Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2018–2019
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Devoir Maison
À rendre pour le 22 mars

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, on note $n = E(x)$.

Exercice 1.— *Existence du développement décimal.*

Soit $x \in [0,1[$, en s'aidant de ce qui a été fait en cours dans le cas du développement dyadique, on va montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,.$$

On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{E(10^n x)}{10^n}$.

2. En déduire que $x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$.

La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est le développement décimal propre de x. On écrira (en base 10 qui est la base usuelle): $x = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$.

Exercice 2.— *Développement décimal périodique.*

On dira qu'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (à valeurs réelles par exemple) est *périodique à partir d'un certain rang* s'il existe $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+p} = a_k$. Soit $x \in [0,1[$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ le développement décimal propre de x (celui trouvé à l'exercice 1). On dira que le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est elle-même périodique à partir d'un certain rang.

Le but de l'exercice est de montrer que x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Partie I:

On suppose dans cette partie que le développement décimal propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang : soit $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+p} = a_k$. On va montrer qu'alors x est rationnel.

1. Montrer que pour tout $k, q \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+qp} = a_k$.

2. Pourquoi a-t-on $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N+pn-1} \frac{a_k}{10^k}$?

3. Montrer que $\sum_{k=N+p}^{N+2p-1} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^p} \sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$.

   Similairement, que pouvez-vous dire de $\sum_{k=N+\mathbf{2}p}^{N+\mathbf{3}p-1} \frac{a_k}{10^k}$?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \{0, 1, \dots n-1\}$, que pouvez-vous dire de $\sum_{k=N+\mathbf{q}p}^{N+(\mathbf{q}+\mathbf{1})p-1} \frac{a_k}{10^k}$?

5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N+pn-1} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{10^{qp}} \sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k} \,. \tag{1}$$

6. Les nombres $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k}$ et $\sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$ sont-ils rationnels ? (Justifier.)

7. Faire tendre n vers $+\infty$ dans (1) et conclure.

Partie II:

On suppose dans cette partie que $x \in [0,1[$ est rationnel. On va montrer qu'alors le développement décimal propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{k+1} = f(u_k),\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

   On suppose qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tels que $u_{N_1} = u_{N_2}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. Soit $x \in [0,1[$ rationnel, on pourra donc écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $p < q$. On définit par récurrence la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{k+1} = 10x_k - E(10x_k),\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 10^k x - E(10^k x)$.

3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \mathbb{N}$, $p_k < q$ tel que $x_k = \frac{p_k}{q}$.

4. En déduire qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tels que $p_{N_1} = p_{N_2}$.

5. On définit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = E(10x_{k-1})$. Montrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est le développement décimal propre de x (on pourra utiliser l'exercice 1).

6. Conclure que le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.

Correction 1.— *Existence du développement décimal.*
Soit $x \in [0,1[$, on définit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a (comme vu en cours pour le développement dyadique) une somme “téléscopique”:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{E(10^k x)}{10^k} - \frac{10E(10^{k-1}x)}{10^k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{E(10^k x)}{10^k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{E(10^{k-1}x)}{10^{k-1}} \right)$$

En effectuant dans la seconde somme le changement d'indice $k' = k-1$, $k = k'+1$, $k : 1 \to n$, $k' = k-1 : 0 \to n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{E(10^k x)}{10^k} \right) - \left(\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{E(10^{k'} x)}{10^{k'}} \right) = \frac{E(10^n x)}{10^n} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{E(10^k x)}{10^k} \right) - \left(\sum_{k'=1}^{n-1} \frac{E(10^{k'} x)}{10^{k'}} \right) - \frac{E(10^0 x)}{10^0}$$
$$= \frac{E(10^n x)}{10^n} - E(x)$$

et $x \in [0,1[\quad \Rightarrow \quad E(x) = 0$.

2. On rappelle que par définition de la partie entière, on a pour $y \in \mathbb{R}$, $E(y) \leq y < E(y)+1$ ou encore $y - 1 < E(y) \leq y$. On procède par encadrement, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$10^n x - 1 < E(10^n x) \leq 10^n x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{10^n x - 1}{10^n} < \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq \frac{10^n x}{10^n} \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{1}{10^n} < \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x\,.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, on obtient par encadrement que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{E(10^n x)}{10^n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\,.$$

Enfin, on vérifie que $a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$: on a bien $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$ entier, il reste à vérifier $0 \leq a_k \leq 9$ ou encore $-1 < a_k < 10$ puisque a_k est entier. Or, $10^k x - 1 < E(10^k x) \leq 10^k x$ et

$$10(10^{k-1}x - 1) < 10E(10^{k-1}x) \leq 10 \cdot 10^{k-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad -10^k x \leq -10E(10^{k-1}x) < -(10^k x - 10)$$

et par conséquent

$$10^k x - 1 - 10^k x < E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x) < 10^k x - (10^k x - 10) \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < a_k < 10\,.$$

Correction 2.— *Le but de l'exercice est de montrer que x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.*

Partie I:

On suppose dans cette partie que le développement décimal propre $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang : soit $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $a_{k+p} = a_k$. On va montrer qu'alors x est rationnel.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$. Par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$, montrons que $\forall q \in \mathbb{N}$, $a_{k+qp} = a_k$.

- *Initialisation:* $q = 0$, on a bien $a_{k+0} = a_k$.
- *Hérédité:* on fixe un rang $q \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a_{k+qp} = a_k$. On a alors

$$\begin{aligned} a_{k+(q+1)p} &= a_{k+qp+p} = a_{k+qp} \text{ par périodicité avec } k' = k + qp \geq N \\ &= a_k \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

- *Conclusion:* $\forall q \in \mathbb{N}$, $a_{k+qp} = a_k$.

2. L'application $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $n \mapsto N + pn - 1$ est strictement croissante. En effet, si $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$,

$$\phi(n) - \phi(m) = N + pn - 1 - (N + pm - 1) = \underbrace{p}_{\geq 1 > 0} \underbrace{(n - m)}_{>0} > 0\,.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ converge vers x quand $n \to +\infty$, la sous-suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{\phi(\mathbf{n})} \frac{a_k}{10^k}$ également.

3. Comme pour $k \geq N$, $a_k = a_{k+p}$, on effectue le changement d'indice $k' = k - p$ (et donc $k = k' + p$, et $k : N + p \to N + 2p - 1$ donc $k' = k - p : N \to N + p - 1$):

$$\sum_{k=N+p}^{N+2p-1} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{\overbrace{a_{k'+p}}^{=a_{k'}}}{\underbrace{10^{k'+p}}_{=10^{k'} \cdot 10^p}} = \frac{1}{10^p} \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{a_{k'}}{10^{k'}}$$

Comme pour $k \geq N$, $a_k = a_{k+2p}$. En effectuant le changement d'indice $k' = k - 2p$ on obtient de même $\displaystyle\sum_{k=N+2p}^{N+3p-1} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^{2p}} \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{a_{k'}}{10^{k'}}$.

4. De façon générale, pour $q \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, on a $a_k = a_{k+qp}$ (question 1.), on effectue le changement d'indice

$$\left| \begin{array}{ll} k' = k - qp, & k : N + qp \to N + (q + 1)p - 1 \\ k = k' + qp, & k' : N \to N + p - 1 \end{array} \right.$$

et on obtient

$$\sum_{k=N+qp}^{N+(q+1)p-1} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{a_{k'+qp}}{10^{k'+qp}} = \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{a_{k'}}{10^{qp} \cdot 10^{k'}} = \frac{1}{10^{qp}} \sum_{k'=N}^{N+p-1} \frac{a_{k'}}{10^{k'}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On décompose la somme en une somme jusqu'à $N - 1$ plus des sommes à p termes chacune:

$$\sum_{k=1}^{N+np-1} = \sum_{k=1}^{N-1} + \underbrace{\sum_{k=N}^{N+p-1} + \sum_{k=N+p}^{N+2p-1} + \ldots + \sum_{k=N+(n-1)p}^{N+np-1}}_{\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} \left(\sum_{k=N+qp}^{N+(q+1)p-1} \right)}$$

On obtient ainsi, en utilisant les expressions établies aux questions 3. et 4.:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+np-1} \frac{a_k}{10^k} &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{q=0}^{n-1} \left(\sum_{k=N+qp}^{N+(q+1)p-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{q=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10^{qp}} \underbrace{\sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}}_{\text{indépendant de } q} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \left(\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{10^{qp}} \right) \left(\sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k} \right)
\end{aligned}$$

6. Comme a_k et 10^k sont entiers, $\frac{a_k}{10^k}$ est rationnel (et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). Les nombres $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k}$ et $\sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$ sont ainsi des sommes finies (respectivement à N et p termes) de rationnels, ils sont donc rationnels.
On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_1 \cdot 10^{N-2} + a_2 \cdot 10^{N-3} + \dots a_{N-1} \cdot 10^0}{10^{N-1}} \underbrace{=}_{\textit{en base } 10} \frac{a_1 a_2 \dots a_{N-1}}{10 \dots 0}$$

7. Par la question 2., le membre de gauche dans l'égalité (1) converge vers x quand $n \to +\infty$. En ce qui concerne le membre de droite, on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{10^p} < 1$, on a donc

$$\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{10^{qp}} = \sum_{q=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10^p} \right)^q = \frac{1 - \left(\frac{1}{10^p}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^p}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = \frac{10^p}{10^p - 1} \text{ qui est rationnel.}$$

On obtient finalement $x = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{10^p}{10^p - 1} \sum_{k=N}^{N+p-1} \frac{a_k}{10^k}$ qui est rationnel comme somme et produit de 3 rationnels.

Partie II:

On suppose dans cette partie que x est rationnel. On va montrer qu'alors le développement décimal propre $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de x est périodique à partir d'un certain rang.

1. Soit $N = N_1$ et $p = N_2 - N_1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $N_2 = N_1 + p = N + p$ et donc $u_{N_1} = u_{N_2}$ se réécrit $u_{N+p} = u_N$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, on a $u_{k+p} = u_k$.

   - *Initialisation:* pour $k = N$, on a bien $u_{N+p} = u_N$.
   - *Hérédité:* on fixe un rang $k \geq N$ et on suppose que $u_{k+p} = u_k$. On a alors

   $$u_{k+1+p} = f(u_{k+p}) \underbrace{=}_{H.R.} f(u_k) = u_{k+1} \,.$$

- *Conclusion:* $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $u_{k+p} = u_k$.

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc péridodique à partir du rang $N = N_1$ de péridode $p = N_2 - N_1$.

2. On le montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

   - *Initialisation:* $k = 0$, on a d'une part $x_0 = x$ et d'autre part $10^0 x - E(10^0 x) = x - E(x) = x$ (car $x \in [0,1[$ donc $E(x) = 0$).
   - *Hérédité:* on fixe un rang $k \in \mathbb{N}$ et on suppose que $x_k = 10^k x - E(10^k x)$. On a alors
   $$x_{k+1} = 10x_k - E(10x_k) \quad \text{et} \quad 10x_k \underbrace{=}_{H.R.} 10(10^k x - E(10^k x)) = 10^{k+1}x - 10E(10^k x)$$
   et $10E(10^k x) \in \mathbb{N}$ donc $E(10x_k) = E(10^{k+1}x) - 10E(10^k x)$. On a finalement
   $$x_{k+1} = 10^{k+1}x - 10E(10^k x) - \Big(E(10^{k+1}x) - 10E(10^k x)\Big) = 10^{k+1}x - E(10^{k+1}x)\,.$$
   - *Conclusion:* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 10^k x - E(10^k x)$.

3. Tout d'abord, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $E(y) \leq y < E(y) + 1$ de sorte que $0 \leq y - E(y) < 1$ (avec $y = 10^k x$) et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in [0,1[$. De plus, avec $x = \dfrac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, $p < q$, on a
$$x_k = \frac{10^k p - qE\left(\frac{10^k p}{q}\right)}{q} = \frac{p_k}{q} \quad \text{avec} \quad p_k = 10^k p - qE\left(\frac{10^k p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$$
Et comme on a vu que $x_k \in [0,1[$, on a bien $0 \leq \dfrac{p_k}{q} < 1 \quad \underbrace{\iff}_{q>0} \quad 0 \leq p_k < q\,.$

4. C'est ici la clé du raisonnement, comme $p_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ peut prendre au plus q valeurs différentes, si on considère l'ensemble des $q+1$ premières valeurs de p_k:
$$X = \{p_k \,:\, k = 0, 1, \ldots, q\} = \{p_0, p_1, \ldots, p_q\} \subset \{0, 1, \ldots, q-1\}\,.$$
L'ensemble X est donc de cardinal au plus q, et donc il existe au moins deux éléments de X qui sont égaux i.e. il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2 \leq q$ tels que $p_{N_1} = p_{N_2}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, vérifions que $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$. On a par la question 2.,
$$10x_{k-1} = 10(10^{k-1}x - E(10^{k-1}x)) = 10^k x - 10E(10^{k-1}x)$$
et comme $10E(10^{k-1}x) \in \mathbb{N}$, on a bien $a_k = E(10x_{k-1}) = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$.

6. Par la question 4., il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tels que $p_{N_1} = p_{N_2}$, mais comme $x_k = \dfrac{p_k}{q}$, on a également $x_{N_1} = x_{N_2}$. Et par la question 1. (avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 10x - E(10x)$) la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est péridodique à partir du rang N_1 de période $p = N_2 - N_1$. On a donc pour tout $k \geq N_1$, $x_{k+p} = x_k$. Par conséquent, pour tout $k \geq N_1 + 1$, on a $k - 1 \geq N_1$, donc $x_{k-1+p} = x_{k-1}$ et finalement
$$a_{k+p} = E(10x_{k+p-1}) = E(10x_{k-1}) = a_k\,.$$
Et le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang ($N = N_1 + 1 \leq N_2 \leq q$).