TP Bonus : Étude d'un pendule magnétique.

On s'intéresse dans cet exercice au mouvement d'un pendule pouvant se déplacer dans toutes les directions au dessus d'un plan où sont disposés des aimants.

Considérons une bille de fer (masse ponctuelle m) suspendue à une tige rigide (de masse nulle). Ce dispositif constitue un pendule qui peut osciller dans toutes les directions de l'espace. Plaçons trois forts aimants sur le sol en les disposant aux sommets d'un triangle équilatéral centré sur l'aplomb du point de suspension du pendule. Ajustons la longueur de la tige pour que la bille soit près du sol lorsque le pendule est vertical. Si nous plaçons la bille près d'un aimant, elle s'immobilisera au-dessus de l'aimant. Si nous la lâchons d'une position initiale quelconque, la bille s'immobilisera, après un certain temps, au-dessus d'un des trois aimants, mais lequel ?

On modélise le pendule magnétique en faisant les hypothèses suivantes:

- la longueur du fil est grande comparée à la distance séparant les aimants : cette hypothèse permet de considérer que le mouvement de la bille s'effectue dans un plan plutôt que sur une surface sphérique;
- les aimants sont ponctuels et la force exercée par un aimant sur la bille est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare;
- la force de rappel exercée sur le pendule est proportionnelle à l'écart par rapport à la position verticale (loi de Hooke);
- la force de frottement subie par le pendule est proportionnelle à la vitesse de la bille.

Les aimants ont pour coordonnées $(x_1, y_1) = (1, 0)$, $(x_2, y_2) = 0.5(-1, \sqrt{3})$ et $(x_3, y_3) = 0.5(-1, -\sqrt{3})$. On repère la position de la bille par ses coordonnées (x, y) (après projection sur le sol) et obtient le système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - x(t)}{((x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2)^{3/2}} - Cx'(t) - Rx(t) \\ y''(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{y_i - y(t)}{((x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2)^{3/2}} - Cy'(t) - Ry(t) \end{array} \right. \tag{E}$$

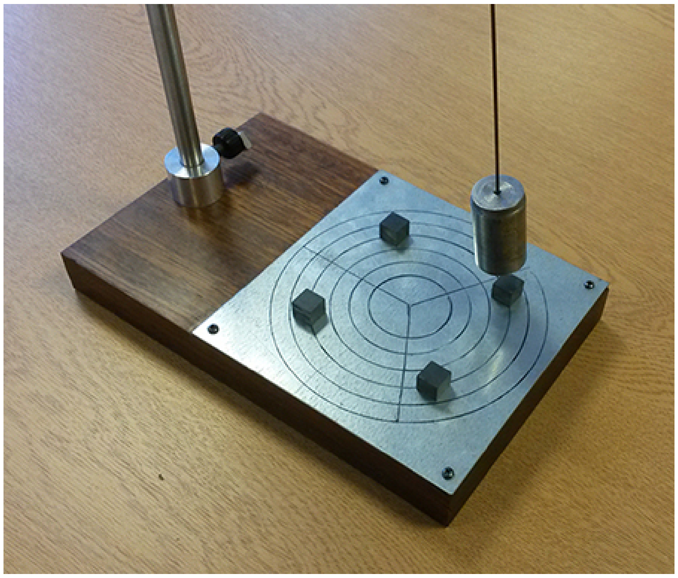
On prendra le coefficient de frottements $C = 0.1$, le coefficient de rappel $R = 0.25$ et la distance de la bille au sol $d = 0.3$.

1. En utilisant le schéma RK4, résoudre numériquement l'équation différentielle (E) pour quelques conditions initiales de votre choix (on pourra se contenter de varier la position initiale (x_0, y_0) et lâcher la bille avec une vitesse nulle). On pourra résoudre sur l'intervalle $[0, 20]$ avec un pas de temps $h = 0.05$. Représenter les trajectoires $(x(t), y(t))_{t\in[0,T]}$ obtenues.
2. On veut à présent savoir vers quel aimant la bille se stabilise pour (x_0, y_0) donné (et vitesse initiale nulle). Pour cela, on décide que la bille s'est stabilisée si elle reste à distance < 0.5 pendant un laps de temps égal à 2, ce qui correspond à 40 itérations pour $h = 0.05$. Définir une fonction RK4modif qui renvoie le numéro de l'aimant vers lequel se stabilise la bille (ou -1 si la condition de stabilisation n'est pas satisfaite avant le temps T) et le temps correspondant (inutile de calculer la solution après ce temps où la condition de stabilisation est satisfaite).
3. Représenter les bassins d'attraction de chaque aimant (i.e. l'ensemble des

$$\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \text{la solution se stabilise vers l'aimant } i\}$$

en choisissant trois couleurs différentes. Attention au temps de calcul ...

4. Reprendre en faisant varier le nombre d'aimants et leur position, comparer la taille des bassins d'attraction respectifs.



(a) Pendule à 4 aimants

(b) Pendule à 6 aimants