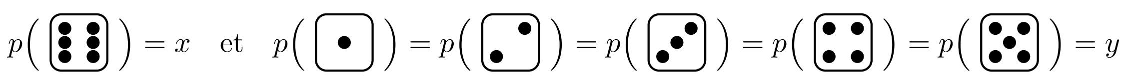
Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

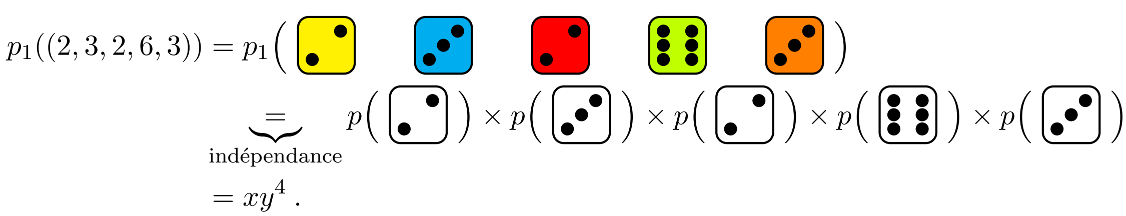
Devoir Maison – MEU104
Culture Mathématique

Nous allons étudier dans ce problème un jeu de Yams, comme nous l'avons fait en cours, mais en supposant que suite à un défaut de fabrication les dés sont pipés. On réalise une expérience aléatoire qui consiste à lancer 5 dés, chaque dé prenant une valeur entre 1 et 6, on atteint l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5$. Autrement dit les résultats possibles sont tous les 5–uplets prenant des valeurs entre 1 et 6. Par exemple,

Chaque dé suit la même loi de probabilité et les 5 dés sont indépendants, comme lors du cours. En revanche, contrairement à l'expérience étudiée en cours, on ne considère plus que chaque dé suit une loit uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. On fixe $x \in [0,1]$ et on suppose que chaque dé suit la loi de probabilité suivante p sur $\{1,2,3,4,5,6\}$: la probabilité de faire un 6 est égale à x tandis que les probabilités de faire un autre chiffre sont égales i.e.



Attention, l'expérience aléatoire consistant à réaliser 1 lancer des 5 dés correspond à une loi de probabilités p_1 sur l'univers Ω pour laquelle les éventualités $\omega \in \Omega$ ne sont plus équiprobables, par exemple



Introduisons les événements Y, C, B, P, $R \subset \Omega$ que nous avons considérés en cours :

$$\begin{aligned}
Y &= \{\text{les 5 dés forment un yams}\} = \{\text{les 5 dés sont égaux}\}\\
C &= \{\text{les 5 dés forment un carré}\} = \{\text{4 dés sont égaux et pas plus}\}\\
B &= \{\text{les 5 dés forment un relan ou un full}\} = \{\text{3 dés sont égaux et pas plus}\}\\
P &= \{\text{les 5 dés forment une paire simple/double}\} = \{\text{2 dés sont égaux et pas plus}\}\\
R &= \{\text{les 5 dés sont différents}\}\,.
\end{aligned}$$

On rappelle que ces événements Y, C, B, P, R forment une partition de l'univers Ω : ils sont deux à deux disjoints et leur union est Ω. Cela signifie que chaque résultat possible d'un lancer tombe dans exactement un et un seul des événements Y, C, B, P, R.

Exercice 1.— *Probabilités après* 1 *lancer.*
On introduit les événements $Y_6 \subset Y$, $C_6 \subset C$, $B_6 \subset B$, $P_6 \subset P$, $R_6 \subset R$:

$$\begin{aligned}
Y_6 &= \{\text{les 5 dés forment un yams de 6}\} \subset Y \\
C_6 &= \{\text{les 5 dés forment un carré de 6}\} \subset C \\
B_6 &= \{\text{les 5 dés forment un brelan de 6 ou un full aux 6}\} \subset B \\
P_6 &= \{\text{les 5 dés forment une paire simple/double dont une paire de 6}\} \subset P \\
R_6 &= \{\text{les 5 dés sont différents dont un 6}\} \subset R\,.
\end{aligned}$$

1. Calculer les probabilités $p_1(Y_6)$, $p_1(C_6)$, $p_1(B_6)$, $p_1(P_6)$ et $p_1(R_6)$ ainsi que les probabilités $p_1(Y)$, $p_1(C)$, $p_1(B)$, $p_1(P)$ et $p_1(R)$ de chacun des événements en 1 lancer. On les exprimera en fonction de x et y et plus précisément, on doit trouver des polynômes en x et y de la forme $ay^5 + bxy^4 + cx^2y^3 + dx^3y^2 + ex^4y + fx^5$. Reporter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

coefficient de dans	y^5	xy^4	x^2y^3	x^3y^2	x^4y	x^5
$p_1(Y_6)$						
$p_1(Y)$						
$p_1(C_6)$						
$p_1(C)$						
$p_1(B_6)$						
$p_1(B)$						
$p_1(P_6)$						
$p_1(P)$						
$p_1(R_6)$						
$p_1(R)$						

On demande bien entendu d'expliquer chacun des calculs ayant mené aux résultats trouvés.

Il faut faire attention à bien disjoindre les cas selon la valeur du dé (égale à 6 ou différente).

- **Yams :**

Yams de 6	Yams de k pour $k \neq 6$	$p_1(Y)$
x^5	y^5	$x^5 + 5y^5$

On en déduit que $\begin{cases} p_1(Y) &= x^5 + 5y^5 = x^5 + 5\frac{1}{5^5}(1-x)^5 = x^5 + \frac{1}{5^4}(1-x)^5 \\ p_1(Y_6) &= x^5 \end{cases}$.

- **Carré :** comme en cours, on doit mettre un dé de côté (5 choix) puis attribuer une valeur au carré et une valeur différente au dé restant.

	choix répartition des dés	choix valeur carré	choix valeur dé restant	proba valeur carré	proba valeur dé restant	
Carré de 6	5	1	5	x	y	$25x^4y$
Dé restant 6	5	5	1	y	x	$25xy^4$
Aucun 6	5	5	4	y	y	$100y^5$

On en déduit que $\begin{cases} p_1(C) &= 100y^5 + 25xy^4 + 25x^4y \\ p_1(C_6) &= 25x^4y \end{cases}$.

- **Brelan ou full:** on doit répartir les dés en 2 + 3, i.e. choisir 2 dés parmi 5, ce qui donne $\binom{5}{2} = 10$ choix. On doit ensuite attribuer une valeur au brelan et une valeur à chacun des deux dés restants.

	choix répartition des dés	choix valeur brelan	choix deux valeurs dés restants	proba valeur brelan	proba valeurs 2 dés restants	
Brelan de 6	10	1	5×5	x	$y \times y$	$250x^3y^2$
2 dés restants $= 6$	10	5	1×1	y	$x \times x$	$50x^2y^3$
1er dé restant $= 6$	10	5	1×4	y	$x \times y$	$200xy^4$
2eme dé restant $= 6$	10	5	4×1	y	$y \times x$	$200xy^4$
Aucun 6	10	5	4×4	y	$y \times y$	$800y^5$

On en déduit que $\left\{\begin{array}{lcl} p_1(B) & = & 800y^5+400xy^4+50x^2y^3+250x^3y^2 \\ p_1(B_6) & = & 250x^3y^2 \end{array}\right.$.

- **Tous les dés différents :**
  - *Aucun* 6 *:* on choisit les valeurs des 5 dés ($5\times4\times3\times2\times1$ choix) et la probabilité de chacune de ces valeurs est y soit une probabilité p_1(dés tous différents et aucun 6) $=120\times y^5$.
  - *Un dé égal à* 6 *:* on choisit le dé qui prend la valeur 6 (5 choix) et la probabilité de la valeur 6 vaut x. Ensuite on choisit les valeurs des 4 dés restants ($5\times4\times3\times2$ choix) et chacune de ces 4 autres valeurs a pour probabilité y. On trouve une probabilité p_1(dés tous différents dont un 6) $=5\times x\times 120\times y^4=600xy^4$.

  On en déduit que $\left\{\begin{array}{lcl} p_1(R) & = & 120y^5+600xy^4 \\ p_1(R_6) & = & 600xy^4 \end{array}\right.$.

- **Paire ou double paire :** on peut aussi faire le calcul direct, et en tout cas en partie pour calculer $p_1(P_6)$.
  - *Un paire simple de* 6 *:* On choisit les 2 dés de la paire ($\binom{5}{2}=10$ choix), la valeur 6 a pour proba x. On choisit les valeurs différentes des 3 autres dés ($5\times4\times3$ choix) et chacune de ces trois valeurs a pour proba y. On trouve une probabilité p_1(paire simple de 6) $=10\times60\times x^2\times y^3=600x^2y^3$.
  - *Un paire double dont une paire de* 6 *:* On choisit les 2 dés de la paire de 6 ($\binom{5}{2}=10$ choix), la valeur 6 a pour proba x. On choisit les 2 dés de l'autre paire ($\binom{3}{2}=3$ choix), on choisit la valeur de cette paire (5 choix) et cette valeur a pour probabilité y. On choisit enfin la valeur du dé restant (4 choix) et cette valeur a pour probabilité y. On trouve une probabilité p_1(Un paire double dont une paire de 6) $=10\times x^2\times3\times5y^2\times4y=600x^2y^3$.

  Et on utilise le fait que les événements partitionnent Ω pour calculer $p_1(P)$:

$$p_1(P)=1-p_1(Y)-p_1(C)-p_1(B)-p_1(R)\,.$$

  et $p_1(Y)+p_1(C)+p_1(B)+p_1(R)=1025y^5+1025xy^4+50x^2y^3+250x^3y^2+25x^4y+x^5$. On peut simplifier un peu l'expression en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}(x+5y)^5=1 \quad &\Leftrightarrow\quad (5y)^5+\binom{5}{4}x(5y)^4+\binom{5}{3}x^2(5y)^3+\binom{5}{2}x^3(5y)^2+\binom{5}{1}x^4(5y)+x^5=1\\ &\Leftrightarrow\quad 3125y^5+3125xy^4+1250x^2y^3+250x^3y^2+25x^4y+x^5=1\,.\end{aligned}$$

  On en déduit que $\left\{\begin{array}{lcl} p_1(P) & = & 2100y^5+2100xy^4+1200x^2y^3 \\ p_1(P_6) & = & 1200x^2y^3 \end{array}\right.$.

On reporte les résultats obtenus :

coefficient de dans	y^5	xy^4	x^2y^3	x^3y^2	x^4y	x^5
$p_1(Y_6)$	0	0	0	0	0	1
$p_1(Y)$	5	0	0	0	0	1
$p_1(C_6)$	0	0	0	0	25	0
$p_1(C)$	100	25	0	0	25	0
$p_1(B_6)$	0	0	0	250	0	0
$p_1(B)$	800	400	50	250	0	0
$p_1(P_6)$	0	0	1200	0	0	0
$p_1(P)$	2100	2100	1200	0	0	0
$p_1(R_6)$	0	600	0	0	0	0
$p_1(R)$	120	600	0	0	0	0

2. Évaluer chacune de ces probabilités pour $x = 1/6$ afin de vérifier vos calculs puis pour $x = 1/3$ et reporter les valeurs approchées arrondies à trois décimales le dans le tableau suivant

x	$p_1(Y)$	$p_1(C)$	$p_1(B)$	$p_1(P)$	$p_1(R)$
$1/6$					
$1/3$					

Il suffit d'évaluer les expressions trouvées à la question précédente. Comme $x = 1/6$ correspond au cas des dés non pipés traité en cours, cela permet de détecter d'éventuelles erreurs (en comparant avec le cours).

x	$p_1(Y)$	$p_1(C)$	$p_1(B)$	$p_1(P)$	$p_1(R)$
$1/6$	$0,00077$	$0,019$	$0,193$	$0,69$	$0,093$
$1/3$	$0,0043$	$0,048$	$0,257$	$0,696$	$0,068$

On se demande comment la probabilité du Yams évolue lorsque les dés sont pipés.

Exercice 2.— *Probabilité du Yams.*

1. Exprimer y en fonction de x.

   On utilise le fait que p est une loi de probabilité :

$$1 = p\Big(\text{⚅}\Big) + p\Big(\text{⚀}\Big) + p\Big(\text{⚁}\Big) + p\Big(\text{⚂}\Big) + p\Big(\text{⚃}\Big) + p\Big(\text{⚄}\Big) = x + 5y\,,$$

   de sorte que $y = \frac{1}{5}(1 - x)$.

2. Étudier la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 + 5^{-4}(1-x)^5$, atteint-elle son minimum et si oui, en quel(s) point(s) ?

   La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et atteint donc ses bornes (l'étude de fonction va le confirmer). De plus, f est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = 5x^4 - 5^{-3}(1-x)^4\,.$$

   On résout $f'(x) = 0$ pour $x \in [0,1]$, comme alors x et $1 - x$ sont positifs, on a

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 5^{-4}(1-x)^4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = |5^{-1}(1-x)| \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-x}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{6}\,.$$

   On en déduit le signe de $f'(x)$ et les variation de f :

x	0		$\frac{1}{6}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{5^4}$	$\searrow$	$\frac{1}{6^4}$	$\nearrow$	1

   Et finalement f atteint son minimum au point $x = \frac{1}{6}$.

3. Que dire de la probabilité de faire un Yams lorsque les dés sont pipés : $x \neq \frac{1}{6}$?

On rappelle que la probabilité de faire un Yams est $p_1(Y) = x^5 + 5y^5 = x^5 + 5\left(\frac{1-x}{5}\right)^5 = f(x)$ et on peut conclure que la probabilité de faire un Yams augmente lorsque x s'éloigne de $\frac{1}{6}$ (qui correspond au cas où les 6 faces sont équiprobables).

On se donne à présent la possibilité d'effectuer un deuxième lancer comme suit : on peut choisir tout ou partie des dés, et les relancer, on modifie ainsi l'expérience aléatoire et on note p_2 la loi de probabilités sur Ω obtenue après ce deuxième lancer. En cours, on a étudié une stratégie consistant à garder le nombre maximal de dés ayant la même valeur et relancer les autres, sauf si tous les dés étaient différents auquel cas on relance tous les dés. Dans l'exercice suivant, on étudie comment adapter la stratégie afin d'exploiter le fait que les dés sont pipés pour améliorer la probabilité $p_2(Y)$ de faire un Yams en deux lancers.

Exercice 3.— *Probabilités après un deuxième lancer.*

1. On suppose qu'on a obtenu un full au premier lancer, avec deux 6 et trois 4, par exemple

.

(i) Calculer la probabilité d'améliorer le premier lancer en Yams en relançant les deux dés valant 6, calculer ensuite la probabilité d'améliorer le premier lancer en Yams en relançant plutôt les trois dés valant 4.

(ii) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 - \dfrac{(1-x)^2}{25}$ définie sur $[0,1]$.

(iii) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que si $x < \alpha$ il vaut mieux relancer les deux dés valant 6 et si $x > \alpha$, il faut changer de stratégie et relancer les trois dés valant 4. Montrer que $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$.

(i) Relancer les deux 6 : on améliore le premier lancer en Yams ssi on obtient deux 4 c'est-à-dire avec probabilité $p\Big($  $\Big)^2 = y^2 = \dfrac{(1-x)^2}{25}$.
Relancer les trois 4 : on améliore le premier lancer en Yams ssi on obtient trois 6 c'est-à-dire avec probabilité $p\Big($  $\Big)^2 = x^3$.

(ii) On définit sur $[0,1]$, $g : x \mapsto x^3 - \dfrac{(1-x)^2}{25}$. La fonction g est polynomiale, elle est donc dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{25}(1-x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in [0,1]\,.$$

• g est continue sur $[0,1]$ et $g(0) = -\frac{1}{25} < 0$, $g(1) = 1 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
• g est strictement croissante donc $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ est unique.

x	0	α	1
$g'(x)$		$+$	
g	$\frac{-1}{25}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

Comme de plus

$$25g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{3^3} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{12}{27} > 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$$

et

$$25g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4^3} - \frac{3^2}{4^2} = \frac{-11}{4^3} < 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$$

on obtient que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right[$.

(iii) Soit $x \in [0,1]$, grâce à la question précédente, si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$ et il vaut mieux relancer les trois 4 tandis que si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et il vaut mieux relancer les deux 6 (et pour $x = \alpha$ i.e. $g(x) = 0$, les deux stratégies sont équivalentes).

2. On suppose qu'on a obtenu un full au premier lancer, avec trois 6 et deux 4, par exemple

.

Reprendre la question précédente afin de comparer la stratégie consistant à relancer les dés 6 avec la stratégie consistant à relancer les dés 4 en fonction de la valeur de x.

Relancer les deux 4 : on améliore le premier lancer en Yams ssi on obtient deux 6 c'est-à-dire avec probabilité $p\left(\text{⚃}\right)^2 = x^2$.
Relancer les trois 6 : on améliore le premier lancer en Yams ssi on obtient trois 4 c'est-à-dire avec probabilité $p\left(\text{⚅}\right)^2 = y^3 = \dfrac{(1-x)^3}{125}$.
On étudie alors sur $[0,1]$ la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(1-x)^3}{125} - x^2$, qui est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$h'(x) = -3\frac{(1-x)^2}{125} - 2x < 0 \quad \text{pour tout } x \in [0,1]\,.$$

On en déduit les variations de h.
Comme h est continue, strictement croissante sur $[0,1]$, $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$, on conclut comme précédemment qu'il existe un unique $\beta \in]0,1[$ tel que $h(\beta) = 0$.

Si $x < \beta$, $h(x) > 0$ et donc il vaut mieux relancer les trois 6 tandis que si $x > \beta$, il vaut mieux relancer les deux 4.

x	0	β	1
$h'(x)$		$-$	
h	$\frac{1}{125}$ ↘	0	↘ -1

3. On suppose à présent qu'on a obtenu au premier lancer une paire de 4, un 6 et deux autres dés différents, par exemple

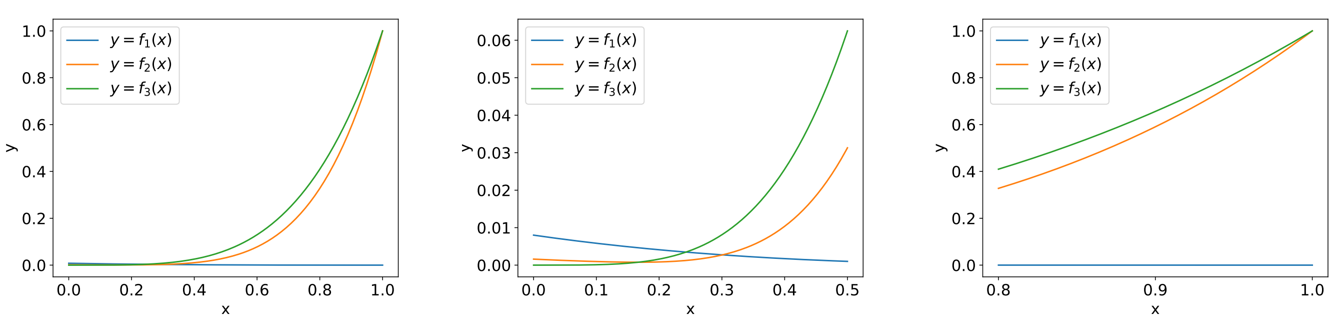
.

   (i) Proposer trois stratégies pour le deuxième lancer et calculer (en fonction de x) la probabilité d'améliorer la premier lancer en Yams pour chacune de ces stratégies.

   (ii) On donne les courbes représentatives sur $[0,1]$, puis deux zooms sur $[0, 0.5]$ et $[0.8, 1]$, de

$$f_1 : x \mapsto \left(\frac{1-x}{5}\right)^3 \,, \quad f_2 : x \mapsto x^5 + 5\left(\frac{1-x}{5}\right)^5 \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto x^4\,.$$

   Qu'est-ce que cela semble indiquer quant à la meilleure stratégie pour obtenir un Yams ?



(a) (b) (c)

Stratégies possibles pour le deuxième lancer :
• Garder la paire de 4 et relancer les trois autres dés. La probabilité d'obtenir un Yams est la probabilité d'obtenir trois dés 4 : $y^3 = f_1(x)$.
• Garder le 6 et relancer les quatre autres dés. La probabilité d'obtenir un Yams est la probabilité d'obtenir quatre dés 6 : $x^4 = f_3(x)$.
• Relancer tous les dés, la probabilité d'obtenir un Yams est $x^5 + 5y^5 = f_2(x)$.

La courbe représentative de f_2 est en-dessous de celle de f_1 ou f_3 sur tout $[0,1]$, la stratégie consistant à relancer tous les dés n'est la meilleure pour aucune valeur de $x \in [0,1]$. De plus, si on compare les courbes de f_1 et f_3, cela semble indiquer qu'il existe $\gamma \in]0.2, 0.3[$ tel que

- pour tout $x < \gamma$, $f_3(x) < f_1(x)$ et il vaut mieux garder la paire de 4,
- pour tout $x > \gamma$, $f_1(x) < f_3(x)$ et il vaut mieux garder le dé 6.

4. Choisir une autre configuration obtenue au premier lancer pour laquelle la stratégie vue en cours (consistant à garder le plus grand nombre de dés égaux et relancer les autres) n'est pas forcément la meilleure (selon la valeur de x) et l'étudier autant que possible.

On rappelle le théorème des accroissements finis que vous avez vu (ou peut-être que vous allez bientôt voir) dans le tronc commun :

Théorème. *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\,.$$

Exercice 4.— *Valeur approchée de α.*

On reprend la valeur critique $\alpha \in]0,1[$ de changement de stratégie définie dans la première question de l'exercice 3 et on rappelle que α est l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $g(x) = 0$ pour $g(x) = x^3 - \frac{1}{25}(1-x)^2$. On sait de plus que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

1. Justifier que g est deux fois dérivable et que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et étudier le signe de $g''(x)$ pour $x \in [0,1]$.

La fonction g est polynomiale, donc deux fois dérivable. On a $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{25}(1-x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et de plus, $g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ et $1 - x = 0$ impossible.
On a pour $x \in [0,1]$, $g''(x) = 6x - \frac{2}{25}$ de sorte que

x	0		$\frac{1}{75}$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

2. On définit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Soit $x \in]\alpha, 1]$.

(*i*) Montrer qu'il existe $c_x \in]\alpha, x[$ tel que
$$\frac{g(x)}{x-\alpha} = g'(c_x)\,.$$

(*ii*) En déduire que $\dfrac{g(x)}{x-\alpha} \leq g'(x)$.

(*iii*) Montrer que $\alpha \leq F(x) \leq x$ et en déduire que $[\alpha, 1]$ est stable par F.

Soit $x \in [\alpha, 1]$.

(i) La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et donc sur $[\alpha, x]$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_x \in]\alpha, x[$ tel que

$$\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = g'(c_x)\,,$$

et on conclut en utilisant que $g(\alpha)=0$.

(ii) On a montré à la première question que $g''(t)>0$ pour tout $t \in \left]\frac{1}{75},1\right]$, de plus $\alpha > \frac{1}{4} > \frac{1}{75}$ donc g' est strictement croissante sur $[\alpha,1]$ et donc $g'(c_x) < g'(x)$ et on conclut grâce à la question précédente.

(iii) On utilise la question précédente :

$$\frac{g(x)}{x-\alpha} \leq g'(x) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{g'(x)>0\\ x-\alpha>0}} \quad \frac{g(x)}{g'(x)} \leq x-\alpha \quad \Rightarrow \quad F(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \geq x-(x-\alpha) = \alpha\,.$$

De plus $g(x) \geq 0$ $(x \geq \alpha)$ et $g'(x)>0$ donc $F(x) = x - \underbrace{\frac{g(x)}{g'(x)}}_{\geq 0} \leq x \leq 1$.

On conclut que $\forall x \in]\alpha,1]$, $F(x) \in [\alpha,1]$ et donc $F(]\alpha,1]) \subset [\alpha,1]$. Par ailleurs, $F(\alpha) = \alpha - 0 \in [\alpha,1]$ et finalement

$$F([\alpha,1]) \subset [\alpha,1] \quad \Rightarrow \quad [\alpha,1] \text{ est stable par } F\,.$$

3. Soit $x_0 \in [\alpha,1]$. Comme l'intervalle $[\alpha,1]$ est stable par F, on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\alpha,1]$.

   (i) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $l \in [\alpha,1]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (ii) Montrer que $l=\alpha$.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in [\alpha,1]$ donc $x_{n+1} = F(x_n) \leq x_n$ par la question précédente, de sorte que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est de plus minorée par α et converge donc vers un certain $l \in \mathbb{R}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq x_n \leq 1$ et par encadrement quand $n \to +\infty$, on a $\alpha \leq l \leq 1$.

(ii) La fonction F est continue sur $[0,1]$ comme combinaison simple de fonctions continues (g et g' sont polynomiales donc continues). En particulier, F est continue au point α.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{X\to\alpha} F(X) & = & F(\alpha) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n & = & l \end{array}\right\} \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\text{composition}\\ \text{des limites}}} \quad \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(l)\,.$$

Par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l$ et par unicité de la limite $F(l)=l$ et l est un point fixe de F dans $[\alpha,1]$. Or, par définition de F,

$$F(l) = l \quad \Leftrightarrow \quad l - \frac{g(l)}{g'(l)} = l \quad \Leftrightarrow \quad g(l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = \alpha$$

car α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ dans $[0,1]$. On peut finalement conclure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

4. *Estimation à l'ordre* 2. Soit $x \in \left]\alpha, \frac{1}{3}\right]$ et $c_x \in]\alpha, x[$ défini à la question $2(i)$.

   (i) Montrer que $F(x) - \alpha = \dfrac{(g'(x)-g'(c_x))(x-\alpha)}{g'(x)}$.

   (ii) En déduire qu'il existe $d_x \in]c_x, x[$ tel que $F(x) - \alpha = \dfrac{g''(d_x)}{g'(x)}(x-\alpha)(x-c_x)$.

(iii) Conclure que $|F(x)-\alpha| \leq C|x-\alpha|^2$ avec $C \leq 8$.

(i) On a par la définition de F et c_x,

$$F(x)-\alpha = x-\alpha-\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{(x-\alpha)g'(x)}{g'(x)} - \frac{g'(c_x)(x-\alpha)}{g'(x)} = \frac{(g'(x)-g'(c_x))(x-\alpha)}{g'(x)}\,.$$

(ii) La fonction g' est dérivable sur $[0,1]$ donc sur $[c_x, x]$ et par le théorème des accroissements finis, il existe $d_x \in]c_x, x[$ tel que

$$g'(x)-g'(c_x) = g''(d_x)(x-c_x)\,,$$

et on remplace dans l'expression établie à la question précédente.

(iii) Comme $c_x \in]\alpha, x[$, on a $|x-c_x| \leq |x-\alpha|$, de plus $g'(x) > 0$ et $g''(d_x) > 0$ car g'' est strictement positive sur $[\alpha, 1]$, on obtient

$$|F(x)-\alpha| \leq \frac{g''(d_x)}{g'(x)}|x-\alpha|^2\,.$$

On rappelle que g' est croissante sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ (voir question 2) et $x \geq \alpha > \frac{1}{4}$ donc

$$g'(x) \geq g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} + \frac{2}{25}\frac{3}{4} = \frac{99}{400}$$

et g'' est croissante, $d_x \leq x \leq \frac{1}{3}$ donc $g''(d_x) \leq g''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\frac{1}{3} - \frac{2}{25} = \frac{48}{25}$. On obtient

$$\frac{g''(d_x)}{g'(x)} \leq \frac{48}{25}\frac{400}{99} \underbrace{=}_{\frac{75}{75}} \frac{32\times 8}{33} \leq 8\,.$$

5. *Vitesse de convergence.* Soit $x_0 = \frac{1}{3}$.

(i) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n-\alpha| \leq \frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^n}\,.$$

(ii) Estimer un nombre d'itérations n suffisant pour obtenir une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près et la calculer (on pourra utiliser une calculatrice ici).

(i) On va le montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\alpha, 1]$ (par la question 3) et comme la suite $(x_n)_n$ est décroissante et $x_0 = 1/3$ ici, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\alpha, 1/3]$.

- *Initialisation $(n=0)$:* $2^0 = 1$ et on a bien $\frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^0} = |x_0-\alpha|$.
- *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $|x_n-\alpha| \leq \frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^n}$ (HR). On a alors par $5(iii)$ avec $x = x_n \in [\alpha, 1/3]$:

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\alpha| = |F(x_n)-\alpha| &\underbrace{\leq}_{5(iii)} C|x_n-\alpha|^2 \underbrace{\leq}_{(HR)} C\left(\frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

- *Conclusion :* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n-\alpha| \leq \frac{1}{C}\left(C|x_0-\alpha|\right)^{2^n}$.

Comme $1/4 < \alpha < 1/3$, on a $C|x_0-\alpha| = C|1/3-\alpha| \leq 8(1/3-1/4) < 1$ et on en déduit que $|x_n-\alpha|$ tend vers 0 c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

(ii) Comme $C|x_0 - \alpha| \leq 8\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, on obtient l'estimation

$$|x_n - \alpha| \leq \underbrace{\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}}_{e_n}.$$

On calcule itérativement les valeurs de e_n et on obtient $e_6 < 10^{-3}$, on calcule alors $x_6 \simeq$ qui est bien une valeur approchée de α à 10^{-3} près :

$$|\alpha - 0.275| \leq 10^{-3}.$$