Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Thème 4

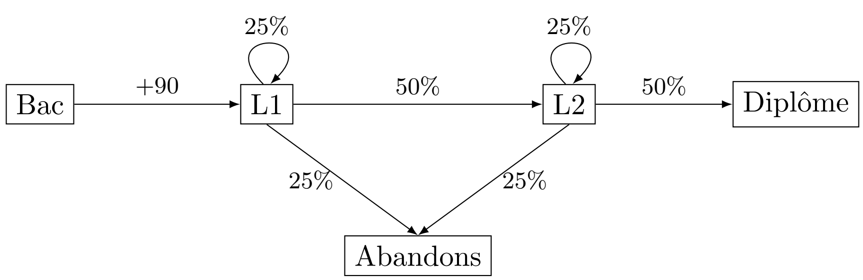
Évolution de systèmes, matrice de transition et chaînes de Markov

Nous allons utiliser le calcul matriciel pour modéliser l'évolution d'un système possédant un nombre fini "d'états". Commençons par un exemple.

Exemple 1.— Notre objectif est d'étudier l'évolution des effectifs des étudiants dans un cycle d'étude de deux ans L1 et L2 (pour simplifier). On a les données suivantes :

- chaque année, 90 nouveaux étudiants arrivent en L1 ;
- 50% des étudiants de L1 passent en L2, 25% redoublent et 25% abandonnent ;
- 50% des étudiants de L2 ont le diplôme, 25% redoublent et 25% abandonnent.

On peut résumer ces informations dans le graphe suivant :



Les effectifs en L1 et L2 sont-ils stables ? Quelle proportion des étudiants obtient le diplôme de fin des deux ans ?

Exercice 1.— On note $x_1(n)$ le nombre d'étudiants en L1 l'année n et $x_2(n)$ le nombre d'étudiants en L2 l'année n.

1. Exprimer $x_1(n+1)$ et $x_2(n+1)$ en fonction de $x_1(n)$ et $x_2(n)$.
2. En introduisant le vecteur $X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$, réécrire les relations établies à la question précédente sous la forme matricielle
$$X(n+1) = MX(n) + E \tag{1}$$
où M est une matrice de taille 2×2 et E est un vecteur colonne de taille 2.
3. Vérifier que si le vecteur d'effectifs initiaux $X(0)$ est solution du système $X = MX + E$, alors les effectifs sont stables : pour tout n, $X(n) = X(0)$.
4. Résoudre le système $X = MX + E$ d'inconnue X. *Vous devriez trouver une unique solution que l'on notera* $X_{eq} = \begin{pmatrix} x_{1,eq} \\ x_{2,eq} \end{pmatrix}$ *par la suite.*

5. Quel est le taux de réussite $\dfrac{\text{diplomés}}{\text{entrants}}$ pour les effectifs stables X_{eq} ?

   On va finir cette étude en montrant que les effectifs d'étudiants en L1 et L2 tendent vers les effectifs stables $x_{1,eq}$ *et* $x_{2,eq}$ *trouvés précédemment lorsque le nombre d'années* n *tend vers* $+\infty$.

6. On introduit la vecteur $\Delta(n) = X(n) - X_{eq}$ qui mesure l'écart entre les effectifs d'étudiants l'année n et les effectifs stables. Montrer que
$$\Delta(n) = M^n \Delta(0)\ .$$

7. Vérifier que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$, en déduire que chacune des composantes du vecteur $\Delta(n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

8. Conclure quant à la stabilité des effectifs en L1 et L2.

Continuons avec un autre exemple.

Exemple 2.— *Un modèle d'épidémie.*

On étudie un modèle d'épidémie à trois états : chaque individu peut-être malade (M), immunisé (I) ou sain mains non immunisé (S). D'une semaine à l'autre,

- 2% des personnes malades le restent, 50% guérissent et sont immunisées et 48% guérissent mais ne sont pas immunisées;
- 99% des immunisés le restent et 1% ne le sont plus mais restent sains;
- 98% des personnes saines mais non immunisées le restent et 2% tombent malades.

On note $x_M(k)$ (respectivement $x_I(k)$ et $x_S(k)$) la proportion de la population qui est malade (M) (respectivement immunisée (I), saine mais non immunisée (S)) après k semaines. On note alors $X(k) = \begin{pmatrix} x_M(k) \\ x_I(k) \\ x_S(k) \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$.

Les proportions de la population dans chacun des états (M) malades, (I) immunisés, (S) sains mais non immunisés, se stabilisent-elles une fois que l'épidémie s'est installée (quand $k \to +\infty$) ? si oui, quelles proportions obtient-on ?

Exercice 2.—

1. Représenter ces informations sous forme de graphe.

2. Montrer que $x_M(k)$, $x_I(k)$ et $x_S(k)$ vérifient des relations de récurrence linéaire.

3. En déduire que $X(k)$ vérifie une relation de récurrence matricielle de la forme $X(k+1) = AX(k)$.

4. On suppose que $x_M(0), x_I(0), x_S(0)$ sont positifs et de somme égale à 1 : proportions de personnes malades, immunisées et saines au temps 0. *On conservera cette hypothèse dans toute la suite de l'exercice.* Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $x_M(k), x_I(k), x_S(k)$ positifs et de somme égale à 1.

5. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$, tels que $Y = AX$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

   (a) Vérifier que $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

   (b) Montrer que $|y_1| + |y_2| + |y_3| \leq 0.99\,(|x_1| + |x_2| + |x_3|)$.

6. Calculer l'*état stationnaire* $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_M} \\ \overline{x_I} \\ \overline{x_S} \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$ à coefficients positifs de somme 1 tel que $A\overline{X} = \overline{X}$.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$|\overline{x_M} - x_M(k+1)| + |\overline{x_I} - x_I(k+1)| + |\overline{x_S} - x_S(k+1)| \leq 0.99\left(|\overline{x_M} - x_M(k)| + |\overline{x_I} - x_I(k)| + |\overline{x_S} - x_S(k)|\right) .$$

Indication : on pourra utiliser la question 5 avec $X = \overline{X} - X(k)$ *et* $Y = \overline{X} - X(k+1)$.

8. Montrer que

$$|\overline{x_M} - x_M(k)| + |\overline{x_I} - x_I(k)| + |\overline{x_S} - x_S(k)| \leq (0.99)^k\left(|\overline{x_M} - x_M(0)| + |\overline{x_I} - x_I(0)| + |\overline{x_S} - x_S(0)|\right) .$$

9. En déduire $\lim\limits_{k\to\infty} X(k)$.

Pour la culture ...

Les exemples précédents décrivent l'évolution d'un système à deux états (les deux années du cycle) puis trois états (M,I,S) et dont les transitions d'un état à l'autre sont données par des probabilités de transition. On peut modéliser systématiquement ce genre de problème et montrer que sous certaines hypothèses, on retrouve le phénomène de convergence vers un état stable (ou encore *état stationnaire*) observé dans chacun des deux exemples. On va se restreindre au cas d'un système "fermé" comme dans l'exemple 2 (pas d'entrée ou de sortie dans le système).

Plus précisément, on considère un système qui peut être dans un certain nombre d'états E_1 , E_2, ..., E_n. On suppose qu'il évolue d'un instant $t = k$ à l'instant d'après $t = k+1$ en suivant des probabilités de transition connues et indépendantes de l'instant t. On note p_{ij} la probabilité de passer de l'état E_j à l'état E_i entre deux instants consécutifs. À partir de ces probabilités de transition, on définit la *matrice de transition du système* M comme

$$M = (p_{ij})_{i,j=1...n}$$

On s'intéresse à l'évolution des différentes proportions $x_i(k)$ du système qui sont dans les états E_i à un instant $t = k$. Le vecteur de ces proportions

$$X(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$$

satisfait alors la relation de récurrence $X(k+1) = MX(k)$. L'état du système à l'instant $t = k$ est alors explicitement donné par $X(k) = M^k X(0)$.

Si on reprend l'exemple 2, on a un système à 3 états $E_1 = (M)$, $E_2 = (I)$, $E_3 = (S)$ et les probabilités de transitions sont alors

$$\begin{array}{lll} p_{11} = 0.02, & p_{12} = 0, & p_{13} = 0.02, \\ p_{21} = 0.5, & p_{22} = 0.99, & p_{23} = 0 \\ p_{31} = 0.48, & p_{32} = 0.01, & p_{33} = 0.98 \end{array} \quad \text{et la matrice de transition} \quad M = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0.02 \\ 0.5 & 0.99 & 0 \\ 0.48 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}$$

On observe sur l'exemple 2 que la matrice M a tous ses coefficients dans $[0,1]$ et la somme sur chaque colonne vaut 1. Cette dernière propriété traduit le fait qu'on considère un système fermé : la probabilité de passer d'un état à n'importe quel état vaut 1, on ne peut pas sortir du système. On a observé un phénomène de convergence vers une état stationnaire (noté $\overline{X}$) lorsque $k \to +\infty$, et de plus cet état limite est indépendant de la situation de départ $X(0)$. C'est un phénomène assez général que décrit le *théorème de Perron-Frobénius.*

Théorème 1 (Perron-Frobénius)**.** *On suppose que* M *est une matrice de transition irréductible, alors il existe un unique état stationnaire* $\overline{X}$: $M\overline{X} = \overline{X}$*, et de plus, quel que soit l'état initial du système* $X(0)$*, on a convergence vers l'état stationnaire :*

$$\lim_{k\to+\infty} X(k) = \overline{X} .$$

- Commençons par expliciter l'hypothèse *"M est une matrice de transition"*. On demande que M décrive l'évolution d'un système fermé. Chaque coefficient de la matrice M est une probabilité de transition d'un état à un autre donc dans $[0,1]$ et la somme des coefficients sur chaque colonne vaut 1, ce qui traduit qu'on ne peut pas sortir du système contrairement à ce qui était décrit dans l'exemple 1 (les étudiants diplômés sortaient du système, de même que ceux qui abandonnaient). Cette hypothèse assure que si le vecteur initial $X(0)$ décrit les proportions du système dans chacun des états E_1, ..., E_n :
  - chaque composante $x_1(0)$, ..., $x_n(0)$ est dans $[0,1]$,
  - la somme des composantes de $X(0)$ vaut 1,

  alors $X(k)$ vérifie ces mêmes propriétés et décrit bien les proportions du système dans chacun des états à tout instant $t=k$. Cela se vérifie par récurrence sur k.

- Passons à présent à l'hypothèse *"M est irréductible"*. On dit que la matrice de transition est irréductible s'il existe une puissance p telle que tous les coefficients de M^p soient >0.

  Dans l'exemple 2, $M^1 = M$ a des coefficients nuls, en revanche M^2 a tous ses coefficients >0, la matrice M est donc bien irréductible.

  On remarque que $X(p) = M^p X(0)$ et plus généralement, $X(k+p) = M^p X(k)$. La matrice M^p est la matrice de transition d'un système pour lequel on effectue p étapes d'un coup. Dire que M^p n'a aucun coefficient nul signifie qu'on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel état en p étapes (avec probabilité non nulle). Cela se traduit sur le graphe par la propriété suivante : pour tout couple d'états, il existe un chemin constitué de p arêtes passant du premier état au deuxième.

- Remarquons enfin que si on sait a priori que la suite $(X(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain vecteur $\overline{X}$, alors, par continuité de la multiplication matricielle

  $$\lim_{k\to+\infty} MX(k) = M\overline{X}$$

  et on déduit de la relation $X(k+1) = MX(k)$ que le vecteur $\overline{X}$ doit satisfaire la relation $M\overline{X} = \overline{X}$. On appelle *état stationnaire* un vecteur satisfaisant cette relation et à composantes dans $[0,1]$ de somme 1 (on cherche une solution qui représente bien l'état du système).