Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 1 – Rappels et boite à outils

Notations. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- Le *support* de $f : \Omega \to \mathbb{C}$, noté $\operatorname{supp}(f)$, est l'adhérence dans Ω de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact. On note aussi $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
- Soit $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (modulo égalité presque partout) telles que $f_{|K} \in L^p(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où $f_{|K}$ est la restriction de f à K.
- On appelle *multi-indice* tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur*, et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on note $x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$.
- Soient $K \subset \Omega$ un compact et $f \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, on note $N_{K,l}(f) = \sup\big\{|\partial^\alpha f(x)| \bigm| |\alpha| \leqslant l \text{ et } x \in K\big\}$.

Exercice 1 (Lemme de Hadamard)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi_\alpha(x). \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre $k-1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} D_0^j f(x, \dots, x) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D_{tx}^k f(x, \cdots, x) \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(tx) \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ici, la seconde ligne s'obtient à partir de la première en utilisant pour $0 \leqslant j \leqslant k$ la j-linéarité de $D_y^j f$, la différentielle j-ième de f en un point y :

$$D_y^j f(x, \dots, x) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_j \leqslant d} x_{i_1} \cdots x_{i_j} \frac{\partial^j f(y)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} x^\alpha \partial^\alpha f(y).$$

On obtient donc la formule souhaitée en posant pour tout multi-indice α de longueur k :

$$\psi_\alpha : x \longmapsto \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(tx) \,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $l \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{k+l}(\mathbb{R}^d)$, montrer que les $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ sont $\mathcal{C}^l$ sur $\mathbb{R}^d$ et expliciter leurs dérivées.
   Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k$ et soit $h_\alpha : (x,t) \mapsto (1-t)^{k-1}\partial^\alpha f(tx)$ de $\mathbb{R}^d \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\partial^\alpha f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $h_\alpha(\cdot,t)$ est également de classe $\mathcal{C}^l$. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant l$, dans la suite on notera $\partial^\beta h_\alpha(x,t)$ la valeur en $x \in \mathbb{R}^d$ de $\partial^\beta(h_\alpha(\cdot,t))$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,1]$ on a alors :
$$\partial^\beta h_\alpha(x,t) = (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} f(tx).$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $\partial^\beta h_\alpha(x,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$, en particulier mesurable. Soit $R > 0$ et $B_R \subset \mathbb{R}^d$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Pour tout $x \in B_R$ et $t \in [0,1]$:
$$\left|\partial^\beta h_\alpha(x,t)\right| \leqslant \left|\partial^{\alpha+\beta} f(tx)\right| \leqslant N_{B_R,k+l}(f).$$
   Le terme de droite est intégrable sur $[0,1]$ et indépendant de $x \in B_R$. En appliquant de façon répétée le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on obtient que
$$\psi_\alpha : x \longmapsto \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 h_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$$
   admet des dérivées partielles continues sur l'intérieur de B_R à tout ordre inférieur à l. Donc ψ_α est $\mathcal{C}^l$ sur l'intérieur de B_R. Comme R est quelconque, $\psi_\alpha \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d)$. De plus, ses dérivées partielles s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale : pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant l$,
$$\partial^\beta \psi_\alpha(x) = \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 \partial^\beta h_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} f(tx)\,\mathrm{d}t. \tag{i}$$

3. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ une boule fermée centrée en 0. Pour tout α de longueur $|\alpha| = k$, montrer que $N_{B,l}(\psi_\alpha) \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \leqslant N_{B,k+l}(f)$.
   Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| = k$ et $|\beta| \leqslant l$. Pour tout $x \in B$, l'équation (i) donne que :
$$\left|\partial^\beta \psi_\alpha(x)\right| \leqslant \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \left|\partial^{\alpha+\beta} f(tx)\right| \mathrm{d}t \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \int_0^1 k(1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = N_{B,l}(\partial^\alpha f).$$
   On obtient la première inégalité en passant au sup sur $x \in B$ et β de longueur au plus l. La seconde égalité est une conséquence directe de la définition de $N_{B,k+l}(f)$.

   Remarque. Ici et dans les questions précédentes, on considère $\partial^\alpha f$ uniquement sur le segment joignant 0 à x. On peut donc raisonner de même en remplaçant $\mathbb{R}^d$ (resp. B) par un ouvert (resp. un compact) étoilé en 0.

4. Dans cette question on suppose que $d = 1$, de sorte que l'équation (1) se ré-écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!} + x^k \psi_k(x).$$
   On suppose que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à quelle condition a-t-on $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?
   D'après la question 2, la fonction ψ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il s'agit donc de savoir à quelle condition le support de ψ_k est compact (i.e. borné, vu qu'il est fermé par définition). Si ψ_k est à support compact, alors il en est de même du polynôme de Taylor de degré $k-1$ de f en 0 :
$$\sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\frac{X^j}{j!} = f - X^k \psi_k.$$

Ce polynôme est donc nul. Inversement, si ce polynôme est nul alors ψ_k s'annule hors du compact $\operatorname{supp}(f) \cup \{0\}$, et donc $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si toutes les dérivées de f d'ordre strictement inférieur à k s'annulent en 0.

Exercice 2 (Inégalité de Hölder généralisée)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on munit $L^p(X, \mu)$ de sa norme d'espace de Banach $\|\cdot\|_p$ définie pour $f \in L^p(X, \mu)$ par :

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < +\infty, \\ \inf\big\{M \geqslant 0 \bigm| |f(x)| \leqslant M \text{ pour presque tout } x \in X\big\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On rappelle l'*inégalité de Hölder* classique : soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, où p et $q \in [1, +\infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(X, \mu)$, et de plus $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

1. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que pour tout $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$ on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
   Commençons par supposer que $r < +\infty$ et posons $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$, de sorte que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, on a $f^r \in L^{p'}(X, \mu)$, et de même $g^r \in L^{q'}(X, \mu)$. D'après le résultat classique on a donc $(fg)^r \in L^1(X, \mu)$, i.e. $fg \in L^r(X, \mu)$, et :
   $$\|fg\|_r^r = \int_X |f(x)|^r |g(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f^r\|_{p'} \|g^r\|_{q'}.$$
   Si $p < +\infty$ alors $p' < +\infty$ et :
   $$\|f^r\|_{p'} = \left(\int_X |f(x)|^{rp'} \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{r}{p}} = \|f\|_p^r.$$
   Si $p = +\infty$ alors $p' = +\infty$, et on a aussi $\|f^r\|_{p'} = \|f\|_p^r$. De même $\|g^r\|_{q'} = \|g\|_q^r$. Finalement on a bien $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
   Si maintenant $r = +\infty$ alors on a nécessairement $p = +\infty = q$. Dans ce cas, fg est bien essentiellement bornée et $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, ce qui conclut la preuve.
2. Dans cette question on suppose $\mu(X) < \infty$. Montrer que si $r \leqslant q$ alors $L^q(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$ et $\|f\|_r \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q(X, \mu)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   Sans perte de généralité on peut supposer que $1 \leqslant r < q \leqslant +\infty$. On a alors $0 < \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant 1$, et il existe donc $p \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$. Soit $\mathbf{1} : X \to \mathbb{R}$ la fonction constante à 1. Comme $\mu(X) < +\infty$, on a $\mathbf{1} \in L^p(X, \mu)$ et $\|\mathbf{1}\|_p = \mu(X)^{\frac{1}{p}}$.
   Soit $f \in L^q(X, \mu)$, en appliquant l'inégalité de Hölder généralisée de la question 1 à f et $g = \mathbf{1}$ on obtient que $f \in L^r(X, \mu)$, et même que $\|f\|_r \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_q$.
   L'inclusion réciproque est fausse en général, par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est dans $L^1([0, 1])$ mais pas dans $L^2([0, 1])$.
3. Donner un contre-exemple à l'inclusion de la question 2 lorsque $\mu(X) = +\infty$.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dans $L^2([1, +\infty[)$ mais pas dans $L^1([1, +\infty[)$.
4. Déduire de la question 2 que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, il est de mesure finie pour la mesure de Lebesgue. D'après la question 2 on a donc $f_{|K} \in L^p(K) \subset L^1(K)$. Ainsi $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3 (Continuité des translations dans L^p pour $p < +\infty$)**.** Soit $p \in [1, +\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a(f) : x \mapsto f(x-a)$. Le but de l'exercice est de prouver que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0. \tag{2}$$

1. Montrer que (2) est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,R)$ la boule de centre 0 et de rayon R. Soit $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\tau_a(f)$ est à support dans $B(0, R+1)$. On a alors :

   $$\|\tau_a(f) - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a(f)(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{B(0,R+1)} |f(x-a) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

   Comme $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour tout $a \in B(0,\delta)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x-a) - f(x)| < \varepsilon$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| \leqslant \delta$:

   $$\|\tau_a(f) - f\|_p \leqslant \varepsilon \operatorname{Vol}(B(0,R+1))^{\frac{1}{p}}.$$

2. Conclure grâce à la densité de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
   Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On a :

   $$\|\tau_a(f) - f\|_p \leqslant \|\tau_a(f) - \tau_a(g)\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p + \|g - f\|_p = 2\|f - g\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\left(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\right)$ il existe $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. D'après la question 1, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_a(g) - g\|_p < \varepsilon$ dès que $\|a\| < \delta$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < \delta$ on a donc $\|\tau_a(f) - f\| < 3\varepsilon$, ce qui établit (2).

Définition (Convolution)**.** Soient f et g mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, si $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, on note $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$. La fonction $f * g$ est appelée la *convolée* de f et g.

Exercice 4 (Convolution : premiers exemples)**.**

1. Soient f et g mesurables et soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si $f * g(x)$ est bien défini, montrer que $g * f(x)$ est bien défini et que $g * f(x) = f * g(x)$.
   Par le changement de variable $z = x - y$, on obtient :

   $$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)||f(y)| \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)||f(x-z)| \,\mathrm{d}z.$$

   Le terme de droite est fini par hypothèse, donc $(g * f)(x)$ est bien défini. Le même changement de variable sans les modules montre que $(g * f)(x) = (f * g)(x)$.

2. Soient $a < b$ et $c < d$, on note $\mathbf{1}_{[a,b]}$ et $\mathbf{1}_{[c,d]}$ les fonctions indicatrices de $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement. Montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

   $$\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)\mathbf{1}_{[c,d]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leqslant x - y \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   De plus,

   $$\begin{cases} a \leqslant x - y \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases} \iff \begin{cases} x - b \leqslant y \leqslant x - a \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases} \iff y \in [x-b, x-a] \cap [c,d]$$

de sorte que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x-\cdot)\mathbf{1}_{[c,d]} = \mathbf{1}_{[x-b,x-a]\cap[c,d]} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]} : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[x-b,x-a]\cap[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{Long}\big([x-b,x-a]\cap[c,d]\big).$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $b-a \leqslant d-c$, d'après la question 1.

- Si $x \leqslant a+c$, alors $x-a \leqslant c$ et $[x-b,x-a]\cap[c,d] = \emptyset$. Donc $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a]\cap[c,d]\big) = 0$.
- Si $a+c \leqslant x \leqslant b+c$, alors $x-b \leqslant c \leqslant x-a$. Comme $b-a \leqslant d-c$, on a aussi $x-a \leqslant d$. Donc $[x-b,x-a]\cap[c,d] = [c,x-a]$ et $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a]\cap[c,d]\big) = x-a-c$.
- Si $b+c \leqslant x \leqslant a+d$, alors $c \leqslant x-b \leqslant x-a \leqslant d$ et $[x-b,x-a]\cap[c,d] = [x-b,x-a]$ est de longueur $b-a$.
- Si $a+d \leqslant x \leqslant b+d$, alors $c \leqslant x-b \leqslant d \leqslant x-a$ et $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a]\cap[c,d]\big) = b+d-x$.
- Si $x \geqslant b+d$ alors $d \leqslant x-b$ et donc $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a]\cap[c,d]\big) = 0$.

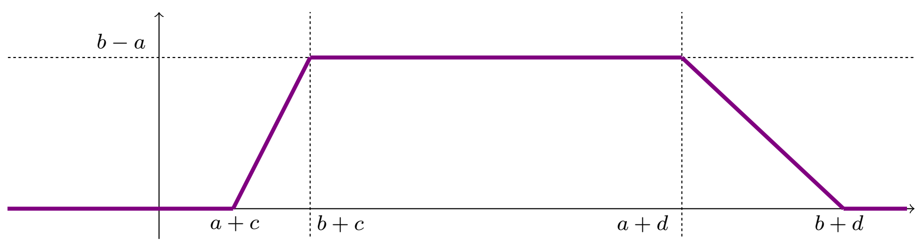

FIGURE 1 – Graphe de $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$, qui est continue et affine par morceaux.

3. Soient $a<b$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ est bien définie. Vérifier que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

   Soient x et $y \in \mathbb{R}$. On a $\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)f(y) = 0$ si $x-y \notin [a,b]$, i.e. si $y \notin [x-b,x-a]$. Comme f est continue sur $[x-b,x-a]$ elle y est bornée, et pour tout $y \in [x-b,x-a]$, $|\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)f(y)| \leqslant \|f\|_{[x-b,x-a],0}$. Donc $\mathbf{1}_{[a,b]} * f(x)$ est bien défini.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-b}^{x-a} f(y) = F(x-a) - F(x-b),$$

   où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n'importe quelle primitive de f, par exemple $F : z \mapsto \int_0^z f(y)\,\mathrm{d}y$. Comme $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, sa primitive est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, et $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ également. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(\mathbf{1}_{[a,b]} * f\big)'(x) = F'(x-a) - F'(x-b) = f(x-a) - f(x-b).$$

Le résultat suivant donne un critère assurant que la convolée de deux fonctions f et g est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Il donne aussi un contrôle sur les normes L^p de $f*g$. On le prouvera dans plusieurs cas particuliers dans l'exercice 5. Le cas général fait l'objet de l'exercice 10.

Théorème 1 (Inégalité de Young)**.** *Soient p, q et $r \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.*

Exercice 5 (Inégalité de Young, cas particuliers).

1. Prouver le théorème 1 pour $p = q = r = 1$.
   Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par le théorème de Fubini–Tonelli :
   $$\int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y\in\mathbb{R}^d}|g(y)|\int_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty. \quad \text{(ii)}$$
   La fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Par le théorème de Fubini, $f * g$ est donc bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et intégrable. Enfin, par l'équation (ii),
   $$\|f * g\|_1 = \int_{x\in\mathbb{R}^d}|f * g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_1\|g\|_1.$$

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un compact et soit $x \in C$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a :
   $$f(x-y) \neq 0 \implies x - y \in \mathrm{supp}(f) \iff y \in \{x\} - \mathrm{supp}(f) \implies y \in C - \mathrm{supp}(f).$$
   Notons $K = C - \mathrm{supp}(f)$, qui est compact car image du compact $C \times \mathrm{supp}(f)$ par $(a, b) \mapsto a - b$. Par contraposée, $f(x - \cdot)$ est nulle hors de K. Donc,
   $$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_K f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = f * (\mathbf{1}_K g)(x),$$
   où $\mathbf{1}_K$ est l'indicatrice de K. Comme $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_{|K} \in L^1(K)$ donc $\mathbf{1}_K g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 1, la fonction $f*(\mathbf{1}_K g)$ est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et intégrable. Comme $f * g$ et $f * (\mathbf{1}_K g)$ coïncident sur C, la fonction $f * g$ est bien définie presque partout sur C, et $(f * g)_{|C} \in L^1(C)$. Comme C est quelconque, on a bien $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

3. Soient f, g et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * (g * h) = (f * g) * h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
   D'après la question 1, $f * (g * h)$ est bien définie presque partout. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :
   $$f * (g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)(g * h(y))\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)h(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y. \quad \text{(iii)}$$
   Comme dans la question 1, par Fubini–Tonelli on a :
   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}|h(z)|\int_{\mathbb{R}^d}|g(y-z)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \|f\|_1\|g\|_1\|h\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$
   Donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,
   $$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < +\infty$$
   On suppose dorénavant qu'on a choisit un tel x. On peut alors appliquer le théorème de Fubini pour échanger les intégrales dans le terme de droite de (iii). À l'aide du changement de variable $y = z + t$, on obtient alors :
   $$\begin{aligned}f * (g * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)\,\mathrm{d}y\right)h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)h(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}(f * g(x-z))h(z)\,\mathrm{d}z = (f * g) * h(x).\end{aligned}$$
   Cette égalité étant valable presque partout, on a bien $f * (g * h) = (f * g) * h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

4. Prouver le théorème 1 lorsque $r=+\infty$. Montrer que $f*g$ est alors uniformément continue.

Comme $r=+\infty$, on a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soient $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$. Soit $x\in\mathbb{R}^d$, on a $f(x-\cdot)\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f(x-\cdot)\|_p=\|f\|_p$. Par Hölder, $f*g(x)$ est bien défini et :

$$|f*g(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\|f(x-\cdot)\|_p\|g\|_q=\|f\|_p\|g\|_q.$$

Finalement, $f*g\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$, comme attendu.

En terme des opérateurs de translation introduits dans l'exercice 3, l'uniforme continuité de $f*g$ signifie que $\left\|\tau_a(f*g)-f*g\right\|_\infty\xrightarrow[a\to 0]{}0$. C'est cette propriété qu'on va prouver. Pour tout x et $a\in\mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}|\tau_a(f*g)(x)-f*g(x)|=|f*g(x-a)-f*g(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\big(f(x-a-y)-f(x-y)\big)g(y)\,\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left|\big(\tau_a(f)-f\big)(x-y)\right||g(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\|\tau_a(f)-f\|_p\|g\|_q,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder et le fait que $(\tau_a(f)-f)(x-\cdot)$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et de même norme que $\tau_a(f)-f$. On obtient que $\left\|\tau_a(f*g)-f*g\right\|_\infty\leqslant\|\tau_a(f)-f\|_p\|g\|_q$.

Quitte à échanger les rôles de f et g dans l'inégalité précédente (ce qui est possible d'après la question 1 de l'exercice 4), on peut supposer que $p<+\infty$. Alors, par la continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ prouvée dans l'exercice 3, on a :

$$\left\|\tau_a(f*g)-f*g\right\|_\infty\leqslant\|\tau_a(f)-f\|_p\|g\|_q\xrightarrow[a\to 0]{}0$$

5. Prouver le théorème 1 lorsque $q=1$.

Indication. Écrire $f*g(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)^{\frac{1}{p}}g(y)^{\frac{p-1}{p}}\,\mathrm{d}y$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

Comme $q=1$ on a $r=p$ et il s'agit de montrer que $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_p\|g\|_1$. Les cas $p=1$ et $p=+\infty$ ont été traités dans les questions 1 et 4 respectivement. On peut donc supposer que $p\in\,]1,+\infty[$. Notons $p'=\frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}^d$, suivant l'indication on écrit :

$$|f*g(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{p'}}\,\mathrm{d}y.\tag{iv}$$

Comme $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $|g|^{\frac{1}{p'}}\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs $|f|^p\in L^1(\mathbb{R}^d)$ donc $|f|^p*|g|(x)<+\infty$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$, d'après 1. Pour un tel x on a $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|^p|g(y)|\,\mathrm{d}y<+\infty$, c'est-à-dire $|f(x-\cdot)||g|^{\frac{1}{p}}\in L^p(\mathbb{R}^d)$. En appliquant l'inégalité de Hölder dans l'équation (iv) :

$$|f*g(x)|\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|^p|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Cette inégalité étant valable presque partout, par Fubini–Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f*g(x)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant\|g\|_1^{\frac{p}{p'}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|f(x-y)|^p|g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\|g\|_1^{p-1}\|f\|_p^p\|g\|_1=\|f\|_p^p\|g\|_1^p<+\infty.$$

Donc $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_p\|g\|_1$, comme attendu.

Exercice 6 (Support d'une convolée)**.** Soient A et $B \subset \mathbb{R}^d$, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact et $B \subset \mathbb{R}^d$ est fermé, montrer que $A+B$ est fermé. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermés ?

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de points de $A+B$ qui converge dans $\mathbb{R}^d$ vers un certain x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tels que $x_n = a_n + b_n$. Par compacité de A, on peut extraire de (a_n) une sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers $a \in A$. Alors

   $$b_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x - a = b.$$

   Comme B est fermé, on a $b \in B$. Donc $x = a + b \in A + B$. Donc $A + B$ est fermé.

   Si on suppose seulement A et B fermés, le résultat est faux en général. Par exemple, pour $A = \mathbb{Z}$ et $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$ qui sont fermés dans $\mathbb{R}$, on a que $A + B = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), et $A + B \neq \mathbb{R}$ (car $A + B$ est dénombrable).

2. Soient f et g deux fonctions mesurables telles que $f * g$ soit bien définie sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$ alors $f * g(x) = 0$.

   Notons $A = \mathrm{supp}(f)$ et $B = \mathrm{supp}(g)$. Soit $x \notin A + B$, comme f est nulle hors de A et g est nulle hors de B on a :

   $$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_B f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\{x\}-B} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{(\{x\}-B)\cap A} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

   Si on avait $(\{x\} - B) \cap A \neq \emptyset$, il existerait $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x - b = a$, i.e. $x = a + b \in A + B$ ce qui est absurde. Donc $(\{x\} - B) \cap A = \emptyset$ et $f * g(x) = 0$.

3. Si f ou g est à support compact, montrer que $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. Que se passe-t-il dans le cas général ?

   Sans hypothèse sur les supports, la contraposée de la question 2 montre que si $f * g(x) \neq 0$ alors $x \in A + B$. Donc $\left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; f * g(x) \neq 0\right\} \subset A + B$. En prenant l'adhérence, il vient :

   $$\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{A + B}.$$

   Supposons maintenant que f ou g est à support compact. Par symétrie, on peut supposer A compact. Comme B est fermé par définition, la question 1 montre que $A + B$ est fermé, donc égal à son adhérence. Donc $\mathrm{supp}(f * g) \subset A + B$ comme voulu.

Exercice 7 (Convolution et dérivation)**.** 1. Soient $f \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial f*g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Comme $f \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la question 4 de l'exercice 5 montre que $f * g$ définit bien une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. De même, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ est continue car $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. On va appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Notons $h : (x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h(x, \cdot)$ est L^1 car produit d'une fonction L^∞ et d'une fonction L^1.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $h(\cdot, y)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial}{\partial x_i} h(\cdot, y) : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)g(y)$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

  $$\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}(x, y)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)\right| |g(y)| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty |g(y)|.$$

  Donc $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ est dominée uniformément en x par une fonction intégrable par rapport à y.

Donc $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,\mathrm{d}y$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i. De plus,

$$\frac{\partial f * g}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\cdot, y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$$

et cette application est continue sur $\mathbb{R}^d$. On en conclut que $f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

   Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, il suffit de vérifier le résultat sur Ω. Le même raisonnement que dans l'exercice 5 question 2 montre que $f * g = f * (\mathbf{1}_K g)$ sur Ω, où $K = \overline{\Omega} - \mathrm{supp}(f)$ est compact. Comme $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathbf{1}_K g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 1, la convolée $f * (\mathbf{1}_K g)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$, en particulier sur Ω. Donc $f * g$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

   Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, toujours en utilisant la question 1, sur Ω on a :

$$\frac{\partial f * g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f * (\mathbf{1}_K g)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * (\mathbf{1}_K g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g. \tag{v}$$

3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter ses dérivées partielles.

   On va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que si $f \in \mathcal{C}^k_0(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g$ est $\mathcal{C}^k$ et ses dérivées partielles sont données par : $\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g$ pour tout α de longueur $|\alpha| \leqslant k$.

   L'initialisation a été traitée dans la question 2. Supposons le résultat vrai pour $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}_0(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 2, la fonction $f * g$ est $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles sont données par la formule (v). Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^k_0(\mathbb{R}^d)$. Par hypothèse de récurrence, les $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ sont $\mathcal{C}^k$ et donc $f * g$ est $\mathcal{C}^{k+1}$.

   La formule pour les dérivées partielles est vraie si $|\alpha| \in \{0, 1\}$. Soit α tel que $2 \leqslant |\alpha| \leqslant k+1$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ et β tels que $1 \leqslant |\beta| \leqslant k$ et $\partial^\alpha = \partial^\beta \frac{\partial}{\partial x_i}$. Par l'hypothèse de récurrence :

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right) = \partial^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * g = \partial^\alpha f * g,$$

   ce qui achève la récurrence.

Exercice 8 (Régularisation par convolution)**.** Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, observons d'abord que φ_ε est définie de sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{z}{\varepsilon}\Big) \frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

   D'après la question 1 de l'exercice 5, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_\varepsilon * f(x)$ est bien définie et :

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= f * \varphi_\varepsilon(x) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\right) f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z)\big(f(x-z) - f(x)\big)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{z}{\varepsilon}\Big)\big(\tau_z f(x) - f(x)\big)\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2. En déduire que $\varphi_\varepsilon * f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

   D'après la question 1 de l'exercice 5 on a bien $\varphi_\varepsilon * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On calcule :

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\big(\tau_{\varepsilon y}f(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(y)|\big|\tau_{\varepsilon y}f(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

   On peut échanger les intégrales par Fubini–Tonelli, donc :

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(y)|\int_{\mathbb{R}^d}\big|\tau_{\varepsilon y}f(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(y)|\big\|\tau_{\varepsilon y}f - f\big\|_1\,\mathrm{d}y.$$

   On a $\big\|\tau_{\varepsilon y}f - f\big\|_1 \leqslant \|\tau_{\varepsilon y}f\|_1 + \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|_1$, donc l'intégrande dans le terme de droite est dominé par la fonction intégrable $2\|f\|_1|\varphi|$, indépendamment de ε. D'après l'exercice 3, cet intégrande converge simplement vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a donc $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. Ce résultat apparait de façon cruciale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier pour les fonction L^1 dont la transformée de Fourier est L^1, avec φ égale à la gaussienne standard.

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose que φ est à support compact.

3. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que la formule (3) est toujours valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

   Notons $K = \mathrm{supp}(\varphi)$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x \notin \varepsilon K$ on a $\frac{x}{\varepsilon} \notin K$ et donc $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) = 0$. Donc $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \varepsilon K$. En particulier φ_ε est à support compact et $\varphi_\varepsilon * f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ d'après l'exercice 5 question 2.

   Le calcul effectué à la question 1 est toujours valable dans ce contexte, les intégrales étant bien définies grâce à la compacité des supports de φ et φ_ε. Ceci établit la validité de (3) presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ uniformément.

   Comme f est uniformément continue elle est bornée sur tout compact et $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Par l'exercice 2 question 4 on a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ donc on peut appliquer la formule (3). Soit $R > 0$ tel que la boule fermée B_R de centre 0 et de rayon R contienne $\mathrm{supp}(\varphi)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a alors :

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \int_{B_R}|\varphi(y)|\big|\tau_{\varepsilon y}f(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}y \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant R}\big\|\tau_{\varepsilon y}f - f\big\|_\infty \int_{B_R}|\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

   et donc

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_1 \sup_{\|z\|\leqslant \varepsilon R}\big\|\tau_z f - f\big\|_\infty.$$

   Comme f est uniformément continue, on a $\big\|\tau_z f - f\big\|_\infty \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc le sup tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité précédente. On a donc bien $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_\infty \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

5. Soient $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On suppose que $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Le résultat reste-t-il vrai pour $p = +\infty$?

   Comme le support K de φ est compact, remarquons que $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ implique $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet $\varphi_{|K} \in L^q(K) \subset L^1(K)$ d'après l'exercice 2 question 2 et φ est nulle hors de K.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par l'exercice 2 question 4, on a $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc utiliser la formule (3). Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)\right| \leqslant \int_K |\varphi(x)|\left|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\right| \mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_q \left(\int_K \left|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

où on a appliqué l'inégalité de Hölder sur K. C'est licite car $y \mapsto f(x) \in L^\infty(K) \subset L^p(K)$ et $y \mapsto f(x - \varepsilon y)$ est L^p sur $\mathbb{R}^d$ donc sur K. Donc $y \mapsto \tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)$ est dans $L^p(K)$. En élevant cette inégalité à la puissance p et en intégrant, on obtient :

$$\left\|\varphi_\varepsilon * f - f\right\|_p^p \leqslant \|\varphi\|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \left|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\right|^p \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \|\varphi\|_q^p \int_K \left\|\tau_{\varepsilon y} f - f\right\|_p^p \mathrm{d}y$$

par Fubini–Tonelli. D'après l'exercice 3, l'intégrande dans le terme de droite converge simplement vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs $\left\|\tau_{\varepsilon y} f - f\right\|_p^p \leqslant 2^p \|f\|_p^p$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $y \in K$. Comme K est compact, ceci fournit une domination par une fonction intégrable et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Finalement $\left\|\varphi_\varepsilon * f - f\right\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Si $p = +\infty$ la preuve s'effondre car on n'a pas la continuité des translations dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. En fait le résultat est faux dans ce cas. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi_\varepsilon * f$ est continue d'après la question 4 de l'exercice 5. Si on a $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors f est continue comme limite uniforme de fonctions continues. Cette convergence n'a donc pas lieu pour les fonctions non continues dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

6. En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p \in [1, +\infty[$.

   Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$ et soit K son support. En particulier $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où q est l'exposant conjugué de p. On note B_R la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$ et $\mathbf{1}_R$ sa fonction indicatrice. Pour tout $R > 0$ et $\delta > 0$ on a :

$$\|f - \varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f)\|_p \leqslant \|f - \mathbf{1}_R f\|_p + \|\varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f) - \mathbf{1}_R f\|_p$$

   Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\|f - \mathbf{1}_R f\|_p^p = \int_{\|x\| \geqslant R} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

   par convergence dominée, donc il existe $R > 0$ tel que $\|f - \mathbf{1}_R f\|_p < \varepsilon$. D'après la question 5, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\|\varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f) - \mathbf{1}_R f\|_p < \varepsilon$. On a donc $\|f - \varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f)\|_p < 2\varepsilon$.

   Pour conclure, il s'agit de vérifier que $\varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. D'une part $\varphi_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et d'autre part $\mathbf{1}_R f \in L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, voir exercice 2 question 4. Donc $\varphi_\delta * \mathbf{1}_R f$ est $\mathcal{C}^\infty$ par la question 3 de l'exercice 7. On a vu dans la question 3 que $\operatorname{supp}(\varphi_\delta) \subset \delta K$ est compact. D'après la question 3 de l'exercice 6, on a :

$$\operatorname{supp}(\varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f)) \subset \operatorname{supp}(\varphi_\delta) + \operatorname{supp}(\mathbf{1}_R f) \subset \delta K + B_R.$$

   Comme $\delta K + B_R$ est compact, on a bien $\varphi_\delta * (\mathbf{1}_R f) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 9 (Lemme de Riemann–Lebesgue)**.** Le but de cet exercice est de prouver le lemme de Riemann–Lebesgue : pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0. \tag{4}$$

1. Prouver que (4) est valable pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on procède par intégration par parties, en utilisant le fait que f est nulle hors d'un compact. Soit $M > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-M, M]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-2M}^{2M} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[\frac{1}{ix}f(t)e^{itx}\right]_{-2M}^{2M} - \frac{1}{ix}\int_{-2M}^{2M} f'(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right|$$
$$= \frac{1}{|x|}\left|\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\|f'\|_1}{|x|} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0.$$

2. En déduire que (4) est valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f-g\|_1 + \left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 6 de l'exercice 8, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. D'après la question 1 pour tout x suffisamment loin de zéro on a $\left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$ et donc $\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon$. D'où le résultat.

Exercice 10 (Inégalité de Young, cas général — *facultatif*). 1. Établir l'*inégalité de Hölder à n termes* : soient $p_1, \ldots, p_n \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, soient $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, alors $f_1 \cdots f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$.
On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p_1, \ldots, p_{n+1} \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n+1}} = 1$ et soient $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. On note $q = \frac{p_{n+1}}{p_{n+1}-1}$, de sorte que : $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{q}$.
En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}$ et aux fonctions $f_j^q \in L^{\frac{p_j}{q}}(\mathbb{R}^d)$, on obtient que $f_1^q \cdots f_n^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$, i.e. $f_1 \cdots f_n \in L^q(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$\|f_1 \cdots f_n\|_q^q = \|f_1^q \cdots f_n^q\|_1 \leqslant \|f_1^q\|_{\frac{p_1}{q}} \cdots \|f_n^q\|_{\frac{p_n}{q}} = \|f_1\|_{p_1}^q \cdots \|f_n\|_{p_n}^q.$$

Comme q et p_{n+1} sont des exposants conjugués, on conclut la récurrence en appliquant Hölder à $f_1 \ldots f_n \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $f_{n+1} \in L^{p_{n+1}}(\mathbb{R}^d)$. On obtient bien $f_1 \ldots f_{n+1} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f_1 \cdots f_{n+1}\|_1 \leqslant \|f_1 \cdots f_n\|_q \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}.$$

2. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On note p' et q' les exposants conjugués de p et q respectivement. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, vérifier que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{q'}} |g(y)|^{\frac{q}{p'}} \big(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\big)^{\frac{1}{r}}.$$

En déduire l'inégalité : $\big(|f| * |g|\big)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \big(|f|^p * |g|^q\big)$.
Pour le premier point, il suffit de vérifier les relations suivantes sur les exposants :

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{r} = p\left(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = 1 \qquad \text{et de même} \qquad \frac{q}{p'} + \frac{q}{r} = q\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Pour le second point, fixons $x \in \mathbb{R}^d$. La formule $|f| * |g|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y$ définit bien un élément de $[0, +\infty]$. On applique l'inégalité de Hölder à 3 termes à :

$$\begin{aligned} &f_1 = |f(x-\cdot)|^{\frac{p}{q'}}, && f_2 = |g|^{\frac{q}{p'}}, && f_3 = (|f(x-\cdot)|^p |g|^q)^{\frac{1}{r}}, \\ &p_1 = q', && p_2 = p', && p_3 = r, \end{aligned}$$

ce qui est possible car $\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$. Il vient :

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) = \|f_1 f_2 f_3\|_1 &\leqslant \left\| |f|^{\frac{p}{q'}} \right\|_{q'} \left\| |g|^{\frac{q}{p'}} \right\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} \left(|f|^p * |g|^q(x) \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que $\frac{rp}{q'} = rp\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) = rp\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\Big) = r - p$ et de même $\frac{rq}{p'} = r - q$.

3. Établir le théorème 1 dans le cas général.
   Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. D'après la question 2, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|(x))^r \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p * |g|^q(x) \,\mathrm{d}x.$$

   Comme $|f|^p$ et $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la question 1 de l'exercice 5 montre que $|f|^p * |g|^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Le terme de droite dans l'équation précédente est donc fini, et ainsi $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \||f|^p * |g|^q\|_1 \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f^p\|_1 \|g^q\|_1 = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Exercice 11 (Construction d'une fonction-test par convolution — *facultatif*)**.** Pour tout $a > 0$ on définit la fonction indicatrice normalisée H_a par

$$H_a : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de strictement positive telle que $\sum_{k \geqslant 0} a_k < +\infty$. On note $u_n = H_{a_0} * \cdots * H_{a_n}$. Le but de l'exercice est de prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction-test. On utilisera les notations suivantes :

- $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $D_r f : x \mapsto \frac{1}{r}(f(x) - f(x-r))$ pour toute fonction f et tout $r > 0$.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $r > 0$, montrer que $H_r * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et que $(H_r * f)' = D_r f$.
   Le travail a déjà été fait dans l'exercice 4 question 3. On y a montré que $H_r * f = \frac{1}{r}\big(\mathbf{1}_{[0,r]} * f\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et que $(H_r * f)' = \frac{1}{r}\big(\mathbf{1}_{[0,r]} * f\big)' = \frac{1}{r}(f - \tau_r f) = D_r f$.
2. Vérifier que u_1 est continue, positive, à support dans $[0, A_1]$ et d'intégrale 1.
   On a $u_1 = H_{a_0} * H_{a_1} = \frac{1}{a_0 a_1} \mathbf{1}_{[0,a_0]} * \mathbf{1}_{[0,a_1]}$. On peut donc utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice 4. La figure 2 présente le graphe de u_1. On y lit que u_1 est continue, positive et à support dans $[0, A_1]$. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} u_1(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_{a_0}(x-y) H_{a_1}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} H_{a_1}(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} H_{a_0}(x-y) \,\mathrm{d}x}_{=1} \mathrm{d}y = 1.$$

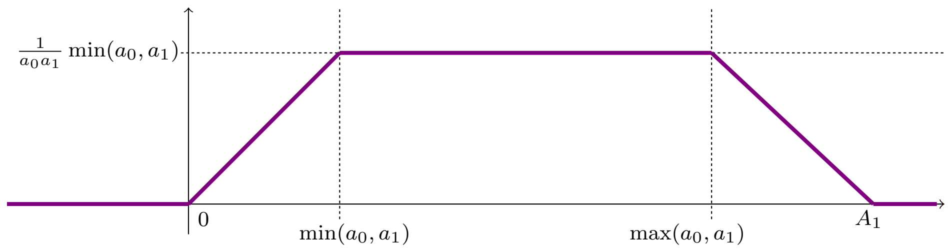

FIGURE 2 – Graphe de u_1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, positive, à support dans $[0, A_n]$ et d'intégrale 1.

   On prouve le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'initialisation étant traitée dans la question 2. Supposons le résultat vraie au rang n. Alors $u_{n+1} = u_n * H_{a_{n+1}}$, avec $u_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$. D'après la question 1, u_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^n$. En utilisant la question 3 de l'exercice 6, on obtient que

$$\operatorname{supp}(u_{n+1}) \subset \operatorname{supp}(u_n) + \operatorname{supp}(H_{a_{n+1}}) \subset [0, A_n] + [0, a_{n+1}] = [0, A_{n+1}].$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_0^{a_{n+1}} u_n(x-y)\,\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

   Enfin

$$\int_{\mathbb{R}} u_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}}(x-y)u_n(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_n(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}}(x-y)}_{=1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

   ce qui conclut la récurrence.

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on a :

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).$$

   Commençons par observer que l'opérateur D_r commute à la dérivation. En effet, si $r > 0$ et f est $\mathcal{C}^1$ alors $(D_r f)' = \frac{1}{r}(f' - f'(\cdot - r)) = D_r(f')$.
   Soient $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. D'après la question 3, la fonction u_n est $\mathcal{C}^{n-1}$. En appliquant de façon répétée la question 1 on obtient :

$$\begin{aligned}
u_n^{(j)} &= (H_{a_0} * (H_{a_1} * \cdots H_{a_n}))^{(j)} = (D_{a_0}(H_{a_1} * \cdots H_{a_n}))^{(j-1)} = D_{a_0}\Big((H_{a_1} * \cdots H_{a_n})^{(j-1)}\Big) \\
&= D_{a_0}\Big((D_{a_1}(H_{a_2} * \cdots H_{a_n}))^{(j-2)}\Big) = (D_{a_0} \circ D_{a_1})\Big((H_{a_2} * \cdots H_{a_n})^{(j-2)}\Big) \\
&= \dots \\
&= \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).
\end{aligned}$$

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on $\|u_n'\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}$.

   Indication. Utiliser l'inégalité de Young.

Soit $n \geqslant 2$, on va appliquer successivement les inégalités de Young pour $(p,q,r) = (+\infty, 1, +\infty)$ et pour $(p,q,r) = (1,1,1)$. D'après la question 4 on a :

$$\begin{aligned}\|u_n'\|_\infty = \|D_{a_0}(H_{a_1} * \cdots * H_{a_n})\|_\infty &\leqslant \frac{2}{a_0}\|H_{a_1} * \cdots * H_{a_n}\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0}\|H_{a_1}\|_\infty \|H_{a_2} * \cdots * H_{a_n}\|_1 \\ &\leqslant \frac{2}{a_0 a_1}\|H_{a_2} * \cdots * H_{a_n}\|_1 \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}\|H_{a_2}\|_1 \cdots \|H_{a_n}\|_1 = \frac{2}{a_0 a_1}.\end{aligned}$$

6. Soient m et $n \geqslant 2$, montrer que $\|u_{n+m} - u_m\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}(A_{m+n} - A_m)$. En déduire que (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u.

   Soit $f = H_{a_{m+1}} * \cdots * H_{a_{m+n}}$, de sorte que $u_{m+n} = u_m * f$. En appliquant le résultat de la question 3 à la suite (b_k) définie par $b_k = a_{m+1+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient que f est positive, d'intégrale 1 et à support dans $[0, A_{m+n} - A_m]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{m+n}(x) - u_m(x)| = |u_m * f(x) - u_m(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \big(u_m(x-y) - u_m(x)\big) f(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \big|u_m(x-y) - u_m(x)\big| f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|u_m'\|_\infty \int_0^{A_{m+n}-A_m} |y| f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|u_m'\|_\infty (A_{m+n} - A_m) \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y = \|u_m'\|_\infty (A_{m+n} - A_m),\end{aligned}$$

   où la troisième ligne s'obtient par le théorème des accroissements finis appliqué à u_m et la condition de support sur f. L'inégalité recherchée est alors obtenue grâce à la majoration de la question 5.

   On a $\|u_{n+m} - u_m\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}(A_{m+n} - A_m)$ pour tout m et $n \geqslant 2$. Comme $\sum_{k \geqslant 0} a_k < +\infty$, la suite (A_n) converge, donc est de Cauchy. L'inégalité précédente montre que la suite (u_n) est de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc uniformément.

7. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n^{(j)})_{n \geqslant j+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

   Soit $j \geqslant 1$, d'après la question 4, pour tout $n \geqslant j+1$ on a :

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).$$

   En appliquant la question 6 à la suite $(a_{j+k})_{k \geqslant 0}$, il vient que $\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big)_{n \geqslant j+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g_j.

   Soit $r > 0$, pour tout fonction h continue et bornée sur $\mathbb{R}$ on a $\|D_r h\|_\infty \leqslant \frac{2}{r}\|h\|_\infty$. Donc D_r est un opérateur linéaire continu sur l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par composition, c'est aussi le cas de $\big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)$. Donc

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{uniformément}} \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big) g_j := f_j.$$

8. Conclure que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$, la suite $(u_n^{(j)})_{n \geqslant k+1}$ converge uniformément. Donc $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $u^j = \lim_{n \to +\infty} u^{(j)}$ pour tout $j \leqslant k$. Donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En notant $A = \sum_{k \geqslant 0} a_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{supp}(u_n) \subset [0, A_n] \subset [0, A]$. Donc $\mathrm{supp}(u) \subset [0, A]$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Finalement, en utilisant la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers u sur $[0, A]$, uniformément et donc au sens L^1, on a :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A u_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^A u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x.$$