Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 3 – Équations, support et convergence au sens des distributions

---

Exercice 1 (Intégrales tronquées)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties mesurables de X telle que $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que :

$$\forall f \in L^1(X, \mu), \qquad \int_{X\setminus A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbf{1}_{X\setminus A_n}$ la fonction indicatrice de $X \setminus A_n$. Soit $f \in L^1(X, \mu)$, on a :

$$\int_{X\setminus A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$ et

$$\mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n, \\ 0 & \text{si } x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n. \end{cases}$$

Donc, μ-presque partout sur X, on a $\mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Cette suite est dominée par $|f|$ qui est intégrable sur X. La conclusion découle alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 2 (Support d'une distribution)**.**

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, montrer que $\operatorname{supp}(T_f) = \operatorname{supp}(f)$.

   On rappelle la caractérisation suivante du support d'une distribution T : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$x \notin \operatorname{supp}(T) \iff \exists U \text{ voisinage ouvert de } x \text{ tel que } T_{|U} = 0.$$

   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

   $$\big\langle (T_f)_{|U}\,, \varphi \big\rangle = \langle T_f\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f_{|U}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Big\langle T_{(f_{|U})}\,, \varphi \Big\rangle.$$

   Donc $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})}$.
   Soit $x \notin \operatorname{supp}(f)$, il existe U ouvert contenant x tel que $f_{|U} = 0$. Alors $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})} = 0$ et donc $x \notin \operatorname{supp}(T_f)$. Inversement, soit $x \notin \operatorname{supp}(T_f)$ il existe U intervalle ouvert contenant x tel que $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})} = 0$. Par injectivité de $g \mapsto T_g$ de $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ vers $\mathcal{D}'(U)$, on en déduit que $f_{|U} = 0$ et donc que $x \notin \operatorname{supp}(f)$.
   Finalement $x \notin \operatorname{supp}(T_f) \iff x \notin \operatorname{supp}(f)$ et donc $\operatorname{supp}(T_f) = \operatorname{supp}(f)$.

2. Déterminer le support de $\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   L'idée est de montrer que $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp}\big(\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$. Le support étant fermé on en déduit que $\operatorname{supp}\big(\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) = \mathbb{R}$. Le fait que $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp}\big(\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$ est naturel vu que $\big(\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)_{\mathbb{R}^*}$ est associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ (qui est L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^*$) et que cette fonction ne s'annule pas.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$, soit I un voisinage ouvert de x. Quitte à réduire I on peut supposer que $0 \notin I$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans I, positive et non nulle. Alors $\big\langle \big(\operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)\,, \chi \big\rangle$ est

l'intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{\chi(x)}{x}$ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, de signe constant et non nulle. Donc $\left\langle \left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right), \chi \right\rangle \neq 0$, et donc $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)_{|I} \neq 0$. Comme I est quelconque, $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ ne s'annule sur aucun voisinage de x et donc $x \in \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

On peut aussi utiliser la méthode astucieuse suivante. Par le cours lem. 1.6.6,

$$\mathrm{supp}\left(x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \subset \mathrm{supp}(x \mapsto x) \cap \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \subset \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Or, on a vu dans l'exercice 4 de la feuille 2 que $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. En particulier son support est $\mathbb{R}$, d'après la question 1. Donc $\mathbb{R} \subset \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et donc $\mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Résoudre l'équation $x^2T = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
On a vu dans l'exercice 4 de la feuille 2 que $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$. On connait donc une solution particulière de l'équation ce qui permet de se ramener à une équation homogène. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a donc :

$$x^2T = 1 \iff x^2\left(T - \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0 \iff \exists a, b \in \mathbb{C},\ T = \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) + a\delta_0 + b\delta_0',$$

où la seconde équivalence est donnée par le corollaire 1.5.11 des notes de cours.

Exercice 4 (Équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$2xT' - T = \delta_0. \tag{1}$$

On va d'abord considérer l'équation différentielle homogène associée :

$$2xT' - T = 0. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$).
   En restriction à $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle homogène (2) se ré-écrit sous la forme équivalente

   $$T' + \frac{1}{2x}T = 0,$$

   qui est résolue en la dérivée d'ordre maximale. D'après le cours (voir prop. 1.5.14) les solutions de cette équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ sont exactement les solutions $\mathcal{C}^\infty$. Une primitive de la fonction $a : x \mapsto \frac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$. Les solutions de (2) dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont alors les fonctions de la forme $x \mapsto C\sqrt{x}$, avec $C \in \mathbb{C}$.
   Par le même raisonnement, les solutions de (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$ sont les distributions associées à des fonctions de la forme $x \mapsto C\sqrt{-x}$, avec $C \in \mathbb{C}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression plus simple de la distribution $x\delta_0^{(k+1)}$. En déduire l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ dont le support est $\{0\}$ et qui sont solutions de (2).
   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

   $$\begin{aligned}\left\langle x\delta_0^{(k+1)}, \varphi\right\rangle = \left\langle \delta_0^{(k+1)}, x\varphi\right\rangle &= (-1)^{k+1}\left\langle \delta_0, x\varphi^{(k+1)} + (k+1)\varphi^{(k)}\right\rangle \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0) = -(k+1)\left\langle \delta_0^{(k)}, \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

   Donc $x\delta_0^{(k+1)} = -(k+1)\delta_0^{(k)}$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (2) supportée en 0. D'après le cours prop. 1.6.9, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $T = \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}$. On utilise maintenant que T satisfait l'équation (2) :

$$0 = 2x\left(\sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}\right)' - \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k \left(2x\delta_0^{(k+1)} - \delta_0^{(k)}\right) = -\sum_{k=0}^n a_k (2k+3)\delta_0^{(k)}.$$

Or, les $\left(\delta_0^{(k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour le vérifier il suffit de remarquer que, si $\varphi_j : x \mapsto \frac{x^j}{j!}\chi(x)$ où χ est une fonction plateau constante à 1 au voisinage de 0, alors $\langle \delta_0^{(k)}, \varphi_j \rangle = 1$ si $j = k$ et $\langle \delta_0^{(k)}, \varphi_j \rangle = 0$ sinon. Donc $a_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, et donc $T = 0$. Inversement 0 est bien solution de (2).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ entier.

L'équation différentielle (2) n'est pas résolue en T', ce qui créé une singularité en 0. Comme dans le cas d'une équation différentielle classique, on va donc d'abord raisonner séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherchera ensuite à recoller les solutions obtenues en des solutions sur $\mathbb{R}$ entier.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (2). Alors $T_{|\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left\langle 2x(T_{|\mathbb{R}_+^*})' - T_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi \right\rangle &= \left\langle (T_{|\mathbb{R}_+^*})', 2x\varphi \right\rangle - \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*}, -(2x\varphi)' - \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T, -(2x\varphi)' - \varphi \right\rangle = \left\langle 2xT' - T, \varphi \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc il existe $C_+ \in \mathbb{C}$ telle que $T_{|\mathbb{R}_+^*} = C_+(R_+)_{|\mathbb{R}_+^*}$ où on a noté $R_+ \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction $x \mapsto H(x)\sqrt{x}$ qui est bien L^1_{loc} sur $\mathbb{R}$. De même, il existe $C_- \in \mathbb{C}$ telle que $T_{|\mathbb{R}_-^*} = C_-(R_-)_{|\mathbb{R}_-^*}$ où on a noté $R_- \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction $x \mapsto H(-x)\sqrt{-x}$.

Vérifions que R_+ et R_- sont solutions de (2) sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \left\langle R_+', \varphi \right\rangle &= -\left\langle R_+, \varphi' \right\rangle = -\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \sqrt{x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sqrt{x}\varphi(x)\right]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

car $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)$ est intégrable en 0. Donc

$$\left\langle 2xR_+' - R_+, \varphi \right\rangle = \left\langle R_+', 2x\varphi \right\rangle - \langle R_+, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Donc R_+, et de même R_-, sont bien solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ entier.

Par linéarité de l'équation homogène, la distribution $T - C_+R_+ - C_-R_-$ est également solution de (2). On va vérifier que cette dernière est supportée en 0. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, alors

$$\begin{aligned} \langle T - C_+R_+ - C_-R_-, \varphi \rangle &= \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*} - C_+(R_+)_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi \right\rangle - C_-\langle R_-, \varphi \rangle \\ &= -C_- \int_{-\infty}^0 \sqrt{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Donc $(T - C_+R_+ - C_-R_-)_{|\mathbb{R}_+^*} = 0$ et $\mathbb{R}_+^* \cap \operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) = \emptyset$. De même, on vérifie que $\mathbb{R}_-^* \cap \operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) = \emptyset$ et donc $\operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) \subset \{0\}$. Par la question 2, on en déduit que $T = C_-R_- + C_+R_+$.

Finalement, les solutions de (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont exactement les combinaisons linéaires de R_- et R_+. En particulier ce sont des fonctions continues, et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Par linéarité de l'équation, il suffit de trouver une solution particulière $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (1). L'ensemble des solutions sera alors $\{T_0 + T \mid T \text{ est solution de } (2)\}$. Comme le second membre est δ_0, il est naturel de chercher une solution sous la forme $T_0 = \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}$ où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. En utilisant les calculs de la question (2), on a :

$$2xT_0' - T_0 = \left(\sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}\right) - \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)} = \delta_0 \iff -\sum_{k=0}^n a_k (2k+3)\delta_0^{(k)} = \delta_0$$
$$\iff \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{3}, \\ a_k = 0, \qquad \forall k \geqslant 1. \end{cases}$$

   Une solution particulière de (1) est donc $T_0 = -\frac{1}{3}\delta_0$. Finalement les solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont exactement les distributions de la forme $-\frac{1}{3}\delta_0 + C_-R_- + C_+R_+$ avec C_- et $C_+ \in \mathbb{C}$.

Exercice 5 (Support et produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on note $Z = f^{-1}(0)$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $fT = 0$, montrer que $\operatorname{supp}(T) \subset Z$.

   Comme f est continue Z est fermé. Soit $x \notin Z$, il existe I intervalle ouvert tel que $x \in I \subset \mathbb{R}\backslash Z$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction f ne s'annule pas sur un voisinage de $\operatorname{supp}(\varphi)$ et donc $\frac{1}{f}\varphi$ est bien définie et dans $\mathcal{D}(I)$. Alors

$$\langle T\,, \varphi\rangle = \left\langle fT\,, \frac{1}{f}\varphi \right\rangle = 0.$$

   Donc $T_{|I} = 0$ et $x \notin \operatorname{supp}(T)$. Donc $\operatorname{supp}(T) \subset Z$.

2. Soient $K \subset U \subset \mathbb{R}$ avec K compact et U ouvert, montrer qu'il existe $\chi \in \mathcal{D}(U)$ à valeurs dans $[0,1]$ et constante à 1 sur un voisinage de K.

   Comme $K \subset U$, il suffit d'appliquer la prop. 1.2.6 du cours sur les partitions de l'unité. Cette proposition est énoncée pour un intervalle mais la remarque 1.2.8 assure qu'on peut passer à un U ouvert quelconque.

Dans la suite, on fixe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre 0 telle que $\operatorname{supp}(T) \subset Z$. L'objectif est de montrer que dans ce cas $fT = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $K = \operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T)$.

3. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, montrer qu'il existe U_ε ouvert contenant K tel que $\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

   Comme $K \subset \operatorname{supp}(T) \subset Z = f^{-1}(0)$, il suffit de prendre $U_\varepsilon = f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$, qui est ouvert par continuité de f.

4. Construire une famille de fonctions $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon \in\,]0,1]}$ telle que :
   - $\forall \varepsilon \in\,]0,1]$, $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ et $\langle T\,, (1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0$;
   - $\langle T\,, \chi_\varepsilon f\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$, commençons par trouver une condition suffisante pour que $\langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0$. D'après le cours, si $\mathrm{supp}((1-\chi_\varepsilon)f\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ alors $\langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0$. On a

$$\mathrm{supp}((1-\chi_\varepsilon)f\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) \subset \mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) = \mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap K.$$

Il suffit donc que $\mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap K = \emptyset$, i.e. que χ_ε soit constante à 1 sur un voisinage de K. Supposons que l'on ait construit une fonction $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ vérifiant cette condition. Comme T est d'ordre 0, il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\langle T\,,\psi\rangle| \leqslant C\|\psi\|_\infty$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans le compact $\mathrm{supp}(\varphi)$. Comme $\chi_\varepsilon f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon f\varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi)$,

$$|\langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle| \leqslant C\|\chi_\varepsilon f\varphi\|_\infty \leqslant C\|\varphi\|_\infty\|\chi_\varepsilon f\|_\infty.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus U_\varepsilon$ on a $|\chi_\varepsilon(x)f(x)| = 0$. Si on suppose de plus que χ_ε est à valeurs dans $[0,1]$, alors pour tout $x \in U_\varepsilon$, $|\chi_\varepsilon(x)f(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon$ par la question 3. Donc $\|\chi_\varepsilon f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ et

$$|\langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_\infty\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Il suffit donc de prendre $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 sur un voisinage de K, ce qui est possible d'après la question 2.

5. Conclure que $fT = 0$.

   Par la question 4, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$,

$$\langle fT\,,\varphi\rangle = \langle T\,,f\varphi\rangle = \langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle + \langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle = \langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

   Comme le terme de gauche ne dépend pas de ε, on a $\langle fT\,,\varphi\rangle = 0$. Comme on a choisi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque, on a bien $fT = 0$.

6. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que T est d'ordre 0 ?

   D'après le cours, si $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a $fT = 0$. Dans la question 5, on a montré que, pour T d'ordre 0, si $\mathrm{supp}(T) \subset Z$ alors $fT = 0$. Cette condition est plus faible. En effet, si $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ alors $\mathrm{supp}(T) \subset Z$, mais si $\mathrm{supp}(T) \subset Z$ alors

$$\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(T) \cap \overline{\mathbb{R} \setminus Z} = \mathrm{supp}(T) \setminus \mathring{Z} \subset Z \setminus \mathring{Z},$$

   c'est-à-dire que $\mathrm{supp}(T)$ peut rencontrer la frontière de Z, qui est aussi la frontière de $\mathrm{supp}(f)$. Si on ne suppose pas que T est d'ordre 0, cette condition est trop faible. Par exemple, prenons $T = \delta_0'$, qui est d'ordre 1 et supporté par $\{0\}$, et $f : x \mapsto x$ de sorte que $Z = \{0\} = \mathrm{supp}(T)$. On a vu dans la question 2 de l'exercice 4 que $fT = x\delta_0' = -\delta_0 \neq 0$.

Exercice 6 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Montrer que les suites de distributions définies par les formules suivantes convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ et déterminer leur limite.

1. $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

   D'après le lemme de Riemann–Lebesgue (voir l'exercice 9 de la feuille 1), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle e_n\,,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Donc $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.

2. $A_n = n^{100} e_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_n^{(k)} = (in)^k e_n$. Donc $A_n = e_n^{(100)}$ en tant que fonction $\mathcal{C}^\infty$ et donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\langle A_n\,, \varphi\rangle = \langle e_n^{(100)}\,, \varphi\rangle = \langle e_n\,, \varphi^{(100)}\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Donc $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.

   Remarque. On a utilisé ici le fait que la dérivation est un opérateur continue de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans lui-même. Comme $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ alors $e_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. $B_n : x \mapsto \cos^2(nx)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \left(\frac{e_n + e_{-n}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e_{2n} + e_{-2n})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\langle e_{-2n}\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2inx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{2inx}\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x} = \overline{\langle e_{2n}\,, \overline{\varphi}\rangle} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
   d'après la question (1). Donc $e_{2n} \xrightarrow[n\to\pm\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et donc $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \frac{1}{2}$.

4. $C_n : x \mapsto n\sin(nx)H(x)$, où H est la fonction de Heaviside.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}\langle C_n\,, \varphi\rangle &= \int_0^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x) = \big[-\cos(nx)\varphi(x)\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)'\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{inx}\varphi(x)'\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-inx}\varphi(x)'\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0),\end{aligned}$$
   en appliquant le lemme de Riemann–Lebesgue à la fonction $H\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \delta_0$.

5. $D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\frac{k}{n}}$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\langle D_n\,, \varphi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$
   car on reconnait une somme de Riemann, la fonction φ étant continue sur le segment $[0,1]$. On en déduit que $D_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \mathbf{1}_{[0,1]}$.

6. $E_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\begin{aligned}\langle E_n\,, \varphi\rangle &= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) - \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 2\varphi'(0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle -2\delta_0'\,, \varphi\rangle,\end{aligned}$$
   de sorte que $E_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} -2\delta_0'$.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est d'ordre 0 car somme de Dirac, en revanche la limite est d'ordre 1. L'ordre n'est donc pas continu sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

7. $F_n = e_n \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Indication. Pour la cas 7, on pourra utiliser sans démonstration que $\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\langle F_n\,, \varphi\rangle = \left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), e_n\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Par le lemme de Hadamard, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi : x \mapsto \varphi(0) + x\psi(x)$. Soit $\varepsilon \in]0, M]$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Comme $e_n\psi$ est continue sur $[-M, M]$,

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{-M}^{M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Par ailleurs, comme $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, M]$,

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{M} \frac{e_n(x) - e_n(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2i\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2i\int_0^M \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{nM} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

   Finalement,

$$\langle F_n\,, \varphi\rangle = \int_{-M}^{M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x + 2i\varphi(0)\int_0^{nM} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

   En appliquant le lemme de Riemann–Lebesgue à $\psi\mathbf{1}_{[-M,M]} \in L^1(\mathbb{R})$, le premier terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. D'après l'indication, le second converge vers $i\pi\varphi(0)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle F_n\,, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle i\pi\delta_0\,, \varphi\rangle,$$

   c'est-à-dire $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} i\pi\delta_0$.

Définition (Translations)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\tau_a(\varphi) : x \mapsto \varphi(x-a)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit $\tau_a(T)$ par la relation $\langle \tau_a(T)\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \tau_{-a}(\varphi)\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Translations et dérivation)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{1}{a}(T - \tau_a(T)) \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{D}'} T'$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

$$\left\langle \frac{T - \tau_a(T)}{a}\,, \varphi \right\rangle = \frac{1}{a}\big(\langle T\,, \varphi\rangle - \langle \tau_a(T)\,, \varphi\rangle\big) = \frac{1}{a}\big(\langle T\,, \varphi\rangle - \langle T\,, \tau_{-a}(\varphi)\rangle\big) = -\left\langle T\,, \frac{\tau_{-a}\varphi - \varphi}{a} \right\rangle.$$

On a $\frac{\tau_{-a}\varphi-\varphi}{a} : x \mapsto \frac{\varphi(x+a)-\varphi(x)}{a}$. On reconnait la fonction φ_a de l'exercice 1 de la feuille 2, dont on a montré qu'elle converge vers φ' dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $a \to 0$. Par continuité de T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\left\langle \frac{T - \tau_a(T)}{a}\,, \varphi \right\rangle = -\langle T\,, \varphi_a\rangle \xrightarrow[a\to 0]{} -\langle T\,, \varphi'\rangle = \langle T'\,, \varphi\rangle,$$

d'où le résultat.

Définition (Dual topologique)**.** Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(\mathbb{R})'$ l'espace des formes linéaires continues sur $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Cet espace est muni de la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|_p$.

Définition (Convergence faible dans L^p)**.** On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R})$ *converge faiblement* vers $f \in L^p(\mathbb{R})$ si : $\forall \Phi \in L^p(\mathbb{R})'$, $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(f)$. On note alors $f_n \rightharpoonup f$.

On rappelle les théorèmes importants suivants, qui serviront dans l'exercice 8.

Théorème 1 (Théorème de représentation)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on note $I_f \in L^q(\mathbb{R})'$ la forme linéaire $I_f : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.*

- *L'application $I : f \mapsto I_f$ de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})'$ est isométrique, en particulier injective.*
- *Si $q < +\infty$ alors I est surjective.*

Théorème 2 (Banach–Steinhaus)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit A une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si $\forall x \in E$ $\sup_{\phi\in A}\|\phi(x)\|_F < +\infty$ alors $\sup_{\phi\in A}\|\phi\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.*

Exercice 8 (Convergence faible et convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de comparer les notions de convergence faible et de convergence au sens des distributions pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si $f_n \rightharpoonup f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

   Notons $q \in [1, +\infty]$ l'exposant conjugué de p, caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$. Alors, comme $f_n \rightharpoonup f$,

$$\langle f_n\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = I_\varphi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_\varphi(f) = \langle f\,, \varphi\rangle.$$

   Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$.

   Par le théorème 1, on a $\|f_n\|_p = \|I_{f_n}\|_{(L^q)'}$. Il s'agit donc de vérifier que $(I_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors

$$I_{f_n}(g) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = I_g(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_g(f).$$

   Donc, pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$, la suite $(I_{f_n}(g))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Banach–Steinhaus, on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|I_{f_n}\|_{(L^q)'} < +\infty$. Et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^p(\mathbb{R})$.

2. On suppose que $p \in\,]1, +\infty[$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et s'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$, montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $T = T_f$ et que $f_n \rightharpoonup f$.

   On cherche d'abord à construire le $f \in L^p(\mathbb{R})$ limite. La distribution T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme $p > 1$, on a $q < +\infty$, et on a vu dans l'exercice 8 de la feuille 1 que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^q(\mathbb{R})$. On va montrer que T est continu sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la topologie de $L^q(\mathbb{R})$, ce qui permettra de l'étendre uniquement en un élément de $L^q(\mathbb{R})'$. Le théorème de représentation 1 nous donnera alors le f recherché.

   Notons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_p < +\infty$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle f_n\,, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f_n\varphi\|_1 \leqslant \|f_n\|_p\|\varphi\|_q \leqslant M\|\varphi\|_q.$$

En passant à la limite dans le terme de gauche, $|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_q$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La forme linéaire T est donc continue pour la norme $\|\cdot\|_q$ sur le sous-espace dense $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc il existe un unique prolongement de T en un élément de $L^q(\mathbb{R})'$ de même norme. Comme $p > 1$, on a $q < +\infty$ et il existe un unique $f \in L^p(\mathbb{R})$ tel que ce prolongement soit I_f et $\|f\|_p = \|I_f\|_{(L^q)'} \leqslant M$. En particulier, T est la restriction de I_f à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $T = T_f$.
Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$, pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
|I_g(f_n) - I_g(f)| =& \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+ \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \|f_n\|_p\|g-h\|_q + |\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle| + \|f\|_p\|g-h\|_q \\
\leqslant& 2M\|g-h\|_q + |\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle|.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$, il existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\|g-h\|_q \leqslant \varepsilon$. Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$, on a $|\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout n assez grand. Donc $|I_g(f_n) - I_g(f)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout n assez grand. Et donc $I_g(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_g(f)$ pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$. D'après le thm. 1, comme $p < +\infty$ toute forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R})$ est de la forme I_g avec $g \in L^q(\mathbb{R})$. Donc $f_n \rightharpoonup f$.

3. Toujours dans le cas $p \in \,]1,+\infty[$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et qui ne converge pas faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$.
D'après les questions 1 et 2, il faut et il suffit de construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$. Une façon de faire cela est d'envoyer de la masse à l'infini.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n = n\mathbf{1}_{[n,n+1]}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle f_n\,,\varphi\rangle = n\langle \mathbf{1}_{[n,n+1]}\,,\varphi\rangle = n\int_n^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par compacité du support de φ. Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait faiblement, alors elle serait bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ par la question 1. Or $\|f_n\|_p = n\|\mathbf{1}_{[n,n+1]}\|_p = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4. Dans le cas $p = 1$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens des distributions mais pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sur le même principe qu'à la question précédente, on pose $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\|f_n\|_1 = 1$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n\,,\varphi\rangle = \int_n^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.
Par l'absurde, supposons que $f_n \rightharpoonup f$. D'après la question 1 on a aussi convergence au sens des distributions, donc $T_f = 0$ par unicité de la limite et donc $f = 0$ par injectivité de $g \mapsto T_g$. On a donc $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour toute forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$. Prenons par exemple

$\Phi = I_{\mathbf{1}}$, c'est-à-dire $\Phi : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Phi(f_n) = 1$, contradiction. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$.

L'exercice suivant est adapté de l'examen partiel de 2021.

Exercice 9 (Une distribution d'ordre 2)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on définit $T_n : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$T_n : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \ln(n)\varphi'(0).$$

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que T_n est une distribution d'ordre 1 exactement.

   Soit $n \geqslant 2$. On peut montrer à la main que T est une distribution d'ordre au plus 1. On peut aussi remarquer que $T_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{1}{k}}\right) - n\delta_0 - \ln(n)\delta_0'$ et que donc $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   On rappelle que $\delta_a^{(k)}$ est d'ordre exactement k pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ (voir l'exercice 7 de la feuille 2). Comme une somme de distributions d'ordre $\leqslant 1$ est d'ordre $\leqslant 1$, on a bien T_n d'ordre $\leqslant 1$.

   Si T_n était d'ordre 0 alors, par le même argument, $\delta_0' = \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{1}{k}} - T_n - n\delta_0\right)$ serait d'ordre 0, ce qui est absurde. Donc T_n est d'ordre 1.

2. Déterminer le support de T_n, pour tout $n \geqslant 2$.

   Soit $n \geqslant 2$, on note $S_n = \{0\} \sqcup \left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$. Montrons que $\operatorname{supp}(T_n) = S_n$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus S_n$, alors $\langle T_n\,, \varphi\rangle = 0$. Donc $(T_n)_{|\mathbb{R}\setminus S_n} = 0$ et donc $\operatorname{supp}(T_n) \subset S_n$.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit I un voisinage de $\frac{1}{k}$. Quitte à restreindre I, on peut supposer que I est un intervalle ouvert et $I \subset \left]\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right[$. D'après la question 2 de l'exercice 5, il existe $\chi \in \mathcal{D}(I)$ égale à 1 au voisinage $\frac{1}{k}$. On a donc $\langle T_n\,, \chi\rangle = \left\langle \delta_{\frac{1}{k}}\,, \chi\right\rangle = 1$. C'est valable pour tout I voisinage de $\frac{1}{k}$, donc $\frac{1}{k} \in \operatorname{supp}(T_n)$.

   De même, soit I un voisinage de 0, quitte à le réduite, on peut supposer que c'est un intervalle ouvert inclus dans $\left]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right[$. Il existe alors $\chi \in \mathcal{D}(I)$ égale à 1 au voisinage de 0 et on a $\langle T_n\,, \chi\rangle = -n\chi(0) - \ln(n)\chi'(0) = -n$. C'est valable pour tout voisinage de 0, donc $0 \in \operatorname{supp}(T_n)$ et $S_n \subset \operatorname{supp}(T_n)$. D'où l'égalité.

3. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre inférieur ou égal à 2 telle que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$.

   Indication. On rappelle qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, appelé *constante d'Euler–Mascheroni*, tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\langle T_n\,, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) + \varphi'(0)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

   D'après l'indication, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right| \leqslant \frac{1}{k^2}\|\varphi''\|_\infty \tag{i}$$

   par l'inégalité de Taylor–Lagrange. Le terme de droite étant sommable, la série converge et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right).$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n\,,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\varphi(0)-\frac{1}{k}\varphi'(0)\right)+\gamma\varphi'(0)\in\mathbb{C}.$$

D'après le cor. 1.7.10 du cours, le terme de droite définit une distribution T, et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a grâce à la majoration (i) :

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| = \left|\sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\varphi(0)-\frac{1}{k}\varphi'(0)\right)+\gamma\varphi'(0)\right| \leqslant \gamma\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}.$$

Donc T est bien d'ordre au plus 2.

4. Déterminer le support de T.

   Montrons que $\mathrm{supp}(T) = S := \{0\}\sqcup\left\{\frac{1}{k}\;\middle|\; k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

   Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi)\subset\mathbb{R}\setminus S$. Comme $S_n\subset S$ pour tout $n\geqslant 2$, on a $\mathrm{supp}(\varphi)\subset\mathbb{R}\setminus S_n$ et donc $\langle T_n\,,\varphi\rangle = 0$. En passant à la limite, $\langle T\,,\varphi\rangle = 0$. Donc T est nulle en restriction à $\mathbb{R}\setminus S$, et $\mathrm{supp}(T)\subset S$.

   Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on montre exactement comme à la question 2 que $\frac{1}{k}\in\mathrm{supp}(T)$. Donc $\left\{\frac{1}{k}\;\middle|\; k\in\mathbb{N}^*\right\}\subset\mathrm{supp}(T)$. Donc $\overline{\left\{\frac{1}{k}\;\middle|\; k\in\mathbb{N}^*\right\}} = S\subset\mathrm{supp}(T)$, ce qui montre l'égalité.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à prouver que T est d'ordre 2 exactement. Soit $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau sur $[-1,1]$, i.e. χ est à valeurs dans $[0,1]$ et est constante à 1 sur $[-1,1]$. On définit $\varphi_k : x\mapsto \frac{1}{k}\chi(x)\sin(kx)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

5. Montrer que les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ sont bornées.

   Soit $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$|\varphi_k(x)| = \left|\frac{1}{k}\chi(x)\sin(kx)\right| \leqslant \frac{1}{k}\|\chi\|_\infty\|\sin\|_\infty = \frac{1}{k}\leqslant 1$$
$$|\varphi_k'(x)| = \left|\frac{1}{k}\chi'(x)\sin(kx)+\chi(x)\cos(kx)\right| \leqslant \frac{1}{k}\|\chi'\|_\infty + \|\chi\|_\infty = 1+\|\chi'\|_\infty.$$

   Donc les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ sont bornées.

6. En utilisant la formule de Taylor–Lagrange pour sin en 0, montrer qu'il existe $C>0$ tel que :

$$\forall n\geqslant 2,\ \forall k\in\{1,\cdots,n-1\},\qquad \left|\sum_{j=k+1}^{n}\varphi_k\left(\frac{1}{j}\right)-\ln(n)+\ln(k)\right|\leqslant C.$$

   Indication. On pourra vérifier que $\sum_{j>k}\frac{1}{j^2}\leqslant\frac{1}{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

   Commençons par vérifier l'indication. On fait une comparaison série intégrale. Pour tout $j\geqslant 2$, $\frac{1}{j^2}\leqslant\int_{j-1}^{j}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ par positivité et décroissance de $x\mapsto\frac{1}{x^2}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a donc

$$\sum_{j>k}\frac{1}{j^2}\leqslant\int_k^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_k^{+\infty} = \frac{1}{k}.$$

   Soit $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[0,1]$, on a $\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$. Par l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à sin entre 0 et kx, $|\sin(kx)-kx|\leqslant k^2x^2$. Donc $|\varphi_k(x)-x|\leqslant kx^2$.

Soient $n \geqslant 2$ et $k \in \{1, \dots, n-1\}$, pour tout $j \geqslant k+1$ on a $\left|\varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j}\right| \leqslant \frac{k}{j^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k)\right| &\leqslant \left|\sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j}\right| + \left|\sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) + \ln(k)\right| \\ &\leqslant k \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j^2} + \left|\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n)\right) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \ln(k)\right)\right| \\ &\leqslant 1 + \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n)\right| + \left|\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \ln(k)\right|,\end{aligned}$$

où on a utilisé la majoration de l'indication. Comme $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, cette suite est bornée, disons par M. En posant $C = 1 + 2M$ on obtient bien :

$$\left|\sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k)\right| \leqslant C.$$

7. Montrer que la suite $\big(\langle T\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)\big)_{k\geqslant 1}$ est bornée.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $n > k$, en utilisant les formules explicites de φ_k et φ_k' calculées à la question 5, on obtient :

$$\begin{aligned}|\langle T_n\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - n\varphi_k(0) - \ln(n)\varphi_k'(0) + \ln(k)\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{k} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right)\right| + \left|\sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k)\right| \\ &\leqslant k\|\varphi_k\|_\infty + C,\end{aligned}$$

   où C est la constante obtenue à la question 6. La majoration de la question 5 montre que $\|\varphi_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$ et donc $|\langle T_n\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| \leqslant C + 1$ pour tout $n > k$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $|\langle T\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| \leqslant C + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

8. En conclure que T est d'ordre 2.

   On sait déjà par la question 3 que T est d'ordre au plus 2. On raisonne par l'absurde. Si T était d'ordre $\leqslant 1$, il existerait une constante $M \geqslant 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans le compact $\operatorname{supp}(\chi)$:

$$|\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant M\big(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty\big).$$

   En particulier, d'après la question 5, la suite $(\langle T\,, \varphi_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ serait bornée par $2M$. Or, la question 7, on a $\langle T\,, \varphi_k\rangle = \ln(k) + O(1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. On obtient donc une contradiction, et T est bien d'ordre 2 exactement.