Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2019–2020
Continuité pédagogique
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 4

Partitions en cercles

On rappelle que le cercle C (respectivement le disque D) de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ peuvent être définis comme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2\right\} \quad \text{et} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\right\} .$$

Exercice 1.— *Le but de cet exercice est de montrer que l'intersection d'une suite de disques emboîtés et dont le diamètre tend vers* 0 *est réduite à exactement un point.*

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de disques de centre $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r_n > 0$ telle que

$$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ D_{n+1} \subset D_n .$$

On note

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ (x,y) \in D_n\right\} .$$

(1) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
(2) En déduire que E est non vide.
(3) Montrer que E contient exactement un point.

Exercice 2.— *Le but de cet exercice est de montrer qu'il est impossible de partitionner* $\mathbb{R}^2$ *en cerles de diamètre non nul.*

On va procéder par l'absurde et supposer qu'une telle partition existe, c'est-à-dire, on suppose qu'on a une famille de cercles $\{C_i\}_{i\in I}$ deux à deux disjoint et dont la réunion est tout $\mathbb{R}^2$. Pour tout $i \in I$, on note $\omega_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ le centre du cercle C_i et $r_i > 0$ son rayon, on note D_i le disque associé à C_i.

(1) (a) Montrer qu'il existe une application $\sigma : I \to I$ telle que pour tout $i \in I$,

$$D_{\sigma(i)} \subset D_i \quad \text{et} \quad r_{\sigma(i)} \leq \frac{r_i}{2} .$$

On pourra utiliser l'exercice 1.

(b) Construire une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_{i_{n+1}} \subset D_{i_n} \quad \text{et} \quad r_{i_{n+1}} \leq \frac{1}{2} r_{i_n} .$$

(2) En déduire que $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{i_n}$ est non vide et aboutir à une contradiction.

Exercice 3.— *Et à votre avis, peut-on partitionner* $\mathbb{R}^3$ *en cercles ?! Comment ... ?*