Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2017–2018
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 5
Dynamique des populations

Exercice 1.— *Points fixes et suites récurrentes* Soit $f : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ de classe C^2 telle que

- $\forall t > 0,\ f'(t) > 0$ et $f''(t) > 0$,
- $0 < f(0) < 1$ et $f(1) = 1$ (et $f'(0) < 1$).

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $x_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Vérifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$.
2. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que $f(x) - \big(f(1) + f'(1)(x-1)\big) > 0$.
   Qu'est-ce que cela signifie graphiquement ?
3. **Cas 1:** on suppose $f'(x) \leq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) - x > 0$.
   (b) En déduire que 1 est l'unique point fixe de f sur $[0,1]$ et que $(x_n)_n$ converge vers 1.
4. **Cas 2:** on suppose $f'(x) > 1$ et $x_0 = f(0)$.
   (a) On définit g sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Montrer qu'il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$.
   (b) Étudier les variations de g.
   (c) En déduire que f a exactement deux points fixes sur $[0,1]$: $0 < x_* < c$ et 1.
   (d) Étudier les variations de $(x_n)_n$ selon que $x_0 \in]0, x_*[$ ou $]x_*, 1[$. Si $x_0 = x_*$, $(x_n)_n$ est constante égale à x_*.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, x_*]$ et que $(x_n)_n$ converge vers x_*.

Exercice 2.— *Composition d'entiers*
Soit $s, k \in \mathbb{N}$, Une s–composition (faible) de k est un s-uplet $(k_1, \ldots, k_s)$ d'entiers ≥ 0 tel que

$$k_1 + \ldots + k_s = k\ .$$

On note $\mathrm{C}_{\mathrm{k,s}}$ l'ensemble fini des s–compositions faibles de k et $c(k,s) = \mathrm{card}\ \mathrm{C}_{\mathrm{k,s}}$ le nombre de s–compositions faibles de k.

1. Calculer $c(k,s)$.
2. Montrer que $c(k,s)$ est le coefficient de x^k dans $(1 + x + x^2 + \ldots + x^k)^s$.
3. Montrer de même que

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_s)\in\mathbb{N} \\ \text{composition de } k}} p_{k_1}\, p_{k_2} \ldots p_{k_s} = \text{ coefficient de } x^k \text{ dans } (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_k x^k)^s$$

4. Montrer enfin que si on impose en plus que chaque part $k_1, \ldots, k_s \in \{0, \ldots, q\}$ alors

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_s)\in\{0,\ldots,q\}^s \\ \text{composition de } k}} p_{k_1}\, p_{k_2} \ldots p_{k_s} = \text{ coefficient de } x^k \text{ dans } (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_p x^q)^s$$

Exercice 3.— *Galton-Watson*

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $p_0, p_1, \ldots, p_q \in [0,1]$ tels que $p_0 + p_1 + \ldots + p_q = 1$.

On considère une population d'individus évoluant au cours des générations. On notera Z_n la variable aléatoire donnant le nombre d'individus à la génération $n \in \mathbb{N}$. Dans le modèle de Galton-Watson, on passe de la génération n à la génération $n+1$ de la façon suivante:

- Chaque individu de la génération n se reproduit avec probabilité $p_k \in [0,1]$ d'avoir exactement k enfants pour $k \in \{0, \ldots, q\}$ et ne peut avoir plus (strictement) de q enfants.
- Chaque individu meurt instantanément après reproduction.

On peut formaliser ce modèle ainsi, on notera $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,Z_n}$ le nombre d'enfants qu'ont respectivement les Z_n individus de la génération n, de sorte que les $(X_{n,s})_{n,s\in\mathbb{N},s\leq Z_n}$ sont indépendantes de même loi et

$$Z_{n+1} = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,Z_n} .$$

On suppose $Z_0 = 1$ (plus précisément $P(Z_0 = 1) = 1$), $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$.

1. Quel est le nombre maximal d'individus à la génération 1 ? n ?

2. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\begin{aligned} \forall x, \quad \phi(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_q x^q = \sum_{i=0}^{q} p_i x^i \\ &= P(Z_1 = 0) + P(Z_1 = 1)x + P(Z_1 = 2)x^2 + \ldots + P(Z_1 = q)x^q . \end{aligned}$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit similairement $\phi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x, \quad \phi_n(x) = P(Z_n = 0) + P(Z_n = 1)x + P(Z_n = 2)x^2 + \ldots + P(Z_n = q^n)x^{q^n} .$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il y a s individus à la génération n, quelle est la probabilité qu'il y ait $k \in \{0, \ldots, q^{n+1}\}$ individus à la génération $n+1$?
   Indication: on pourra commencer par montrer que si $s \geq 1$,

$$P(Z_{n+1} = k | Z_n = s) = \sum_{\substack{(k_1,\ldots k_s)\in\{0,\ldots,q\}^s \\ \textit{composition de } k}} P\left(X_{n,1} = k_1 \textit{ et } \ldots \textit{ et } X_{n,s} = k_s\right) .$$

   puis utiliser l'exercice 2 et montrer que $P(Z_{n+1} = k | Z_n = s) =$ coefficient de x^k dans $(\phi(x))^s$.

   (b) En déduire que pour tout x, $\phi_{n+1}(x) = \phi_n(\phi(x))$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_n = \underbrace{\phi \circ \ldots \circ \phi}_{n \text{ fois}}$.

3. On définit $\pi_n = P(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction à la génération n.

   (a) Montrer que π_n vérifie la relation de récurrence suivante: $\forall n, \quad \pi_{n+1} = \phi(\pi_n)$.

   (b) Calculer et interpréter $\phi'(1)$. Montrer que ϕ vérifie les hypothèses de l'exercice précédent. Conclure quant à la limite de π_n en fonction de $\phi'(1)$.

4. Montrer que si $p_0 = 0$ alors pour tout n, $\pi_n = 0$. Montrer que si $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$ alors $\pi_n = 1 - (p_1)^n$.