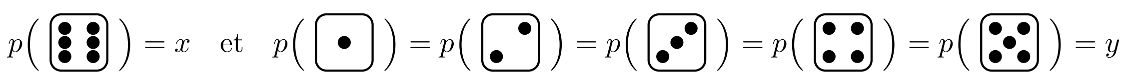
Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

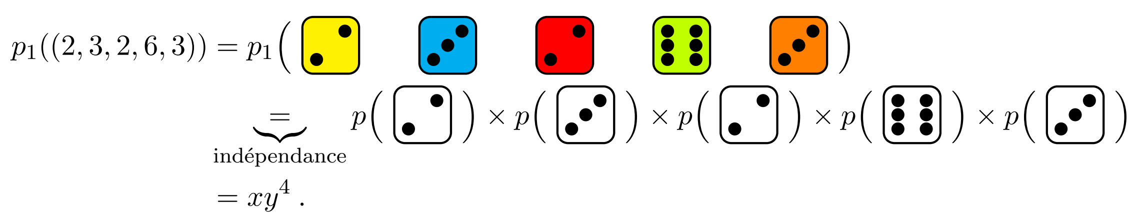
# Devoir Maison – MEU104
# Culture Mathématique

*Nous allons étudier dans ce problème un jeu de Yams, comme nous l'avons fait en cours, mais en supposant que suite à un défaut de fabrication les dés sont pipés.* On réalise une expérience aléatoire qui consiste à lancer 5 dés, chaque dé prenant une valeur entre 1 et 6, on atteint l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5$. Autrement dit les résultats possibles sont tous les 5–uplets prenant des valeurs entre 1 et 6. Par exemple,


Chaque dé suit la même loi de probabilité et les 5 dés sont indépendants, comme lors du cours. En revanche, contrairement à l'expérience étudiée en cours, on ne considère plus que chaque dé suit une loit uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. On fixe $x \in [0,1]$ et on suppose que chaque dé suit la loi de probabilité suivante $p$ sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ : la probabilité de faire un 6 est égale à $x$ tandis que les probabilités de faire un autre chiffre sont égales i.e.




Attention, l'expérience aléatoire consistant à réaliser 1 lancer des 5 dés correspond à une loi de probabilités $p_1$ sur l'univers $\Omega$ pour laquelle les éventualités $\omega \in \Omega$ ne sont plus équiprobables, par exemple




Introduisons les événements $Y$, $C$, $B$, $P$, $R \subset \Omega$ que nous avons considérés en cours :

$$
\begin{aligned}
Y &= \{\text{les 5 dés forment un yams}\} = \{\text{les 5 dés sont égaux}\}\\
C &= \{\text{les 5 dés forment un carré}\} = \{\text{4 dés sont égaux et pas plus}\}\\
B &= \{\text{les 5 dés forment un relan ou un full}\} = \{\text{3 dés sont égaux et pas plus}\}\\
P &= \{\text{les 5 dés forment une paire simple/double}\} = \{\text{2 dés sont égaux et pas plus}\}\\
R &= \{\text{les 5 dés sont différents}\}\,.
\end{aligned}
$$

On rappelle que ces événements $Y$, $C$, $B$, $P$, $R$ forment une partition de l'univers $\Omega$ : ils sont deux à deux disjoints et leur union est $\Omega$. Cela signifie que chaque résultat possible d'un lancer tombe dans exactement un et un seul des événements $Y$, $C$, $B$, $P$, $R$.

**Exercice 1.**— *Probabilités après 1 lancer.*
On introduit les événements $Y_6 \subset Y$, $C_6 \subset C$, $B_6 \subset B$, $P_6 \subset P$, $R_6 \subset R$ :

$$\begin{aligned}
Y_6 &= \{\text{les 5 dés forment un yams de 6}\} \subset Y \\
C_6 &= \{\text{les 5 dés forment un carré de 6}\} \subset C \\
B_6 &= \{\text{les 5 dés forment un brelan de 6 ou un full aux 6}\} \subset B \\
P_6 &= \{\text{les 5 dés forment une paire simple/double dont une paire de 6}\} \subset P \\
R_6 &= \{\text{les 5 dés sont différents dont un 6}\} \subset R\,.
\end{aligned}$$

1. Calculer les probabilités $p_1(Y_6)$, $p_1(C_6)$, $p_1(B_6)$, $p_1(P_6)$ et $p_1(R_6)$ ainsi que les probabilités $p_1(Y)$, $p_1(C)$, $p_1(B)$, $p_1(P)$ et $p_1(R)$ de chacun des événements en 1 lancer. On les exprimera en fonction de $x$ et $y$ et plus précisément, on doit trouver des polynômes en $x$ et $y$ de la forme $ay^5 + bxy^4 + cx^2y^3 + dx^3y^2 + ex^4y + fx^5$. Reporter les résultats obtenus dans le tableau suivant :

| coefficient de dans | $y^5$ | $xy^4$ | $x^2y^3$ | $x^3y^2$ | $x^4y$ | $x^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1(Y_6)$ | | | | | | |
| $p_1(Y)$ | | | | | | |
| $p_1(C_6)$ | | | | | | |
| $p_1(C)$ | | | | | | |
| $p_1(B_6)$ | | | | | | |
| $p_1(B)$ | | | | | | |
| $p_1(P_6)$ | | | | | | |
| $p_1(P)$ | | | | | | |
| $p_1(R_6)$ | | | | | | |
| $p_1(R)$ | | | | | | |

*On demande bien entendu d'expliquer chacun des calculs ayant mené aux résultats trouvés.*

2. Évaluer chacune de ces probabilités pour $x = 1/6$ afin de vérifier vos calculs puis pour $x = 1/3$ et reporter les valeurs approchées arrondies à trois décimales le dans le tableau suivant

| $x$ | $p_1(Y)$ | $p_1(C)$ | $p_1(B)$ | $p_1(B)$ | $p_1(R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/6 | | | | | |
| 1/3 | | | | | |

On se demande comment la probabilité du Yams évolue lorsque les dés sont pipés.

**Exercice 2.**— *Probabilité du Yams.*

1. Exprimer $y$ en fonction de $x$.

2. Étudier la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 + 5^{-4}(1-x)^5$, atteint-elle son minimum et si oui, en quel(s) point(s) ?

3. Que dire de la probabilité de faire un Yams lorsque les dés sont pipés : $x \neq \frac{1}{6}$ ?

On se donne à présent la possibilité d'effectuer un deuxième lancer comme suit : on peut choisir tout ou partie des dés, et les relancer, on modifie ainsi l'expérience aléatoire et on note $p_2$ la loi de probabilités sur $\Omega$ obtenue après ce deuxième lancer. En cours, on a étudié une stratégie consistant à garder le nombre maximal de dés ayant la même valeur et relancer les autres, sauf si tous les dés étaient différents auquel cas on relance tous les dés. Dans l'exercice suivant, on étudie comment adapter la stratégie afin d'exploiter le fait que les dés sont pipés pour améliorer la probabilité $p_2(Y)$ de faire un Yams en deux lancers.

**Exercice 3.**— *Probabilités après un deuxième lancer.*

1. On suppose qu'on a obtenu un full au premier lancer, avec deux 6 et trois 4, par exemple

.

   $(i)$ Calculer la probabilité d'améliorer le premier lancer en Yams en relançant les deux dés valant 6, calculer ensuite la probabilité d'améliorer le premier lancer en Yams en relançant plutôt les trois dés valant 4.

   $(ii)$ Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 - \dfrac{(1-x)^2}{25}$ définie sur $[0,1]$.

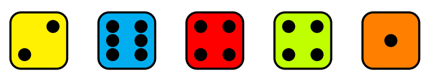
   $(iii)$ Montrer qu'il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que si $x < \alpha$ il vaut mieux relancer les deux dés valant 6 et si $x > \alpha$, il faut changer de stratégie et relancer les trois dés valant 4. Montrer que $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$.

2. On suppose qu'on a obtenu un full au premier lancer, avec trois 6 et deux 4, par exemple

.

   Reprendre la question précédente afin de comparer la stratégie consistant à relancer les dés 6 avec la stratégie consistant à relancer les dés 4 en fonction de la valeur de $x$.

3. On suppose à présent qu'on a obtenu au premier lancer une paire de 4, un 6 et deux autres dés différents, par exemple



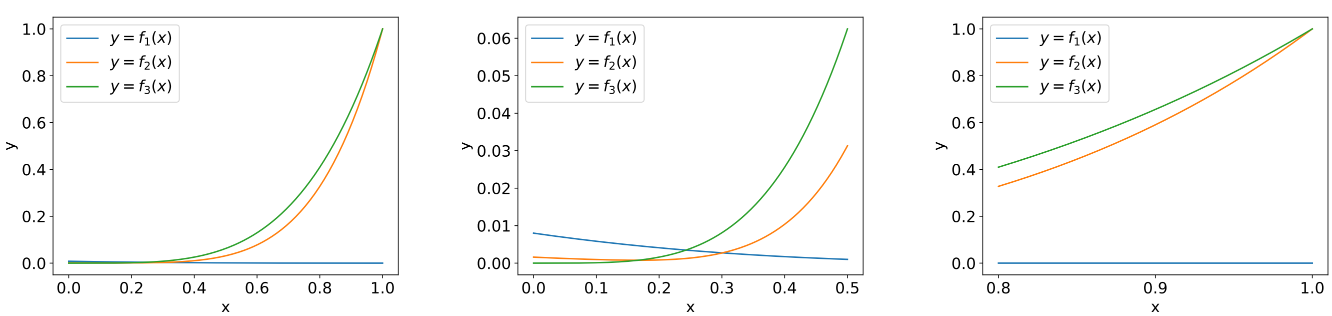
.

   $(i)$ Proposer trois stratégies pour le deuxième lancer et calculer (en fonction de $x$) la probabilité d'améliorer la premier lancer en Yams pour chacune de ces stratégies.

   $(ii)$ On donne les courbes représentatives sur $[0,1]$, puis deux zooms sur $[0,0.5]$ et $[0.8,1]$, de

$$f_1 : x \mapsto \left(\frac{1-x}{5}\right)^3 \quad , \quad f_2 : x \mapsto x^5 + 5\left(\frac{1-x}{5}\right)^5 \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto x^4 \, .$$

   Qu'est-ce que cela semble indiquer quant à la meilleure stratégie pour obtenir un Yams ?




(a) (b) (c)

4. Choisir une autre configuration obtenue au premier lancer pour laquelle la stratégie vue en cours (consistant à garder le plus grand nombre de dés égaux et relancer les autres) n'est pas forcément la meilleure (selon la valeur de $x$) et l'étudier autant que possible.

On rappelle le théorème des accroissements finis que vous avez vu (ou peut-être que vous allez bientôt voir) dans le tronc commun :

**Théorème.** *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in ]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) .$$

**Exercice 4.—** *Valeur approchée de $\alpha$.*

On reprend la valeur critique $\alpha \in ]0, 1[$ de changement de stratégie définie dans la première question de l'exercice 3 et on rappelle que $\alpha$ est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = 0$ pour $g(x) = x^3 - \frac{1}{25}(1 - x)^2 = 0$. On sait de plus que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

1. Justifier que $g$ est deux fois dérivable et que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et étudier le signe de $g''(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
2. On définit $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Soit $x \in ]\alpha, 1]$.
   - $(i)$ Montrer qu'il existe $c_x \in ]\alpha, x[$ tel que
   $$\frac{g(x)}{x - \alpha} = g'(c_x) .$$
   - $(ii)$ En déduire que $\dfrac{g(x)}{x - \alpha} \leq g'(x)$.
   - $(iii)$ Montrer que $\alpha \leq F(x) \leq x$ et en déduire que $[\alpha, 1]$ est stable par $F$.
3. Soit $x_0 \in [\alpha, 1]$. Comme l'intervalle $[\alpha, 1]$ est stable par $F$, on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\alpha, 1]$.
   - $(i)$ Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $l \in [\alpha, 1]$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   - $(ii)$ Montrer que $l = \alpha$.
4. *Estimation à l'ordre* 2. Soit $x \in \left]\alpha, \frac{1}{3}\right]$ et $c_x \in ]\alpha, x[$ défini à la question 2$(i)$.
   - $(i)$ Montrer que $F(x) - \alpha = \dfrac{(g'(x) - g'(c_x))(x - \alpha)}{g'(x)}$.
   - $(ii)$ En déduire qu'il existe $d_x \in ]c_x, x[$ tel que $F(x) - \alpha = \dfrac{g''(d_x)}{g'(x)}(x - \alpha)(x - c_x)$.
   - $(iii)$ Conclure que $|F(x) - \alpha| \leq C|x - \alpha|^2$ avec $C \leq 8$.
5. *Vitesse de convergence.* Soit $x_0 = \dfrac{1}{3}$.
   - $(i)$ Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ avec de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{C} \left(C|x_0 - \alpha|\right)^{2^n} .$$
   - $(ii)$ Estimer un nombre d'itérations $n$ suffisant pour obtenir une valeur approchée de $x_n$ à $10^{-3}$ près et la calculer (on pourra utiliser une calculatrice ici).