Résolution approchée d'un problème de Cauchy.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour $t_0 \in I$, on considère le problème de Cauchy (P) :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t))\,, \quad (E) \\ y(t_0) = y_* \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{cases}$$

Soit $y : J \subset I \to \mathbb{R}^d$ la solution maximale de (P) et $[t_0, t_0 + T] \subset J$.
On veut approcher numériquement y sur $[t_0, t_0+T]$, connaissant $y_* = y(t_0)$ ou au moins une valeur approchée y_0 de y_*. Pour résoudre numériquement ce problème, on se donne une subdivision $t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + T$ de $[t_0, t_0 + T]$ et on cherche des valeurs approchées $y_1, \ldots, y_N$ de $y(t_1), \ldots, y(t_N)$, on définit ensuite une fonction y_h^{app} continue sur $[t_0, t_0 + T]$ qui interpole linéairement (t_0, y_0), ... (t_N, y_N).

1 Méthodes explicites à un pas.

Dans le cadre de cette UE, on va se restreindre aux *méthodes explicites à un pas constant*, c'est-à-dire, $h = \frac{T}{N}$ constant et pour tout $0 \le n < N$,

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)\,, \tag{S}$$

où Φ est une fonction continue ne dépendant que de f. Le **schéma d'Euler explicite**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h\,, \end{cases}$$

est un exemple de méthode explicite à un pas (constant), avec $\Phi(t, y, h) = f(t, h)$. On en verra d'autres en TP, comme par exemple le **schéma du point milieu**, satisfaisant

$$\begin{cases} t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}h \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Lorsqu'on analyse une méthode numérique, on veut en général montrer que les solutions de la méthode numérique (ici de (S)) convergent (ici en norme uniforme sur $[t_0, t_0 + T]$) vers "la" solution du problème initial (ici de (P)). Dans ce but, on distingue deux types de contributions dans l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée :

- la *consistance* qui mesure l'erreur commise lorsqu'on applique le schéma (S) à la solution exacte de (P),
- la *stabilité*, qui mesure l'amplification des erreurs à travers le schéma.

2 Consistance

On commence par introduire la notion de *consistance*. Dans toute cette section, étant donné $N \in \mathbb{N}^*$, on note $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ la subdivision uniforme de $[t_0, t_0 + T]$ en N sous-segments i.e. pour $n = 0, \ldots, N$,

$$t_n = t_0 + n\,h \quad \text{où} \quad h = \frac{T}{N}\,.$$

On rappelle de plus que y désigne la solution de (P) sur $[t_0, t_0 + T]$ introduite en section 1.

Définition 1 (Consistance et ordre d'un schéma.)**.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit *l'erreur de consistance locale*, pour $n = 0, \dots, N-1$:

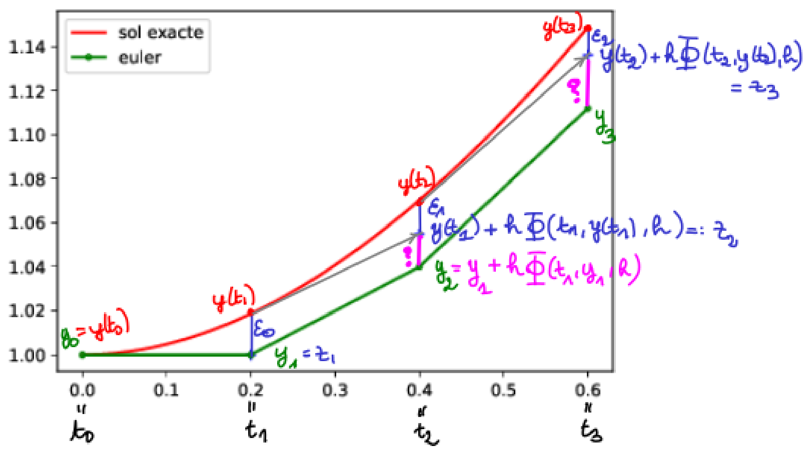
$$\tau_n(h) := y(t_n + h) - y(t_n) - h\,\Phi(t_n, y(t_n), h)$$

et *l'erreur de consistance* (globale) :

$$\tau(h) := \sum_{n=0}^{N-1} \|\tau_n(h)\|\,.$$

On dit que le schéma (S) est *consistant* avec le problème de Cauchy (P) sur $[t_0, t_0+T]$ si l'erreur de consistance $\tau(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 (i.e. quand N tend vers $+\infty$).
On dit de plus que le schéma est *consistant à l'ordre* $p \in \mathbb{N}^*$ avec le problème de Cauchy (P) sur $[t_0, t_0+T]$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\tau(h) \le C h^p.$$



Ajoutons quelques remarques concernant la définition précédente.

- Dans la définition précédente, C doit être indépendant de h et dépend en général de f, t_0, T et y_0 (et donc y à travers les quantités citées). On rappelle de plus que h et N sont liés par la relation $T = N\,h$.

- On trouvera dans la littérature la définition alternative d'erreur de consistance $\tilde{\tau}(h) := \dfrac{1}{h} \max\limits_{n=0\dots N-1} \|\tau_n(h)\|$. On vérifiera que $\tau(h) \le \tilde{\tau}(h)$ et notre notion de consistance est en théorie moins restrictive ce qui signifie que les résultats à venir restent vraies si on remplace τ par $\tilde{\tau}$ dans la définition de consistance. C'est la consistance $\tau(h)$ définie ici qui apparaît naturellement dans la preuve de convergence (voir preuve du Théorème 1) et c'est en pratique la quantité $\tilde{\tau}(h)$ qu'on estimera.

- On parlera de consistance du schéma avec l'EDO (E) lorsque pour toute solution maximale $(y_{max}, J \subset I)$ de (E) et tout segment $[t_0, t_0+T] \subset J$, le schéma est consistant avec le problème de Cauchy $((E), y(t_0) = y_{max}(t_0))$ sur $[t_0, t_0+T]$.

Proposition 1. *Si f est de classe C^1, le schéma d'Euler explicite est consistant avec l'EDO (E) à l'ordre* 1.

Preuve. Soit (y, J) une solution maximale de (E) et soit $[t_0, t_0+T] \subset J$. Comme f est de classe C^1, y est de classe C^2 et par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $n = 0, \dots, N-1$,

$$\|\, y(t_n + h) - y(t_n) - h y'(t_n)\| \le \frac{h^2}{2} \sup_{[t_0, t_0+T]} \|y''\|\,.$$

On rappelle que $\Phi(t,y,h)=f(t,y)$ dans le cas du schéma d'Euler et donc $y'(t_n)=f(t_n,y(t_n))=\Phi(t_n,y(t_n),h)$ de sorte que

$$\|\tau_n(h)\| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sup_{[t_0,t_0+T]}\|y''\|\right)}_{=:C} h^2 \quad \text{et finalement} \quad \tau(h) \leq CNh^2 = CTh\,.$$

Attention, on ne peut appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange que si y est à valeurs réelles ($d=1$), dans le cas général il faut appliquer directement l'inégalité de Taylor-Lagrange. □

3 Stabilité

Un schéma est stable si les erreurs cumulées sont éventuellement amplifiées au fil des itérations, mais au plus linéairement avec un contrôle uniforme en h (i.e. N). Ce qui est formalisé par la définition suivante:

Définition 2 (Stabilité)**.** On dit que le schéma (S) est *stable* s'il existe $M>0$ (indépendant de h ou N) tel que pour toutes suites (U_n), (V_n) et (ϵ_n) (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) satisfaisant

$$\begin{cases} U_{n+1} &= U_n + h\Phi(t_n,U_n,h) \\ V_{n+1} &= V_n + h\Phi(t_n,V_n,h) + \epsilon_n \end{cases}, \quad \forall n \in \{0,\dots,N-1\}$$

on a $\forall n \in \{0,\dots,N\}\,, \quad \|U_n - V_n\| \leq M\left(\|U_0-V_0\| + \sum_{j=0}^{n-1}\|\epsilon_j\|\right).$

On remarque que la notion de stabilité concerne le schéma (S) et ne dépend de (E) qu'à travers Φ et pas d'une solution cette fois !

Proposition 2. *Si Φ est Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, c'est-à-dire qu'il existe $\Lambda>0$ tel que pour tout $t\in[t_0,t_0+T]$, y_1, $y_2\in\mathbb{R}^d$, $h\in\mathbb{R}_+$ (ou $h\leq h_{max}$ pour un certain pas maximal h_{max}),*

$$\|\Phi(t,y_1,h)-\Phi(t,y_2,h)\| \leq \Lambda\|y_1-y_2\|\,,$$

alors le schéma (S) est stable et on peut prendre $M=e^{\Lambda T}$. En particulier, si f est globalement Lipschitzienne par rapport à y, le schéma d'Euler explicite est stable.

Preuve. Soit (U_n), (V_n) et $(\epsilon_n)_n$ comme dans la définition 2, on a alors pour $n=0,\dots,N-1$,

$$\begin{aligned}\|V_{n+1}-U_{n+1}\| &= \|V_n-U_n+h\left(\Phi(t,V_n,h)-\Phi(t,U_n,h)\right)+\epsilon_n\| \\ &\leq (1+h\Lambda)\|V_n-U_n\|+\|\epsilon_n\|\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence et en utilisant l'inégalité $1+x\leq e^x$ (valable pour $x\in\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\|V_n-U_n\| &\leq (1+h\Lambda)^n\|V_0-U_0\| + \sum_{k=0}^{n-1}(1+h\Lambda)^{n-k}\|\epsilon_k\| \\ &\leq \underbrace{e^{nh\Lambda}}_{\leq e^{T\Lambda}}\left(\|V_0-U_0\|+\sum_{k=0}^{n-1}\|\epsilon_k\|\right)\end{aligned}$$

□

Dans la proposition 2, l'hypothèse Φ globalement Lipschitzienne par rapport à y est assez restrictive, en travaillant un peu plus, on pourrait en fait s'en sortir avec l'hypothèse plus naturelle Φ localement Lipschitzienne par rapport à y (qui revient à f localement Lipschitzienne par rapport à y pour le schéma d'Euler explicite), quitte à se restreindre à un intervalle de temps plus petit $[t_0,t_0+T']$.

Remarque 1. La constante de stabilité $e^{\Lambda T}$ apparaissant dans la proposition 2 peut "facilement" être très grande : pour une fonction f qui serait 2-Lipschitz par rapport à y, sur un intervalle de temps $T = 10$, les erreurs peuvent être amplifiées par un facteur $e^{20} \sim 5.10^8$, il s'agit bien sûr d'une estimation dans le pire des cas et non d'une asymptotique en général. Cela étant, en considérant le cas $f(t,y) = \Lambda y$, pour $\Lambda > 0$, le schéma d'Euler explicite donne alors $y_{n+1} = y_n + h\Lambda y_n = (1+\Lambda h)y_n$ et donc $y_N = (1+\Lambda h)^N y_0$. La différence entre les solutions partant de y_0 et $y_0 + \delta y_0$ est ainsi

$$(1+\Lambda h)^N |y_0 + \delta y_0 - y_0| = \left(1 + \frac{\Lambda T}{N}\right)^N |\delta y_0| \sim_{N\infty} e^{\Lambda T} |\delta y_0|$$

et on tend vers "le pire des cas" quand on raffine le pas de temps ... La question de la stabilité numérique n'est ainsi pas entièrement réglée par la proposition 2. On ajoutera qu'on retrouve au niveau discret une propriété déjà existante au niveau continu : les solutions de $y' = \Lambda y$ telles que respectivement $y(0) = y_0$ et $y(0) = y_0 + \delta y_0$ diffèrent au temps T exactement de $e^{\Lambda T}|\delta y_0|$.

4 Consistance + Stabilité ⇒ Convergence

Définition 3 (Convergence)**.** Soit y la solution du problème de Cauchy (P). On dit que le schéma (S) est *convergent* pour (P) (sur $[t_0, t_0 + T]$) si

$$e(h) := \max_{n=0,\dots,N} \|y(t_n) - y_n\| \longrightarrow 0$$

quand h tend vers 0 et y_0 tend vers y_*.
On précise que pour $y_0 \in \mathbb{R}^d$ donné et pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, $(y_n)_{n=1\dots N}$ est la suite obtenue par application du schéma (S) partant de y_0.

Théorème 1. *Si le schéma (S) est stable et consistant pour (E), alors il est convergent (pour tout problème de Cauchy associé à (E)).*
En particulier, si f est de classe C^1 et Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, le schéma d'Euler explicite est convergent.

Preuve. Soit $t_0 \in I$ et $y_* \in \mathbb{R}^d$. Soit $(y, J \subset I)$ la solution maximale du problème de Cauchy $((E), y(t_0) = y_*)$ et fixons $[t_0, t_0 + T] \subset J$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $(y_n)_{n=1\dots N}$ obtenue par le schéma (S) partant de y_0. Il suffit de remarquer que

- par définition de $(y_n)_n$, $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$,
- par définition de $\tau_n(h)$, $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n), h) + \tau_n(h)$.

En reprenant les notations de la définition 2, avec $U_n = y_n$, $V_n = y(t_n)$ et $\epsilon_n = \tau_n(h)$, on en déduit par stabilité de (S) :

$$\begin{aligned} e(h) = \max_{n\in\{0,\dots,N\}} \|y(t_n) - y_n\| &\leq M\left(\|y(t_0) - y_0\| + \max_{n\in\{1,\dots,N\}} \sum_{k=0}^{n-1} \|\tau_k(h)\|\right) \\ &\leq M\Big(\|y_* - y_0\| + \underbrace{\tau(h)}_{\substack{\xrightarrow[h\to 0]{} 0 \\ \text{par consistance de } (S)}}\Big) \end{aligned}$$

□

Remarque 2. La convergence au sens de la définition 3 implique la convergence uniforme sur $[t_0, t_0 + T]$ de y_h^{app} vers y. En effet, pour $t \in [t_0, t_0 + T]$ et $n \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $t \in [t_n, t_{n+1}]$ on a

$$t = (1-\theta)t_n + \theta t_{n+1} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{t - t_n}{h} \quad \text{et} \quad y_h^{app}(t) = (1-\theta)y_n + \theta y_{n+1}\,.$$

Comme y est C^1, y est κ–Lipschitz sur $[t_0, t_0 + T]$ pour $\kappa = \sup_{[t_0, t_0+T]} \|y'\|$ et en écrivant $y(t) = (1-\theta)y(t) + \theta y(t)$,

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y_h^{app}(t)\| &\leq (1-\theta)\|y(t) - y_n\| + \theta\|y(t) - y_{n+1}\| \\
&\leq (1-\theta)\|y(t) - y(t_n)\| + (1-\theta)\|y(t_n) - y_n\| + \theta\|y(t) - y(t_{n+1})\| + \theta\|y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| \\
&\leq (1-\theta)\kappa|t - t_n| + \theta\kappa|t - t_{n+1}| + (1 - \theta + \theta)e(h) \\
&\leq \kappa h + e(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0
\end{aligned}$$