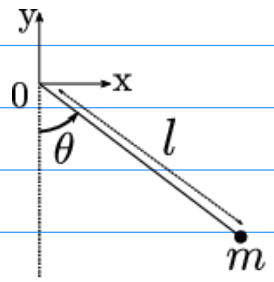
II. ÉTUDE DE PENDULES



Mouvement du pendule décrit par l'EDO

$$(E) \qquad \theta''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t)$$

• On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 en posant $v = \theta'$ et $X = \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$, on a alors

$$X' = \begin{pmatrix} \theta' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{\ell} \sin\theta \end{pmatrix}$$

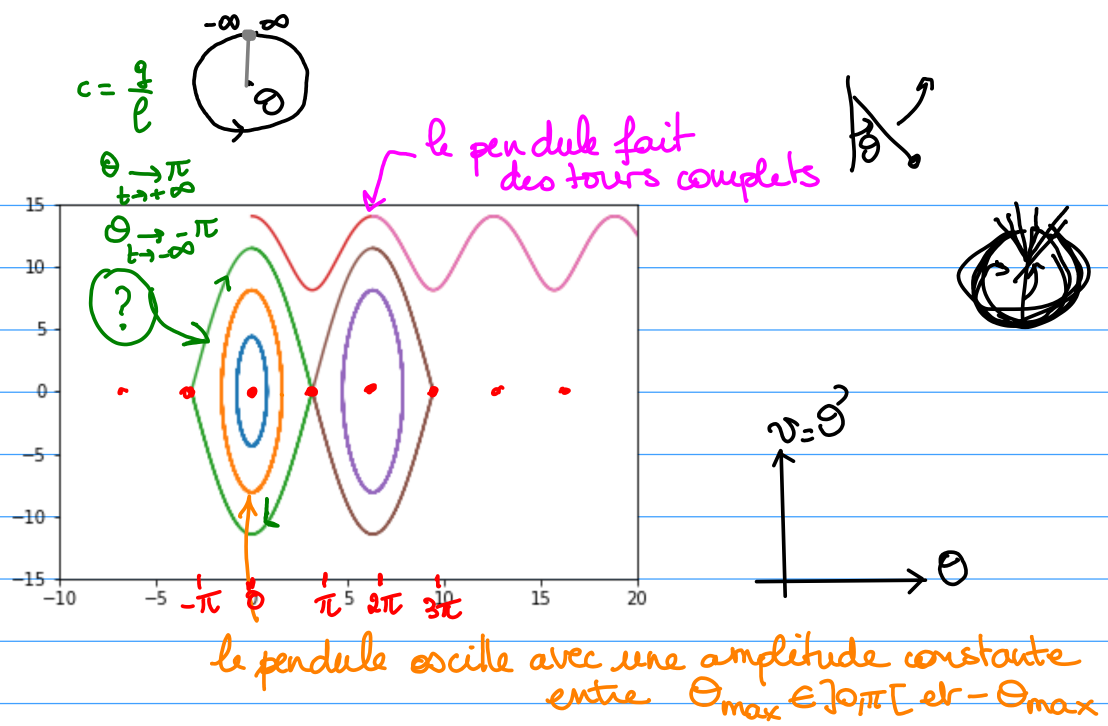
De sorte θ est solution de (E)

$\boxed{\text{ssi}}$ X est solution de $\underbrace{X' = f(X)}_{(E_1)}$ où $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 \end{pmatrix}$

• On résout numériquement en appliquant le schéma du point milieu à (E_1) et on s'intéresse aux "orbites" de (E_1) :
Pour $(\theta_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, soit $(\theta, v) : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ solution maximale de (E_1) tq $(\theta(0), v(0)) = (\theta_0, v_0)$, on définit l'orbite associée :

$$\mathcal{O}_{\theta_0, v_0} = \{(\theta(t), v(t)) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ image de la courbe paramétrée } (\theta, v)$$

On représente les orbites obtenues numériquement pour qq. conditions initiales "bien choisies".



Étude théorique

- Points d'équilibre de (E_1) : $X' = f(X)$

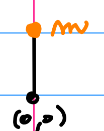
On cherche $X \in \mathbb{R}^2$ tq $f(X) = 0 \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 = 0 \end{cases}$

$\iff X_k \in \{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$

Pour un tel X_k

la fonction constante $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto X_k$ est solution de (E_1)

et l'orbite associée est réduite à un point $\{X_k\}$



"centre" * $X_k = k\pi$, k pair : pendule à la verticale en bas

k impair "col" * $X_k = k\pi$, k impair : pendule à la verticale en haut

- On pourrait linéariser (E_1) au voisinage des points d'équilibre pour déterminer leur nature (Cf. UE. EDO)

- "<u>Intégrale première</u>" : $\forall t \in J$, $E(\theta(t), v(t)) = cte = E(\theta_0, v_0)$

où $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{g}{\ell}\cos x_1$

$\partial_1 E(x_1, x_2) = \frac{g}{\ell}\sin x_1$ et $\partial_2 E(x_1, x_2) = x_2$

En effet, $\frac{d}{dt}\left(E(\theta(t),v(t))\right) = \theta'(t)\,\frac{g}{\ell}\sin\theta(t) + \underbrace{v'(t).v(t)}_{\theta''(t)\,\theta'(t)}$

$$= \theta'(t)\left(\frac{g}{\ell}\sin\theta(t) + \theta''(t)\right)$$

$\overset{\shortparallel}{0}$ car θ sol de (E)

Très fort de connaître une intégrale première (aussi simple!)

On a :

$$\mathcal{O}_{\theta_0,v_0} \subset \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : E(x_1,x_2) = E(\theta_0,v_0)\}$$

Ici, on peut facilement étudier l'équation $E(x_1,x_2) = \overset{cte}{c}$

$$\iff x_2^2 = 2\left(c + \frac{g}{\ell}\cos x_1\right)$$

et il reste à discuter selon que : $c > \frac{g}{\ell}$; $c = \frac{g}{\ell}$; $-\frac{g}{\ell} < c < \frac{g}{\ell}$

$c = -\frac{g}{\ell}$ et $c < -\frac{g}{\ell}$

On retrouve les $\neq$ types d'orbites observées numériquement.