Autour de la méthode de Newton.

Commençons par rappeler la méthode de Newton pour une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une méthode *itérative* visant à calculer numériquement une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1 Principe

Supposons que l'on cherche une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle I et partant de $x_0 \in I$ (par exemple une approximation grossière de α obtenue par dichotomie). L'idée de la méthode de Newton est de linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0 et de résoudre l'équation affine

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0\,.$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, on peut ainsi définir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

et recommencer en linéarisant autour de x_1, pourvu qu'on ait bien $x_1 \in I$. On obtient la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Géométriquement, l'équation $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ est l'équation de la tangente T_{x_k} à la courbe représentative de f au point $(x_k, f(x_k))$, de sorte que x_{k+1} est le point d'intersection entre T_{x_k} et l'axe des abscisses.

Attention, avant même de discuter de la convergence de la méthode de Newton, il est important de noter que rien n'assure a priori que la suite $(x_k)_k$ soit bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$, si la suite est bien défini jusqu'au rang k, x_{k+1} ne peut pas être défini si :

- $f'(x_k) = 0$, par exemple pour $f(x) = x^3 - 1$ et $x_0 = 0$ ou $x_0 = -2^{-1/3}$.
- $x_k \notin I$, par exemple $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $I =]-1, +\infty[$ et $x_0 \geq 3$.

Et lorsque la méthode est bien définie, elle ne converge pas nécessairement ...

- Présence d'un cycle (ou d'un point péridodique d'ordre plus élevé) : par exemple pour $f(x) = x^3 - 2x + 2$ et $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ ($F(0) = 1$ et $F(1) = 0$).
- Divergence à l'infini : par exemple avec $f(x) = x\exp(-x)$, $x_0 = 2$.

Interprétation comme **point fixe :** la méthode de Newton est une méthode de point fixe

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad \text{avec} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Si on suppose que f est de classe C^2 et $\alpha \in I$ est solution de $f(\alpha) = 0$, avec de plus $f'(\alpha) \neq 0$, on a alors F bien définie et C^1 dans un voisinage de α, et

$$F'(\alpha) = 1 - \frac{(f'(\alpha))^2 - f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0\,.$$

Le point α est ainsi un point fixe *super-attractif* de F.

Critère d'arrêt. D'un point de vue de l'implémentation, on doit décider quand arrêter de calculer les itérées x_k de la méthode de Newton. Plusieurs critères d'arrêt sont possibles, les deux critères les plus fréquents sont : étant donnée une *tolérance* $\epsilon > 0$,

- arrêt à l'itération k_0 si $|x_{k_0+1} - x_{k_0}| < \epsilon$ (*contrôle de l'incrément*) ;
- arrêt à l'itération k_0 si $|f(x_{k_0})| < \epsilon$ (*contrôle du résidu*);

Extension à $\mathbb{R}^n$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Si on reprend le principe de la méthode de Newton dans $\mathbb{R}$, partant de $x_0 \in \Omega$, on linéarise l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0 et on obtient l'équation (système) linéaire

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = 0 . \tag{1}$$

Si la matrice $Df(x_0)$ est inversible, on peut alors définir $x_1 \in \mathbb{R}^n$ comme l'unique solution de (1). On définit ainsi la méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega \\ x_{k+1} = x_k - [Df(x_k)]^{-1} f(x_k),\ k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

D'un point de vue de l'implémentation, pour $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, résoudre le système $Ax = b$ et calculer A^{-1} puis $A^{-1}b$ ne sont pas équivalents en temps de calcul. Résoudre directement le système linéaire est en général plus efficace.

2 Convergence

On va à présent donner un résultat assurant que si on part assez proche de la solution, la méthode de Newton est bien définie et converge de façon quadratique vers une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Théorème 1 (Convergence locale)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $\alpha \in \Omega$ tel que $f(\alpha) = 0$. On suppose que $Df(\alpha)$ est inversible. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)^1 \subset \Omega$, la suite $(x_k)_k$ des itérées de Newton est bien définie et converge* quadratiquement *vers α : $\exists C > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$\|x_{k+1} - \alpha\| \leq C\|x_k - \alpha\|^2 .$$

Preuve. Comme $Df : \Omega \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage de α dans Ω dans lequel la différentielle de f reste inversible. Soit donc $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in B(\alpha, \delta_1)$, $Df(x)$ est inversible.
On considère $F : B(\alpha, \delta_1) \to \mathbb{R}^n$ définie par $F(x) = x - [Df(x)]^{-1} f(x)$. L'application F est de classe C^1, on va montrer qu'elle est contractante dans un voisinage de α. Pour cela on prend $0 < \delta_2 < \delta_1$ de sorte $D^2 f$ est continue sur le compact $\overline{B(\alpha, \delta_2)}$ et il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in B(\alpha, \delta_2) , \quad \|D^2 f(x)\| \leq M .$$

Soit $x \in B(\alpha, \delta_2)$ et $h = x - \alpha$,

$$F(x) - F(\alpha) = F(\alpha + h) - \alpha = \alpha + h - [Df(\alpha + h)]^{-1} f(\alpha + h) - \alpha \tag{2}$$

et on obtient par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $[\alpha, \alpha + h] \subset B(\alpha, \delta_2)$:

$$f(\alpha + h) = Df(\alpha)h + R_1(h) \quad \text{avec} \quad \|R_1(h)\| \leq \frac{M}{2}\|h\|^2 \tag{3}$$

$$Df(\alpha + h) = Df(\alpha) + R_2(h) \quad \text{avec} \quad \|R_2(h)\| \leq M\|h\| . \tag{4}$$

De plus, pour $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ suffisamment petit : $\|H\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, on a $A + H \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ et

$$\|(A + H)^{-1} - A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2\|H\| . \quad \text{(petit exo ... ?)}$$

[1]Boule ouverte de centre α et de rayon δ.

Avec $A = Df(\alpha)$ et $H = R_2(h)$, on a

$$\|h\| \leq \frac{1}{2M\|[Df(\alpha)]^{-1}\|} \;\Rightarrow\; \|H\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \tag{5}$$

et donc

$$[Df(\alpha+h)]^{-1} = [Df(\alpha)]^{-1} + R_3(h) \quad \text{avec} \quad \|R_3(h)\| \leq 2\left\|[Df(\alpha)]^{-1}\right\|^2 M\|h\| \,. \tag{6}$$

En diminuant δ_2 si nécessaire (pour assurer (5)) et en injectant (3), (4) et (6) dans (2), on obtient finalement $C > 0$ tel que pour tout $\|h\| < \delta_2$,

$$\|F(\alpha+h) - \alpha\| \leq C\|h\|^2$$

Ainsi pour tout $x \in B(\alpha, \delta_2)$, $\|F(x) - F(\alpha)\| \leq C\|x-\alpha\|^2$ et on remarque alors que pour $\|x-\alpha\| \leq \frac{1}{C}$, on a

$$\|F(x) - F(\alpha)\| \leq \|x-\alpha\|$$

On peut choisir $\delta = \min(\delta_2, 1/C)$ afin d'assurer que la suite $(x_k)_k$ est bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La convergence découle alors directement de l'inégalité

$$\|x_{k+1} - \alpha\| = \|F(x_k) - F(\alpha)\| \leq C\|x_k - \alpha\|^2$$

Et on remarque qu'on a alors $q := C\|x_0 - \alpha\| < 1$ et

$$C\|x_k - \alpha\| \leq (C\|x_{k-1} - \alpha\|)^2 \leq (C\|x_{k-2} - \alpha\|)^4 \leq (C\|x_0 - \alpha\|)^{2^k} = q^{2^k}$$

□

Remarque 1. Lorsque $f'(\alpha) = 0$ ("racine double"), on perd en général le fait que la méthode de Newton est bien définie localement, et lorsqu'elle est bien définie, on perd en général la convergence quadratique. On pourra s'en convaincre en considérant $f : x \mapsto x^2$ (ou $\|x\|^2$ dans $\mathbb{R}^n$), pour laquelle $x_{k+1} = \frac{x_k}{2}$.

Remarque 2. *Retour sur le "petit exo".*
D'une part, si on sait que $A+H$ est inversible et qu'on a une majoration de son inverse, on obtient le contrôle voulu grâce à

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}\left(I - (A+H)A^{-1}\right) = -(A+H)^{-1}HA^{-1} \,.$$

D'autre part, pour $X \in \mathbb{R}^n$, comme $\|A^{-1}AX\| = \|X\| \leq \|A^{-1}\|\|AX\|$ on a déjà $\|AX\| \geq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\|X\|$. On en déduit alors

$$\|(A+H)X\| \geq \|AX\| - \|HX\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|H\|\right)\|X\| \geq \frac{\|X\|}{2\|A^{-1}\|} \quad \text{pour } \|H\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \,.$$

Ainsi $(A+H)X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$ et la matrice $A+H$ est inversible. Finalement, en posant $X = (A+H)^{-1}Y$ dans la minoration précédente, on aboutit à

$$\|Y\| \geq \frac{\|(A+H)^{-1}Y\|}{2\|A^{-1}\|} \quad \Rightarrow \quad \|(A+H)^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\| \,,$$

qu'on réinjecte dans la première égalité.

Définition 1 (Vitesse de convergence)**.** Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ convergeant vers $\alpha \in \mathbb{R}^n$. S'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{k+1} - \alpha\| \leq C\|x_k - \alpha\|^p \,, \tag{7}$$

on dit que la convergence est (au moins) d'ordre p.

Remarque 3. • Pour $p = 2$, si $\|x_k - \alpha\| \leq 10^{-N}$, on aura $\|x_{k+1} - \alpha\| \leq C10^{-2N}$ et on double approximativement le nombre de chiffres exacts à l'itération k !
• Pour $p \geq 2$, l'inégalité (7) implique la convergence de la suite vers α indépendemment de la valeur de la constante C.
• On pourrait définir un ordre de convergence $p \in [1, +\infty[$ non entier. Par exemple pour la méthode de la sécante, on obtient $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

Signalons au moins le cadre suivant dans lequel la méthode de Newton converge mieux que localement :

Théorème 2 (Convergence sous hypothèse de convexité)**.** *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante, convexe et de classe* C^1*, telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$ et pour tout $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ (i.e. $x_0 > \alpha$), la méthode de Newton est bien définie et converge vers α.*
On retrouve la convergence quadratique si f est de classe C^2 (et $f'(\alpha) > 0$ est automatique au vu des hypothèses ici).

Preuve. Existence et unicité de α : théorème des valeurs intermédiaires et stricte croissance.
On vérifie que $f'(x) > 0$ pour $x \in]a, b]$. En effet, f est convexe donc f' est croissante et par ailleurs, f est strictement croissante donc f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle.
La fonction $F :]a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est bien définie. On verifie que $F([\alpha, b]) \subset [\alpha, b]$. Soit $x \in [\alpha, b]$, comme $f(x) \geq 0$ et $f'(x) > 0$, on a $F(x) \leq x \leq b$. Par ailleurs, comme f est convexe, elle est au-dessus de ses tangentes :

$$0 = f(\alpha) \geq f(x) + f'(x)(\alpha - x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \geq \alpha\,.$$

La suite définie par $x_0 \in [\alpha, b]$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = F(x_k)$ est donc bien définie et à valeurs dans $[\alpha, b]$. Comme de plus, $F(x) \leq x$, la suite $(x_k)_k$ est décroissante, minorée par α donc converge vers $l \in [\alpha, b]$. La continuité de F permet de conclure que $F(l) = l$ et par suite $l = \alpha$. □

Finissons avec deux exemples d'**application** de la Méthode de Newton.

Exemple 1 (Algorithme de Héron)**.** Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - a$. La méthode de Newton conduit à définir la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)\,.$$

La suite $(x_k)_k$ est bien définie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et converge quadratiquement vers $\mathrm{sgn}(\mathrm{x}_0)\sqrt{a}$.

Cette méthode de calcul approché de la racine carrée d'un nombre était connue bien avant la formalisation de la méthode de Newton, notamment sous le nom d'*algorithme de Héron.* On peut la comprendre géométriquement : si a est l'aire d'un carré de côté α et que je considère un rectangle R_0 de côté x_0, pour que mon rectangle ait une aire égale à a, le deuxième côté est de longueur a/x_0. Afin de rectifier l'écart de longueur entre les deux côtés, on prend x_1 égal à la moyenne des deux longueurs du rectangle R_0 et on considère le rectangle R_1 d'aire a et de côtés x_1 et a/x_1, et on itère.

Exemple 2 (Calcul de la plus grande racine d'un polynôme)**.** Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de coefficient dominant positif **scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples** et α la plus grande racine de P. Le Théorème 2 s'applique alors :
• le théorème de Rolle permet d'intercaler les racines de P' entre les racines de P, le polynôme P' est également scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et en notant β la plus grande racine de P', on a $\beta < \alpha$ de sorte que $P'(x) > 0$ sur $]\beta, +\infty[$ et donc P est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$;

• de même P'' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et en notant γ sa plus grande racine, on a $\gamma < \beta$ de sorte que $P''(x) \geq 0$ sur $[\beta, +\infty[$ et donc P y est convexe.
Il suffit de choisir $x_0 \geq \alpha$ afin d'avoir une méthode de calcul approchée de la plus grande racine de P. Mais si on ne connaît pas α, on tourne en rond ... ? Sans connaître α, on a une majoration en fonction des coefficients de P :

Lemme 1. *Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$ un polynôme à coefficients réels, $a_d \neq 0$. Toute racine (complexe) z de P vérifie l'inégalité*

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right)$$

En effet, si $|z| \geq 1$, $\dfrac{1}{|z|} \leq 1$ et

$$z^d = -\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} z^i \quad \Rightarrow \quad |z| = \left|\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} \frac{z^i}{z^{d-1}}\right| \leq \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|} \frac{1}{|z|^{d-1-i}} \leq \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|} .$$