Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2019–2020
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Maths 112 - Devoir Maison

Énoncé et correction.

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0.

1. On suppose que f est dérivable 0.
   (a) Rappeler la définition de "f est dérivable en 0".
   (b) Montrer que $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 0.

2. *Dans la suite (et fin) de l'exercice, on suppose réciproquement que* $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}$ *quand* x *tend vers* 0*, et on va montrer qu'alors* f *est dérivable en* 0*.*

   On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - lx$.

   (a) Montrer que
   $$f \text{ est dérivable en } 0 \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ est dérivable en } 0\,.$$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0)\,.$$

3. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(2x) - g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que h est continue en 0 et en déduire qu'il existe $\alpha_\epsilon > 0$ (dépendant de ϵ) tel que $\sup_{x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]} |h(x)| \leq \epsilon$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\epsilon > 0$ et $x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]$. Montrer que
   $$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| \leq \epsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,.$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

4. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]$, $x \neq 0$.

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right) .$$

   (b) En déduire en faisant tendre n vers $+\infty$ que

   $$\left|\frac{g(x) - g(0)}{x}\right| \leq \epsilon .$$

   (c) Conclure.

On rappelle une caractérisation de la borne supérieure utile dans l'exercice suivant:

Proposition. *Soit $X \subset \mathbb{R}$. On a $y = \sup X$ si et seulement si y est un majorant de X et il existe une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers y: pour tout n, $x_n \in X$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.*

Exercice 2.— On introduit la notion de "pseudo-dérivabilité" comme suit:

Définition (Pseudo-dérivabilité)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dira que f est pseudo-dérivable en x si la limite*

$$l = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in \mathbb{R}$$

existe et on notera $\tilde{f}(x) = l$ cette limite. On dira que f est pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ si f est pseudo-dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Dérivabilité et pseudo-dérivabilité.

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, $\tilde{f} = f'$.

   (b) Donner un exemple de fonction pseudo-dérivable en 0 et pas continue en 0.

   (c) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, pseudo-dérivable en 0 et pas dérivable en 0.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) \geq 0$, le but de la suite (et fin) de l'exercice est de montrer qu'alors f est nécessairement croissante.
   On commence par supposer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) \geq \alpha$. On procède par l'absurde et on suppose que f n'est pas croissante: soit donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$.

   (a) Soit $m = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$ et $E = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) > m\}$. Justifier que E admet une borne supérieure, on la notera $c = \sup E$?

   (b) Soit $x \in E$, montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $x + h \in E$ (on utilisera la continuité de f). En déduire que $c \notin E$.

(c) Montrer qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c - h_n \in E$, $h_n > 0$ et $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on pourra utiliser la caractérisation de la borne supérieure plus haut).

(d) Montrer que $c < b$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c + h_n \notin E$, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $c + h_n \in [a, b]$.

(f) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} \leq 0$$

puis que $\tilde{f}(c) \leq 0$. Ce qui contredit donc que $\tilde{f}(c) \geq \alpha > 0$ et on peut conclure que f est croissante.

3. On suppose à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) \geq 0$ au lieu de $\tilde{f}(x) \geq \alpha > 0$.

(a) Soit $\alpha > 0$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g_\alpha(x) = f(x) + \alpha x$. Montrer que g_α est pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\tilde{g}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, montrer que $f(x) + \alpha x \leq f(y) + \alpha y$.

(c) Conclure que f est croissante.

Correction 1.—

1. (a) Voir cours.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut réécrire
$$\begin{aligned}\frac{f(2x)-f(x)}{x} &= \frac{f(2x)-f(0)}{x} + \frac{f(0)-f(x)}{x} = 2\frac{f(2x)-f(0)}{2x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} 2f'(0) - f'(0) = f'(0)\end{aligned}$$
   par définition de la dérivabilité de f en 0.

2. (a) Commençons par supposer que f est dérivable en 0. La fonction g est la somme d'une fonction linéaire donc en particulier dérivable en 0 et de f dérivable en 0, g est donc dérivable en 0.
   Réciproquement, supposons que g est dérivable en 0, la fonction f est alors comme précédemment la somme de deux fonctions dérivables en 0, et f est donc dérivable en 0.

   (b) Par continuité de f en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, par composition des limites
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ g(X) \xrightarrow[X\to 0]{} f(0)\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)\,.$$

3. (a) On commence par montrer que h est continue en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{g(2x)-g(x)}{x} = \frac{f(2x)-2lx-f(x)+lx}{x} = \frac{f(2x)-f(x)}{x} - l \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} 0 = h(0)\end{aligned}$$
   par hypothèse. La fonction h est donc bien continue en 0.

   Soit $x_0, a \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$ si et seulement si (par définition) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $|h(x)-a| \leq \epsilon$. Comme h tend vers 0 en 0, on peut appliquer cette définition avec $x_0 = 0$ et $a = 0$. On a alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|h(x)| \leq \epsilon$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\epsilon > 0$ et $x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]$. On a par inégalité triangulaire
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left|h\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|\,.$$
   De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2^k} \leq 1$ donc $\left|\frac{x}{2^k}\right| \leq |x| \leq \alpha_\epsilon$ et donc
$$\left|h\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \epsilon\,.$$
   En combinant les deux estimations, on obtient la majoration demandée.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a donc
$$u_n = \frac{1}{2}\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1\,.$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Initialisation $n = 1$:

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) = x\frac{1}{2^1}\underbrace{\frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{h\left(\frac{x}{2^1}\right)} .$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose l'égalité vraie au rang n. Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
g(x) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) + g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\
&= x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right) + g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\
&= x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right) + \frac{x}{2^{n+1}}\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} \\
&= x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right) + \frac{x}{2^{n+1}}h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) .
\end{aligned}$$

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right) .$$

(b) On a grâce à la question précédente : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right) .$$

En utilisant $3(b)$ et $3(c)$, on en déduit

$$\left|\frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}h\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \epsilon .$$

Par $2(b)$ et composition de la limite, $\left|\frac{g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\frac{g(x) - g(0)}{x}\right|$. On obtient la majoration par comparaison à la limite $n \to +\infty$.

(c) On vient de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha_\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha_\epsilon, \alpha_\epsilon]$,

$$\left|\frac{g(x) - g(0)}{x}\right| \leq \epsilon .$$

C'est la définition de $\frac{g(x) - g(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Et donc g est dérivable en 0 et f l'est aussi par $2(a)$.

Correction 2.—

1. (a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que f est pseudo-dérivable en x. Soit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, on a alors

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\,.$$

Comme f est dérivable en x, on a $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x)\,.$$

On peut conclure que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f'(x) = f'(x)$ de sorte que f est pseudo-dérivable en x et $\tilde{f}(x) = f'(x)$.

(b) Il suffit de considérer une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : une *fonction paire*. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$. Pour une telle fonction, on aura en $x = 0$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$,

$$\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = 0\,.$$

Une fonction paire est donc toujours pseudo-dérivable en 0 et $\tilde{f}(0) = 0$. On peut alors définir f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}\,,$$

f n'est pas continue en 0 mais f est paire donc pseudo-dérivable en 0.

(c) On choisit une fonction paire, continue en 0 et pas dérivable en 0, la fonction $x \mapsto |x|$ par exemple.

2. Cas $\exists \alpha > 0$ tel que $\tilde{f} \geq \alpha$.

(a) On a $E \subset [a, b]$ donc en particulier E est majoré par b. De plus,

$$f(a) > f(b) \quad \Rightarrow \quad f(a) + f(b) < f(a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad l < f(a)\,,$$

et donc $a \in E$ qui n'est donc pas vide. $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure: toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

(b) Soit $x \in E$. D'une part $f(b) + f(b) < f(b) + f(a)$ et donc $f(b) < m$ donc $b \notin E$ et donc $x \neq b$ ($x < b$). D'autre part, on a $f(x) > m$, et donc $\epsilon = f(x) - m > 0$. On applique la définition de la continuité de f au point x avec $\epsilon > 0$: il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$ et donc

$$\begin{aligned} f(y) &> f(x) - \epsilon \\ &> f(x) - (f(x) - m) \\ &> m \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $h > 0$ et $y = x + h$ tel que
• $x + h < b \quad \Leftrightarrow \quad h < b - x$ (on rappelle que $x < b$),

- $|(x+h)-x| < \eta$, c'est-à-dire $h < \eta$,

par exemple $h = \min\left\{\dfrac{b-x}{2}, \dfrac{\eta}{2}\right\}$, et on a bien $x+h \in E$. Si on avait $c \in E$, on aurait donc $h > 0$ tel que $c+h \in E$, et $c+h > c$, ce qui contredit le fait que c majore E et donc que $c = \sup E$.

(c) Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ et pour tout n, $x_n \leq c$. Comme $c \notin E$, on a en fait pour tout n, $x_n < c$. Posons $h_n = c - x_n$, on a $h_n > 0$ et $x_n = c - h_n \in E$ et comme $h_n = c - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c - c = 0$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ donc $x_n \leq b$ et comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, on a par comparaison $c \leq b$. De plus, comme $x_n \in E$ on a $f(x_n) > m$, par continuité de f en c, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et par comparaison, $f(c) \geq m$. On conclut grâce à $f(b) < m$.

(e) On a $c + h_n > c$ comme c est un majorant de E, $c + h_n \notin E$. De plus, $c < b$ donc $\epsilon = b - c > 0$ et comme $h_n \to 0$, par définition de la limite d'une suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel pour tout $n \geq N$, $h_n \leq \epsilon$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$c + h_n \leq c + \epsilon = b\,,$$

de plus, $c + h_n > c \geq a$ donc $c + h_n \in [a, b]$.

(f) On a $c - h_n \in E$ donc $f(c - h_n) > m$ et $c + h_n \in [a,b] \setminus E$ donc $f(c+h_n) \leq m$, on en déduit

$$\frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} \leq \frac{m-m}{2} = 0\,.$$

Comme $h_n \to 0$, on a par composition des limites que

$$\tilde{f}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} \leq \frac{m-m}{2}\,.$$

Par conséquent, $\tilde{f}(c) \leq 0$ contredit $\tilde{f}(c) \geq \alpha > 0$.

3. Cas $\tilde{f} \geq 0$.

Dans le cas où la fonction est au moins dérivable, alors elle est également dérivable et les notions de dérivée et pseudo-dérivée coïncident (voir (1)). Afin de passer de $f' \geq 0$ à $f' \geq \alpha$, on peut ajouter à f une fonction linéaire $x \mapsto \alpha x$ de dérivée α. C'est ce qu'on fait dans cette question avec la pseudo-dérivée.

(a) On ne connaît aucune règle sur la somme ou autre opération sur les fonctions peudo-dérivables, on revient à la définition. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{g_\alpha(x+h) - g_\alpha(x-h)}{2h} &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x-h)}{2h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \alpha \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \tilde{f}(x) + \alpha \quad \text{car } f \text{ est pseudo-dérivable en } x\,.\end{aligned}$$

(b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Pour tout $\alpha > 0$, la fonction g_α est pseudo-dérivable et vérifie l'hypothèse de la question 2, $\tilde{g_\alpha} \geq \alpha > 0$. On sait donc que g_α est croissante et donc $g_\alpha(x) \leq g_\alpha(y)$ i.e. $f(x) + \alpha x \leq f(y) + \alpha y$.

(c) Il suffit de faire tendre α vers 0 dans l'inagalité précédente et on obtient par comparaison: $f(x) \leq f(y)$ et ce pour tout $x \leq y$. La fonction f est donc croissante.