Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2018–2019
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Devoir Maison
À rendre pour le 22 mars

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, on note $n = E(x)$.

Exercice 1.— *Existence du développement décimal.*

Soit $x \in [0,1[$, en s'aidant de ce qui a été fait en cours dans le cas du développement dyadique, on va montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,.$$

On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{E(10^n x)}{10^n}$.

2. En déduire que $x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$.

La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est le développement décimal propre de x. On écrira (en base 10 qui est la base usuelle): $x = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$.

Exercice 2.— *Développement décimal périodique.*

On dira qu'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (à valeurs réelles par exemple) est *périodique à partir d'un certain rang* s'il existe $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+p} = a_k$. Soit $x \in [0,1[$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ le développement décimal propre de x (celui trouvé à l'exercice 1). On dira que le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est elle-même périodique à partir d'un certain rang.

Le but de l'exercice est de montrer que x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Partie I:

On suppose dans cette partie que le développement décimal propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang : soit $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+p} = a_k$. On va montrer qu'alors x est rationnel.

1. Montrer que pour tout $k, q \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+qp} = a_k$.

2. Pourquoi a-t-on $x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{N+pn-1} \frac{a_k}{10^k}$?

3. Montrer que $\sum_{k=N+p}^{N+2p-1} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^p} \sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$.

   Similairement, que pouvez-vous dire de $\sum_{k=N+\mathbf{2}p}^{N+\mathbf{3}p-1} \frac{a_k}{10^k}$?

4. Et pour $q \in \{0, 1, \dots n-1\}$, que pouvez-vous dire de $\sum_{k=N+\mathbf{q}p}^{N+(\mathbf{q}+\mathbf{1})p-1} \frac{a_k}{10^k}$?

5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N+pn-1} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{10^{qp}} \sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k} \,. \tag{1}$$

6. Les nombres $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k}$ et $\sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$ sont-ils rationnels ? (Justifier.)

7. Faire tendre n vers $+\infty$ dans (1) et conclure.

Partie II:

On suppose dans cette partie que $x \in [0, 1[$ est rationnel. On va montrer qu'alors le développement décimal propre $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{k+1} = f(u_k), \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

   On suppose qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tels que $u_{N_1} = u_{N_2}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. Soit $x \in [0, 1[$ rationnel, on pourra donc écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $p < q$. On définit par récurrence la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{k+1} = 10x_k - E(10x_k), \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 10^k x - E(10^k x)$.

3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \mathbb{N}$, $p_k < q$ tel que $x_k = \frac{p_k}{q}$.

4. En déduire qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tels que $p_{N_1} = p_{N_2}$.

5. On définit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ par pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = E(10x_{k-1})$. Montrer que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est le développement décimal propre de x (on pourra utiliser l'exercice 1).

6. Conclure que le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.