Université Paris-Saclay • Master 1 Mathématiques Fondamentales

Distributions et transformée de Fourier (année 2021-2022, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher, Blanche Buet & Thomas Letendre

Examen partiel, 21 octobre 2021

L'épreuve dure 2 heures. L'usage de documents, calculatrices, téléphones portables est interdit.
Veuillez rédiger les deux problèmes sur des feuilles séparées.

1. Une distribution d'ordre 2

On rappelle la limite suivante :

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\Big)-\ln(N)\Big)=\gamma, \tag{1.1}$$

où γ est une constante réelle, appelée constante d'Euler-Mascheroni.

(1) Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, l'application linéaire $T_N:\mathscr{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$

$$\langle T_N,\varphi\rangle=\sum_{n=1}^{N}\varphi\Big(\frac{1}{j}\Big)-N\varphi(0)-\ln(N)\,\varphi'(0)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre exactement 1.

(2) Quel est le support de T_N ?

(3) Montrer que $\exists T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, telle que $T_N\xrightarrow{N\to\infty}T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que T est d'ordre ≤ 2.

(4) Quel est le support de T ?

(5) On veut montrer que T est d'ordre ≥ 1. Pour cela, on va se servir de la suite de fonctions test suivantes. On choisit $\chi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau sur l'intervalle $[-2,2]$ (c'est-à-dire $\chi(x)=1$ sur $[-2,2]$, et χ prend ses valeurs dans $[0,1]$). On construit pour chaque entier $k\geq 1$ la fonction

$$\varphi_k(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{k}\,\chi(x)\,\sin(kx),\qquad\forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Montrer que les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geq 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geq 1}$ sont bornées.

(6) En vous servant du développement de Taylor de $\sin(x)$ en $x=0$ et de l'équation (1.1), montrer que

$$\exists C>0,\ \forall N\geq 1,\ \forall 1\leq k<N,\qquad\Big|\sum_{j=k+1}^{N}\varphi_k\Big(\frac{1}{j}\Big)-\ln(N)+\ln(k)\Big|\leq C.$$

Indication : on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, la borne $\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\leq\frac{C_0}{k}$ pour un certain $C_0>0$ et tout entier $k\geq 1$.

(7) En déduire que $\langle T,\varphi_k\rangle=-\ln(k)+\mathcal{O}(1)$. Conclure sur l'ordre exact de T.

2. Séries de Fourier

(1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on introduit la fonction $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$e_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2i\pi nx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes telle que :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad |a_n| \leq C\,(1+|n|)^p\,. \tag{2.1}$$

Montrer que la suite de distributions $(T_{f_N})_{N\in\mathbb{N}}$ associées aux fonctions :

$$f_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^{N} a_n\, e_n,$$

converge dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution, qu'on appellera T_a. On notera

$$T_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e_n.$$

Indication : on pourra utiliser des intégrations par parties.

(2) Montrer que la distribution dérivée T_a' vérifie

$$T_a' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2i\pi n\, a_n\, e_n.$$

(3) On considère le cas particulier de la suite constante ($a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$), et on appelle la distribution correspondante $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n$. Montrer que S satisfait l'équation

$$(1 - e_1)S = 0.$$

(4) En déduire que la restriction de S à l'intervalle $I =]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$ est nécessairement de la forme $S_{|I} = c\,\delta_0$ pour un certain $c \in \mathbb{C}$.

(5) Montrer que S est une distribution réelle, et en déduire que $c \in \mathbb{R}$.

(6) Pour tout $v \in \mathbb{R}$, on note τ_v l'opérateur de translation par v agissant sur les fonctions test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tau_v\varphi(x) = \varphi(x - v).$$

Montrer que l'opérateur $\tau_v : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R})$ est linéaire, et séquentiellement continu (c'est-à-dire, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ convergente de fonctions test, la suite $(\tau_v\varphi_n)_n$ est aussi convergente).

(7) On définit alors l'action de τ_v sur une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ par dualité :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle \tau_v T, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \tau_{-v}\varphi\rangle.$$

Montrer que $\tau_v T$ est une distribution. Si $T = T_f$ pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, identifier la distribution $\tau_v T_f$.

(8) Montrer que $\tau_v : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est une bijection, séquentiellement continue dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(9) Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant l'estimée (2.1), la distribution T_a vérifie $\tau_1 T_a = T_a$. Une telle distribution est dite périodique.

(10) En utilisant cette périodicité, en déduire que la distribution S introduite à la question (3) peut s'écrire :

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c\,\delta_n.$$