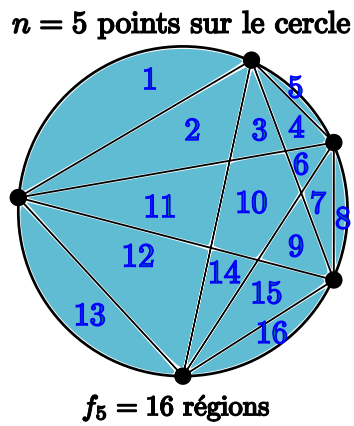
Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

blanche.buet@u-psud.fr

Séance 3
Un peu de combinatoire ...
Correction en violet

Exercice 1.—

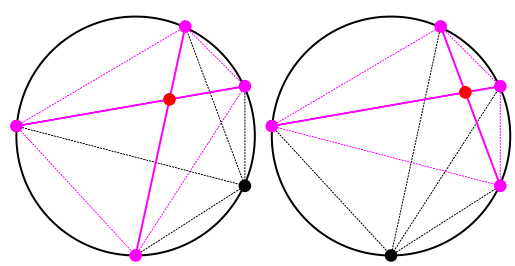
1. Traiter les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Qu'en pensez-vous ? Tester le cas $n = 6$, qu'en pensez-vous maintenant ? *On donne un exemple pour $n = 5$ ci-contre. On trouve $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$, $f_4 = 8$, $f_5 = 16$, ça ressemble furieusement à $f_n = 2^{n-1}$! Et pourtant vous avez beau recompter, vous trouvez $f_6 = 31$. Vous ne vous trompez pas ...*



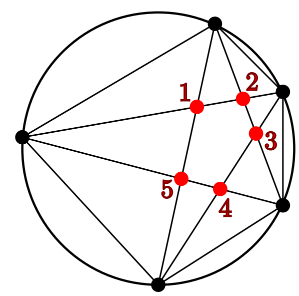
2. On va commencer plus modestement : combien y a-t-il de cordes dans $C^{(n)}$? *Une corde correspond exactement à deux points distincts, et il y a n points sur le cercle. On doit donc compter le nombre de façons de choisir 2 points sur le cercle parmi n points. Or on sait que le nombre de façon de choisir k points dans un ensemble à n élements est*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$
On trouve ici le nombre de corde $c_n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 2.—

1. Certaines cordes de $C^{(n)}$ s'intersectent à l'intérieur du disque, on note $S^{(n)}_{int}$ l'ensemble des points d'intersection ainsi créés à l'intérieur (pas sur le cercle) du disque. Calculer s_n le cardinal de $S^{(n)}_{int}$.
On pourra observer les deux exemples ci-contre. Remarquer qu'un point d'intersection intérieur (rouge) correspond à 2 cordes distinctes qui se croisent et donc à 4 points distincts sur le cercle. Réciproquement, étant donnés 4 points distincts sur le cercle (roses), ils correspondent à 6 cordes (roses) dont seulement 2 se croisent (à l'intérieur) pour donner un point d'intersection intérieur. Dans la configuration ci-contre, on observe $s_5 = 5$.

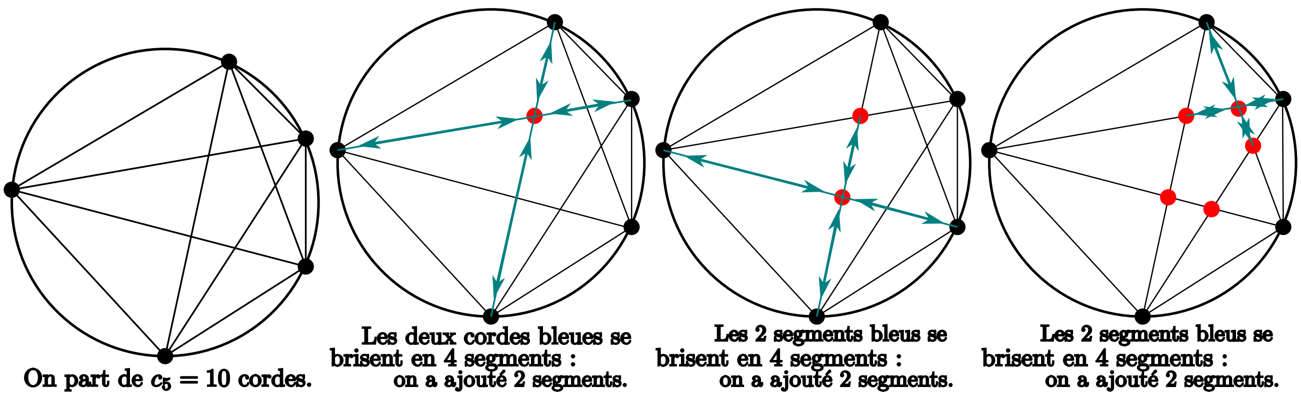


Plus généralement, on vient de voir qu'on doit compter le nombre de façon de choisir 4 points distincts parmi les n points sur le cercles, on a donc
$$s_n = \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$
points intérieurs.



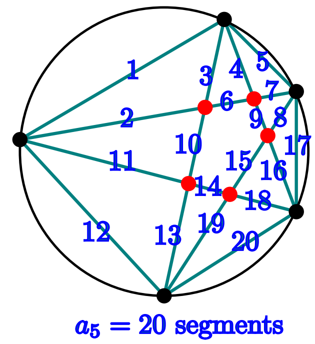
2. L'ensemble des points $S_{int}^{(n)}$ d'intersection des cordes ainsi que l'ensemble des n points de $S^{(n)}$ sur le cercle divisent les cordes en un ensemble de segments, noté $A^{(n)}$. Calculer le nombre de ces segments a_n.

   Partir du nombre de cordes trouvé dans le premier exercice. On va ajouter les points (rouges) intérieurs un à un. Chaque fois qu'on ajoute un point rouge on coupe deux segments chacun en deux nouveaux segments, bilan : 2 anciens segments donnent 4 nouveaux, on ajoute deux segments au compte précédent pour chaque point rouge ajouté.



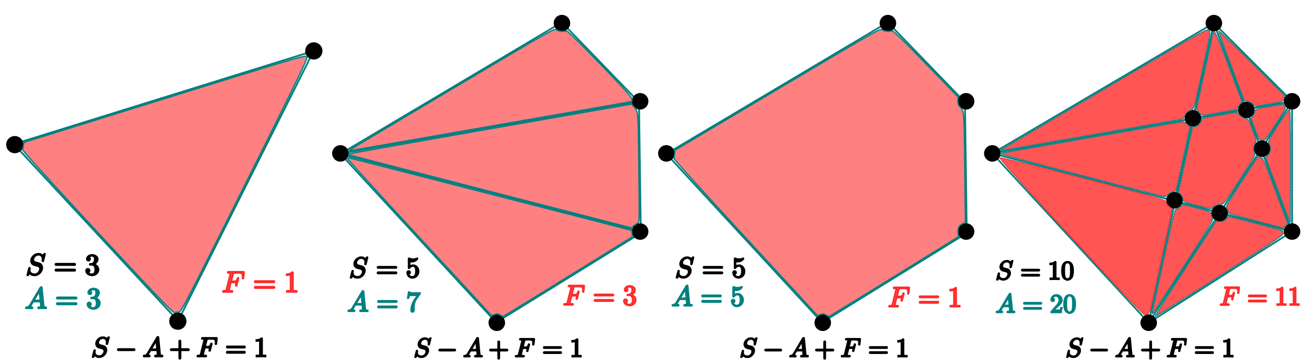
Autrement dit, on a c_n cordes au départ et on ajoute 2 segments chaque fois qu'on ajoute un point rouge, et il y a s_n points rouges :

$$a_n = c_n + 2s_n = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}.$$



Exercice 3.— On cherche une relation liant le nombre de sommets, d'arêtes et de régions dans un polygone "maillé" (partitionné) lui-même par des polygones (convexes). On notera dans toute la suite S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces dans le maillage.

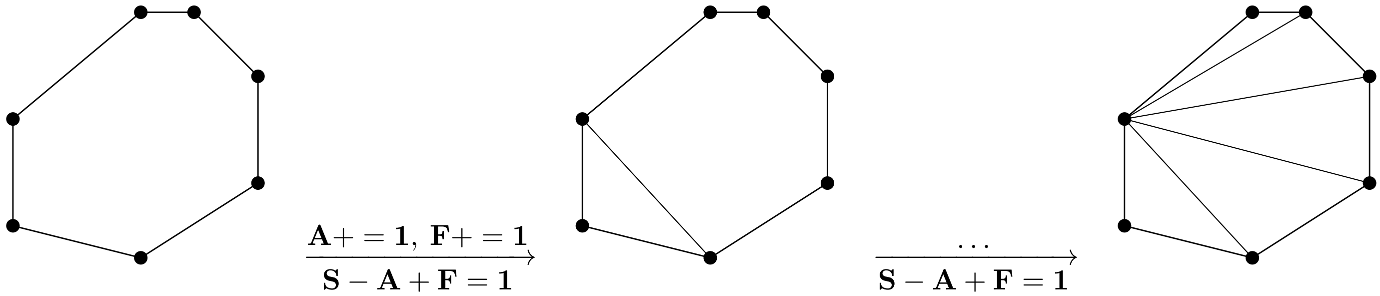
1. Calculer $S - A + F$ sur quelques exemples.



2. Étant donné un polygone convexe D à n côtés, on a $S - A + F = n - n + 1 = 1$. Construire une triangulation de D qui ne change pas cette identité. Que peut-on en déduire ?

Un polygone est dit convexe si tout segment joignant deux points sur le polygone reste à l'intérieur du polygone. On peut alors choisir n'importe quel sommet du polygone D et le relier à chacun des autres sommets. Chaque fois que l'on rajoute un segment, on ajout également une face et le nombre de sommet reste inchangé. Ainsi $(S-(A+1)+(F+1)=S-A+F=1$ et l'identité $S-A+F=1$ est préservée.

On en déduit qu'il suffit de montrer la **relation d'Euler** *pour un polygone convexe maillé par des triangles.*



Exercice 4.— On va donner une idée de la preuve de la relation d'Euler dans le cas d'un *maillage triangulaire* d'un polygone D.

On laisse cet exercice de côté et on admet la relation d'Euler. On peut alors revenir à notre problème initial, dans lequel $S=n+s_n$ (points sur le cercle + sommets intérieurs), $A=a_n$ et $F=f_n-n$ (nombre de régions qu'on cherche à calculer - les n régions entre le polygone et le cercle). La relation d'Euler nous permet de dire que

$$S-A+F=1 \quad \Leftrightarrow \quad (n+s_n)-a_n+(f_n-n)=1 \quad \Leftrightarrow \quad f_n=1+a_n-s_n\,.$$

On conclut que $\mathbf{f_n=1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}}$.

1. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement deux arêtes sur le bord extérieur ?

   On enlève tous les triangles de ce type.

2. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement une arête sur le bord extérieur ?

   On enlève un triangle de ce type (et on demande que le triangle n'ait que deux sommets sur le bord extérieur) et on revient à la première étape. On itère jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

3. Quel type de face reste-t-il (combien d'arêtes sur le bord ?)

   On admet qu'il ne reste plus qu'un seul triangle.

4. En déduire la relation d'Euler dans ce cas.

Revenir au problème initial et conclure !

Remarque. La relation d'Euler reste vraie dans le cas d'un maillage avec des polygones non nécessairement convexes, mais trianguler un polygone non convexe est possible mais pas évident du tout en général.

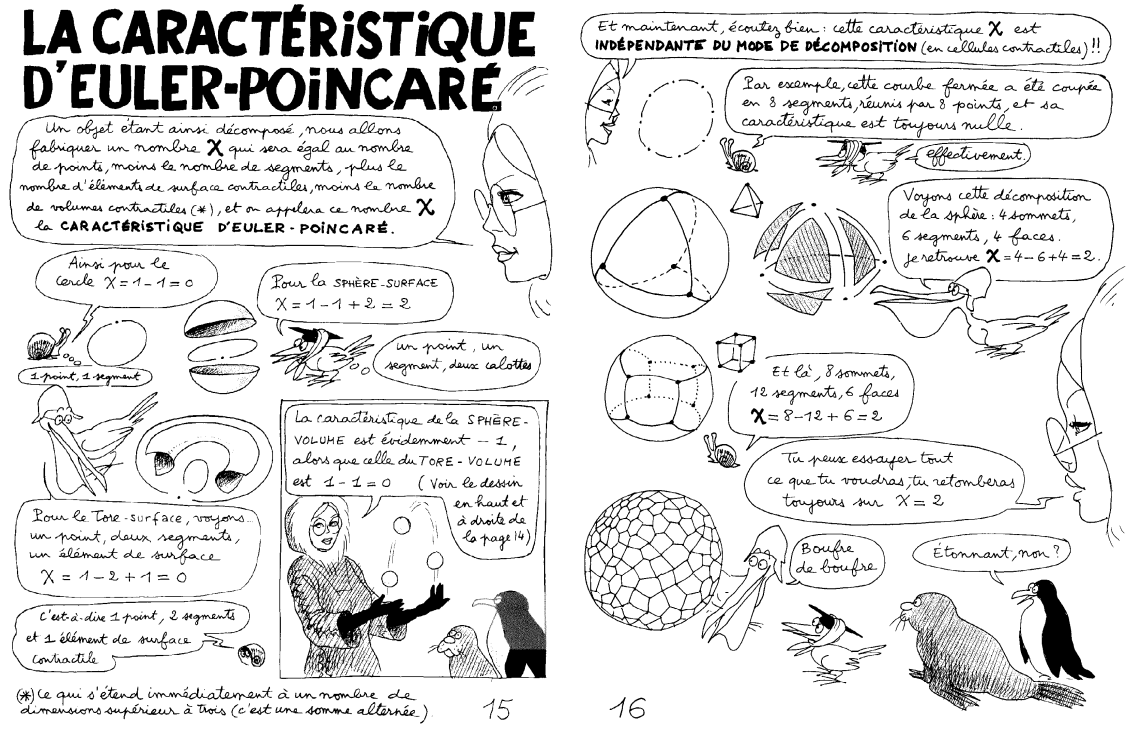


Figure 1: Extrait du *Toplogicon* de Jean-Pierre Petit