Université Paris–Saclay
Master Mathématiques et Applications
B. Buet, Th. Letendre, S. Nonnenmacher

2021 – 2022
Distributions et Transformée de Fourier

Examen final — 16 décembre 2021

Le sujet est composé de trois exercices comportant chacun plusieurs parties. **Merci de rédiger ces 3 exercices sur des copies indépendantes**. Le soin et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Les dépendances entre les différents exercices sont les suivantes :

- les résultats de la partie A de l'exercice 1 sont utilisés dans les exercices 2 et 3 ;
- la question 8 de l'exercice 1 est utilisée dans l'exercice 2 ;
- la question 13 de l'exercice 1 est utilisée dans l'exercice 3 ;
- les exercices 2 et 3 sont indépendants l'un de l'autre.

Notations. Commençons par rappeler quelques notations qui serviront tout au long du sujet.

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on note $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$ et $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$.
- Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{\varphi}\rangle$ et $\tau_a T : \varphi \mapsto \langle T\,, \tau_{-a}\varphi\rangle$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$.
- Si f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on rappelle que leur convolée est $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$.
- Soient A et $B \subset \mathbb{R}^d$, on note $A + B = \big\{a + b \in \mathbb{R}^d \;\big|\; a \in A, b \in B\big\}$.

Exercice 1 (Convolution de deux distributions dont l'une est à support compact)**.**

Le but de cet exercice est de définir la convolée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et celle de T par une distribution à support compact $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On prouve ensuite quelques propriétés de ces objets.

Partie I.A : définitions et premières propriétés.

1. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on définit la *convolée* $\varphi * T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\varphi * T : x \longmapsto \big\langle \tau_x\check{T}\,, \varphi\big\rangle = \langle T\,, \varphi(x-\cdot)\rangle. \tag{1}$$

   Montrer que $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a :

$$\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha\varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$

2. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution à support compact et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * E \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et que $\operatorname{supp}(\varphi * E) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(E)$.
3. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\chi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ une fonction-plateau égale à 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp}(E)$. Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que la valeur de $\langle E\,, \chi\psi\rangle$ ne dépend pas du choix de χ.

Dans toute la suite du sujet, pour tout $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ on notera $\langle E\,,\psi\rangle$ la valeur commune des $\langle E\,,\chi\psi\rangle$, où χ est n'importe quelle fonction-plateau égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(E)$**.**

4. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la *convolée* $E * T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ de E et T par la formule :
$$E * T : \varphi \longmapsto \big\langle E\,, \varphi * \check{T}\big\rangle. \tag{2}$$
Montrer que $E * T$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$.
5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer que $\partial^\alpha(E * T) = (\partial^\alpha E) * T = E * (\partial^\alpha T)$.
6. Soient E_1 et $E_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in D'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $E_1 * T + E_2 * T = (E_1 + E_2) * T$.
7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $(E_R)_{R>0}$ une famille de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ qui converge au sens des distributions vers $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque $R \to 0$. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\mathrm{supp}(E) \subset K$ et $\mathrm{supp}(E_R) \subset K$ pour tout $R > 0$. Montrer que
$$E_R * T \xrightarrow[R\to 0]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} E * T.$$

Partie I.B : quelques exemples.

8. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, calculer $\delta_0 * T$.
9. Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Montrer que $T_f * T_g = T_{f*g}$.
10. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a :
$$\langle T_\rho * T\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi * \check{\rho}\rangle = \langle T_{\rho * T}\,, \varphi\rangle.$$

Partie I.C : convolution et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

11. Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C_{\rho,k} > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:
$$N_k(\varphi * \rho) \leqslant C_{\rho,k} N_k(\varphi).$$
12. Soient φ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\varphi * \rho} = \widehat{\varphi}\,\widehat{\rho}$.
13. Soient $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $T_{\rho * S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{T_{\rho * S}} = \widehat{\rho}\,\widehat{S}$.

Exercice 2 (Moyennes sur des petites sphères)**.**

Pour tout $R > 0$, on note S_R (resp. B_R) la sphère (resp. la boule) de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$. On note σ_R la mesure superficielle de S_R et on définit sa version normalisée par $\mu_R = \dfrac{1}{\sigma_R(S_R)}\sigma_R$. L'objectif de l'exercice est d'étudier l'asymptotique de μ_R lorsque $R \to 0$.

Partie II.A : cas de la dimension $d = 1$.

1. Lorsque $d = 1$, donner une expression simple de la mesure μ_R pour tout $R > 0$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe a, b et $c \in \mathbb{C}$ tels que le développement asymptotique suivant soit valable lorsque $R \to 0$:

$$\langle \mu_R \,, \varphi \rangle = a + bR + cR^2 + o(R^2). \tag{3}$$

Expliciter a, b et c en fonction de φ.

3. Pour tout $R \in]0,1]$, on définit $E_R = \frac{1}{R^2}(\mu_R - \delta_0)$. Montrer qu'il existe $E_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $E_R \xrightarrow[R\to 0]{} E_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et expliciter E_0.

Partie II.B : cas de la dimension d quelconque.

4. Redémontrer que, pour tout $R > 0$, le volume de B_R est donné par $|B_R| = \frac{R}{d}\sigma_R(S_R)$.

   Indication. On pourra au choix utiliser la formule de Gauss–Green ou la formule de coaire pour des sphères concentriques.

5. Pour tout i et $j \in \{1, \dots, d\}$, on définit les intégrales :

$$I_i(R) = \int_{S_R} x_i \,\mathrm{d}\mu_R(x) \qquad \text{et} \qquad I_{i,j}(R) = \int_{S_R} x_i x_j \,\mathrm{d}\mu_R(x).$$

   Calculer les valeurs de ces intégrales en utilisant la formule de Gauss–Green.

6. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\langle \mu_R \,, \varphi \rangle$ admet un développement asymptotique de la forme (3) lorsque $R \to 0$ et expliciter les coefficients a, b et $c \in \mathbb{C}$.

7. Comme à la question 3, on définit $E_R = \frac{1}{R^2}(\mu_R - \delta_0) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ pour tout $R \in]0,1]$. Montrer qu'il existe $E_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $E_R \xrightarrow[R\to 0]{} E_0$ et expliciter E_0.

On rappelle que la convolée de deux distributions dont l'une est à support compact a été définie dans l'exercice 1, par les formules (1) et (2). On pourra penser à utiliser les résultats de la partie A et de la question 8 de l'exercice 1.

8. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on suppose que $\mu_R * T_f - T_f$ est une distribution positive pour tout $R \in]0,1]$. Montrer que la distribution ΔT_f est positive.

Exercice 3 (Opérateurs hypoelliptiques)**.**

Rappelons qu'on note $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne. Soit $s \in \mathbb{R}$, on rappelle aussi que l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \langle \xi \rangle^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

est muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$, définie par $\|u\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2}$, qui en fait un espace de Hilbert.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit p un polynôme en d variables de degré m. On note $P = p(\partial)$ l'opérateur différentiel de degré m associé à p. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que la condition suivante soit satisfaite :

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \|u\|_{H^\eta}^2 \leqslant C(2\pi)^d \big(\|u\|_{L^2}^2 + \|Pu\|_{L^2}^2 \big). \tag{4}$$

Le but de l'exercice est de montrer que sous cette condition l'opérateur P est *hypoelliptique*, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $Pu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a en fait $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Partie III.A : contrôle des normes Sobolev.

1. Montrer que l'opérateur P satisfait la condition (4) si et seulement si le polynôme p satisfait la condition suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \big(1 + |\xi|^2\big)^\eta \leqslant C\big(1 + |p(i\xi)|^2\big). \tag{5}$$

2. Soient $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que p satisfait la condition (5). Montrer que $\eta \leqslant m$.

Dans toute la suite, on fixe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que les conditions équivalentes (4) et (5) soient satisfaites.

3. Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $s \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\|u\|^2_{H^{\eta+s}} \leqslant C\big(\|u\|^2_{H^s} + \|Pu\|^2_{H^s}\big). \tag{6}$$

4. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, soit $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout $s \leqslant \sigma$ on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
5. Montrer que pour tout $s \leqslant \sigma - m$ on a $Pu \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $Pf_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Pu$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
6. Soient s et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que $s + m \leqslant \sigma$, montrer que l'inégalité (6) est satisfaite pour tout $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$.

Partie III.B : régularisation par convolution et bootstrap.

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que $Pu \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Le but de cette partie est de montrer que $u \in H^{\eta+s}(\mathbb{R}^d)$. On déduira de ce résultat que P est hypoelliptique.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $\rho_\varepsilon : x \mapsto \varepsilon^{-d}\rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ et $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. Rappelons que ce produit de convolution est défini par (1) et qu'il a été étudié dans l'exercice 1. On pourra penser à utiliser le résultat de la question 13 de l'exercice 1.

7. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ on a $u_\varepsilon \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$.
8. Prouver que $\widehat{\rho_\varepsilon}$ converge simplement vers 1 lorsque $\varepsilon \to 0$.
9. En déduire que $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} u$ et $Pu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} Pu$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
10. Montrer que $(u_{\frac{1}{n}})_{n\geqslant1}$ est de Cauchy dans $H^{\eta+s}(\mathbb{R}^d)$. En déduire que $u \in H^{\eta+s}(\mathbb{R}^d)$.

On peut maintenant conclure que les conditions équivalentes (4) et (5) impliquent que P est un opérateur hypoelliptique.

11. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $Pu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.