Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2018–2019
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 5

Dynamique des populations II

Exercice 1.— *Le modèle logistique continu*

On propose à présent un modèle continu. On veut modéliser l'évolution d'une population sur un intervalle de temps $[0,T]$. Si on subdivise uniformément cet intervalle en N sous-intervalles de la forme $[t_k, t_{k+1}]$ de longueur h avec

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \quad \text{avec} \quad \forall k \in \{0,1,\ldots,N\},\ t_k = kh \quad \text{et} \quad h = \frac{T}{N}\,.$$

On note p_n la taille de la population au temps t_n, si on suppose que le taux de croissance de la population entre t_n et t_{n+1} est proportionnel au temps $t_{n+1} - t_n = h$ alors

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = rh\,.$$

On peut également introduire une compétition à l'intérieur de l'espèce comme à l'exercice précédent et on obtient

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = rh\left(1 - \frac{p_n}{K}\right) \quad \text{ou encore} \quad \frac{p_{n+1} - p_n}{h} = rp_n\left(1 - \frac{p_n}{K}\right)\,.$$

Ce qui nous suggère d'étudier le modèle continu, pour $r,\ K > 0$, on cherche $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad p'(t) = rp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)\,, \tag{E}$$

on dira que p *est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+$.

Afin de prendre en compte la population initiale (au temps $t = 0$), on demande de plus $p(0) = p_0$.

1. Soit $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (E). On définit $v = \frac{p}{K}$, montrer que v satisfait
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v'(t) = rv(t)\left(1 - v(t)\right)\,. \tag{E'}$$

2. Réciproquement, montrer que si $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et solution de (E') alors $p = Kv$ est solution de (E).

   On va maintenant étudier les solutions de (E') *sur* $\mathbb{R}_+$*, on admet que si* $v_0 \in]0,1[$*, alors toute solution de* (E') *partant de* $v(0) = v_0$ *reste dans* $]0,1[$*, c'est-à-dire* $\forall t \in \mathbb{R}_+$*,* $v(t) \in]0,1[$ *; et de même si* $v_0 > 1$ *alors toute solution partant de* $v(0) = v_0$ *reste* > 1*.*

3. Calculer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{x\,(1-x)} = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\mu}{x-1}\,.$

4. Supposons que v soit solution de (E') sur $\mathbb{R}_+$ telle que $v(0) = v_0 \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Montrer qu'alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{v'(t)}{v(t) - 1} = r\,.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, en intégrant entre $t=0$ et x, en déduire que $\left|\dfrac{v(x)}{v(x)-1}\right| = \left|\dfrac{v_0}{v_0-1}\right| \exp(rx)$.

6. En déduire que $v(x)\left(v_0 + (1-v_0)\exp(-rx)\right) = v_0$.

7. Étudier la fonction $x \mapsto (v_0 + (1-v_0)\exp(-rx))$ sur $\mathbb{R}_+$, s'annule-t-elle ?

8. En déduire l'expression de v puis celle de p.

9. Vérifier que p ainsi définie est-bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

10. Que peut-on alors dire de $\lim_{t\to+\infty} p(t)$?

Exercice 2.— *Modèle d'épidémie*

On étudie un modèle d'épidémie à trois états: chaque individu peut-être malade (M), immunisé (I) ou sain mains non immunisé (S). D'une semaine à l'autre,

- 2% des personnes malades le restent, 50% guérissent et sont immunisées et 48% guérissent mais ne sont pas immunisées;
- 99% des immunisés le restent et 1% ne le sont plus mais restent sains;
- 98% des personnes saines mais non immunisées le restent et 2% tombent malades.

On note $x_M(k)$ (respectivement $x_I(k)$ et $x_S(k)$) la proportion de la population qui est malade (M) (respectivement immunisée (I), saine mais non immunisée (S)) après k semaines. On note alors $X(k) = \begin{pmatrix} x_M(k) \\ x_I(k) \\ x_S(k) \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $x_M(k)$, $x_I(k)$ et $x_S(k)$ vérifient des relations de récurrence linéaire.

2. En déduire que $X(k)$ vérifie une relation de récurrence matricielle de la forme $X(k+1) = AX(k)$.

3. On suppose que $x_M(0), x_I(0), x_S(0)$ sont positifs et de somme égale à 1 (proportions de personnes malades, immunisées et saines au temps 0). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $x_M(k), x_I(k), x_S(k)$ positifs et de somme égale à 1.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$, tels que $Y = AX$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
   (a) Vérifier que $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.
   (b) Montrer que $|y_1| + |y_2| + |y_3| \le 0.99\,(|x_1| + |x_2| + |x_3|)$.

5. Calculer l'*état stationnaire* $\overline{X} \begin{pmatrix} \overline{x_M} \\ \overline{x_I} \\ \overline{x_S} \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$ à coefficients positifs de somme 1 tel que $A\overline{X} = \overline{X}$.

6. Soit $X = \overline{X} - X(0)$ et $Y = \overline{X} - X(1)$, montrer que
$$|\overline{x_M} - x_M(1)| + |\overline{x_I} - x_I(1)| + |\overline{x_S} - x_S(1)| \le 0.99\left(|\overline{x_M} - x_M(0)| + |\overline{x_I} - x_I(0)| + |\overline{x_S} - x_S(0)|\right) .$$

7. Montrer par récurrence que
$$|\overline{x_M} - x_M(k)| + |\overline{x_I} - x_I(k)| + |\overline{x_S} - x_S(k)| \le (0.99)^k\left(|\overline{x_M} - x_M(0)| + |\overline{x_I} - x_I(0)| + |\overline{x_S} - x_S(0)|\right) .$$

8. En déduire $\lim\limits_{k\to\infty} X(k)$.