Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Blanche Buet, Thomas Letendre et Stéphane Nonnenmacher.

Examen partiel – 20 octobre 2022

L'épreuve dure 3 heures. L'usage de documents, calculatrices, téléphones portables est interdit.

Le sujet comporte 5 exercices indépendants. L'exercice 5 est sensiblement plus difficile que les autres. Il est recommandé de ne l'aborder qu'après avoir traité soigneusement les exercices 1 à 4, ce qui est suffisant pour obtenir une bonne note.

Afin de faciliter le travail de correction, merci de composer sur trois jeux de copies indépendants qui contiendront respectivement :

- **l'exercice 1,**
- **les exercices 2 et 3,**
- **les exercices 4 et 5.**

Exercice 1 (Distributions à support compact)**.** Pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on notera $\|\varphi\|_K = \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in K\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ et soit T_f la distribution associée. On note $K = \mathrm{supp}(T_f)$, montrer que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad |\langle T_f\,, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_K \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact, montrer que T est d'ordre fini.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support compact K et soit $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de T. On peut se demander si, comme à la question 1, il existe $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad |\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{i=0}^{m} \|\varphi^{(i)}\|_K. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est prouver que c'est en général faux, en construisant un contre-exemple. On définit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T\,, \varphi\rangle = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right) \right).$$

3. Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre inférieur ou égal à 1.
4. Déterminer le support K de T.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi_n \in \mathcal{D}(]0, 2[)$ avec les propriétés suivantes :
   (a) $\|\varphi_n\|_\infty = 1$,
   (b) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est constante sur un voisinage du point $\frac{1}{k}$,
   (c) $\langle T\,, \varphi_n\rangle \geqslant n$.
6. Montrer que T est d'ordre $m = 1$.
7. Conclure qu'il n'existe pas de $C \geqslant 0$ tel que (1) soit vérifiée pour la distribution T.

Exercice 2 (Prolongement des fonctions à singularité polynomiale)**.** On considère une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \geqslant 0$ tels que :

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \qquad |f(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^n}. \tag{2}$$

Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ la distribution associée à f. On définit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T\,, \varphi \rangle = \int_{|x|<1} f(x) \left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right) \mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$ qui est d'ordre inférieur ou égal à n.
2. Vérifier que $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
3. Dans cette question on considère $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui satisfait la condition (2) avec $n = 1$. Identifier la distribution T dans ce cas.

Exercice 3 (Une fonction non prolongeable)**.** Soient $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ la distribution associée. Le but de l'exercice est de prouver qu'il n'existe pas de prolongement de T_f en une distribution sur $\mathbb{R}$. On va raisonner par l'absurde.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(]0,2[)$ une fonction plateau sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\chi_n : x \mapsto \chi(nx)$.

1. Montrer que $\langle T\,, \chi_n \rangle \geqslant \frac{1}{2n} e^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 4 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$f_n : x \longmapsto \ln\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right), \qquad g_n : x \longmapsto \arctan(nx) \qquad \text{et} \qquad h_n : x \longmapsto \frac{1}{x - \frac{i}{n}}.$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On notera encore f_n, g_n et h_n les distributions associées.

1. Montrer qu'il existe f et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$ et $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} g$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer h_n en fonction de f_n' et g_n'.
3. En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T que l'on exprimera en fonction de distributions connues.

Exercice 5 (Changement de variable)**.** Soit $\gamma : I \to J$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on définit $\gamma_* : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{D}(J)$ par $\gamma_* : \varphi \mapsto \varphi \circ \gamma^{-1}$. Proposer une manière d'étendre γ_* en un isomorphisme continu d'inverse continu de $\mathcal{D}'(I)$ vers $\mathcal{D}'(J)$. Exprimer ensuite $(\gamma_* T)'$ en fonction de T', pour tout $T \in \mathcal{D}'(I)$.