comme $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et I n'est pas borné, il existe $y \in I$ tel que $u(y) = 0$. Grâce à la relation précédente, pour tout $x \in I$ on a :

$$|u(x)|^2 = 2\left|\int_x^y u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\left|\int_x^y |u(t)|^2\,\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{2}}\left|\int_x^y |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\|u\|_2\|u'\|_2,$$

par Cauchy–Schwarz, ce qui prouve (3) pour $u_{|I}$.

2. Montrer que (3) est vérifiée pour tout $u \in H^1(I)$.

   Dans le cas général on utilise une fois de plus la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(I)$. Soit $u \in H^1(I)$, il existe (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$. La convergence dans $H^1(I)$ implique la convergence dans $L^\infty(I)$ via l'inégalité de Sobolev (voir exercice 2 question 3). Elle implique aussi la convergence de (u_n) vers u et de (u_n') vers u' dans $L^2(I)$, par définition. Donc $\|u_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_\infty$, $\|u_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_2$ et $\|u_n'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u'\|_2$.

   D'après la question 1, la fonction u_n vérifie l'inégalité (3) pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, c'est aussi le cas de u.

3. En considérant $I =]0, +\infty[$, montrer que la constante $\sqrt{2}$ apparaissant dans (3) est optimale.

   Pour montrer l'optimalité de la constante $\sqrt{2}$, on peut chercher une fonction $u \in H^1(I)$ telle que (3) soit une égalité.

   Pour démontrer l'inégalité (3), on a appliqué l'inégalité de Cauchy–Schwarz à u et u'. Il est donc naturel de considérer le cas d'égalité dans cette inégalité, c'est-à-dire lorsque u' et u sont colinéaires, par exemple $u : x \mapsto e^{Ax}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Comme on veut $u \in L^2(]0, +\infty[)$, il faut $A < 0$. Considérons donc $u : x \mapsto e^{-x}$.

   On a bien $u \in H^1(I)$. D'un côté $\|u\|_\infty = 1$. De l'autre,

$$\|u'\|_2^2 = \|u\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

   Donc $\|u\|_\infty = 1 = \sqrt{2}\frac{1}{2} = \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u'\|_2^{\frac{1}{2}}$. Cela prouve l'optimalité de $\sqrt{2}$.