Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021

Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Thème 1
Dynamique des populations

On considère une population comportant p_n individus à la génération $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'évolution de la population peut être modélisée par une ralation de la forme

$$\begin{cases} p_0 > 0 \\ p_{n+1} = p_n + f(p_n) \end{cases} .$$

On se pose la question du devenir de la population, a-t-on

- *Extinction:* $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?
- *Stabilisation:* $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_\infty \in]0,+\infty[$?
- *Explosion:* $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$?

Dans l'exercice 1 on considère le modèle le plus simple qui soit: la population croît avec un certain taux de croissance $r > -1$ constant. Dans l'exercice 2, on tient compte du fait que les ressources à disposition de l'espèce ne sont pas infinies, ce qui entraîne une compétition au sein même de l'espèce.

Exercice 1.— *Croissance de type linéaire*

1. Soit $r > -1$, on considère la fonction de croissance linéaire f telle que

$$f(p) = rp, \quad r > -1 .$$

   (a) Calculer p_n en fonction de r et p_0.

   (b) En déduire le devenir de la population.

2. On considère à présent la population d'une ville de 15000 habitants en l'an 1980. Chaque année 4% de la population quitte la ville tandis que 300 nouveaux habitants décident de venir s'y installer. On note p_n le nombre d'habitants de la ville en $1980 + n$.

   (a) Quelle est la fonction de croissance f telle que $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$?

   (b) Pour quel $c \in \mathbb{R}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = p_n + c$ vérifie-t-elle une relation de récurrence linéaire ?

   (c) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n et conclure quant au devenir de la population.

Exercice 2.— *Compétition à l'intérieur d'une espèce: le modèle logistique*

On prend à présent en compte le fait que les ressources nécessaires au développement de l'espèce ne sont pas inépuisables et qu'une compétition pour ces ressources a lieu. On considère ici un modèle dans lequel le taux de croissance $r > 0$ est pondéré par la taille de la population elle-même:

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = r\left(1 - \frac{p_n}{K}\right) .$$

En particulier, si la population dépasse le seuil $K > 0$, le taux de croissance est négatif et la population diminue.

1. Pour quelle fonction f a-t-on $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$? Que se passe-t-il si $p_0 > \dfrac{(r+1)K}{r}$?

   On suppose par la suite $0 < p_0 < \dfrac{(r+1)K}{r}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{rp_n}{(r+1)K}$.

   Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence

   $$u_{n+1} = (r+1)u_n(1 - u_n) . \tag{1}$$

   Que devient l'hypothèse sur p_0 ?

   On étudie donc le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* (1) *et* $u_0 \in]0,1[$.

3. Étudier les variations de la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (r+1)x(1-x)$.

4. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par g pour $r \in]0,3]$, c'est-à-dire $g([0,1]) \subset [0,1]$.

5. Montrer que g admet un unique point fixe α (c'est-à-dire $g(\alpha) = \alpha$) dans $]0,1[$ et le calculer.

6. Calculer $g'(\alpha)$.

   On suppose à présent $0 < r \leq 1$ *ou encore* $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

7. Montrer que les intervalles $]0,\alpha]$ et $[\alpha, \frac{1}{2}]$ sont stables par g, et que de plus

   $$g\left(\left[\frac{1}{2}, 1-\alpha\right]\right) \subset \left[\alpha, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad g\left([1-\alpha, 1[\right) \subset]0,\alpha] .$$

8. Si $u_0 \in]0,\alpha]$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α. Que peut-on en déduire pour $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

9. Si $u_0 \in [\alpha, \frac{1}{2}]$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers α. Que peut-on en déduire pour $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

10. Et si $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1[$? (Penser à u_1.)