Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Continuité pédagogique
blanche.buet@u-psud.fr

Thème 5
Un peu de combinatoire ...

Problème.— On place n points sur un cercle. On note $S_0^{(n)}$ l'ensemble de ces n points. On trace ensuite toutes les cordes joignant deux points de $S_0^{(n)}$. On note $C^{(n)}$ l'ensemble de ces cordes. Ces cordes divisent le disque en un ensemble fini de domaines que l'on notera $F^{(n)}$. On veut calculer le nombre de régions créées f_n, c'est-à-dire le cardinal de $F^{(n)}$. On supposera que trois cordes de $C^{(n)}$ ne se croisent jamais un un même point.

Exercice 1.—

1. Traiter les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Qu'en pensez-vous ? Tester le cas $n = 6$, qu'en pensez-vous maintenant ?
2. On va commencer plus modestement : combien y a-t-il de cordes dans $C^{(n)}$?

Exercice 2.—

1. Certaines cordes de $C^{(n)}$ s'intersectent à l'intérieur du disque, on note $S_{int}^{(n)}$ l'ensemble des points d'intersection ainsi créés à l'intérieur (pas sur le cercle) du disque. Calculer s_n le cardinal de $S_{int}^{(n)}$.
2. L'ensemble des points $S_{int}^{(n)}$ d'intersection des cordes ainsi que l'ensemble des n points de $S^{(n)}$ sur le cercle divisent les cordes en un ensemble de segments, noté $A^{(n)}$. Calculer le nombre de ces segments a_n.

Exercice 3.— On cherche une relation liant le nombre de sommets, d'arêtes et de régions dans un polygone “maillé” (partitionné) lui-même par des polygones (convexes). On notera dans toute la suite S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces dans le maillage.

1. Calculer $S - A + F$ sur quelques exemples.
2. Étant donné un polygone convexe D à n côtés, on a $S - A + F = n - n + 1 = 1$. Construire une triangulation de D qui ne change pas cette identité. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4.— On va donner une **idée** de la preuve de la relation d'Euler dans le cas d'un *maillage triangulaire* d'un polygone D.

1. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement deux arêtes sur le bord extérieur ?

   On enlève tous les triangles de ce type.

2. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement une arête sur le bord extérieur ?

   On enlève un triangle de ce type (et on demande que le triangle n'ait que deux sommets sur le bord extérieur) et on revient à la première étape. On itère jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

3. Quel type de face reste-t-il (combien d'arêtes sur le bord ?)

   On admet qu'il ne reste plus qu'un seul triangle.

4. En déduire la relation d'Euler dans ce cas.

Revenir au problème initial et conclure !

Remarque. La relation d'Euler reste vraie dans le cas d'un maillage avec des polygones non nécessairement convexes, mais trianguler un polygone non convexe est possible mais pas évident du tout en général.

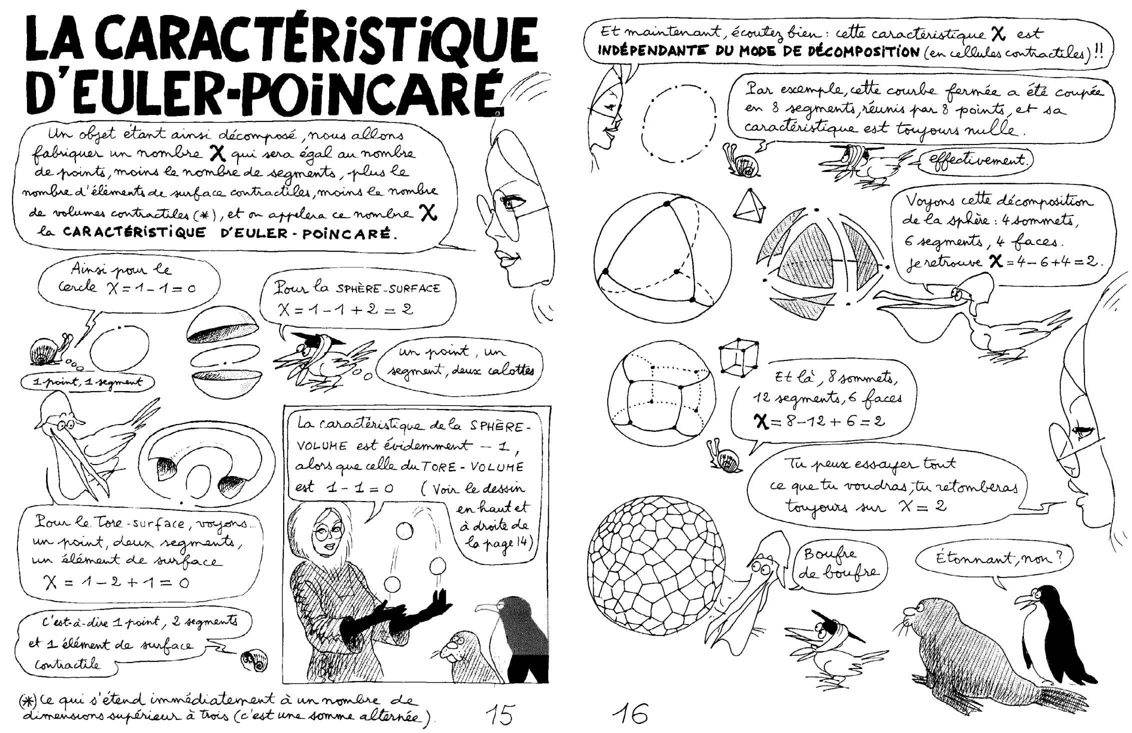

Figure 1: Extrait du *Toplogicon* de Jean-Pierre Petit