Exercice 2 - Compétition à l'intérieur d'une espèce : le modèle logistique

Rappel : croissance linéaire → la population augmente proportionnellement à sa taille.

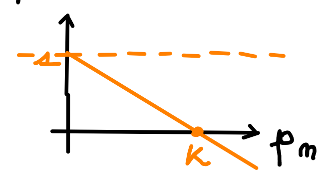
exemple : chaque individu donne naissance à 2 individus

$$p_{n+1} = p_n + 2p_n$$

ou encore $$\underbrace{p_{n+1} - p_n}_{\text{nouveaux individus}} = \underset{\text{" taux de croissance " : } r>0}{2}\, p_n$$

compétition → si la population est trop importante, le taux de croissance est plus petit (manque de ressources par exemple)

$$p_{n+1} - p_n = r\,p_n\left(1 - \frac{p_n}{K}\right)$$



Si $p_n > K$, $1 - \frac{p_n}{K} < 0$ et la population diminue.

1- $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$ avec $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$

Si $p_0 > \frac{(r+1)}{r}K$, on a $p_1 = p_0 + rp_0\left(1 - \frac{p_0}{K}\right) = p_0\left(\underbrace{1 + r - r\frac{p_0}{K}}_{<0}\right)$

$\Updownarrow$ $r>0$ et $K>0$

$\frac{rp_0}{K} > r+1$

$\Leftrightarrow r+1-\frac{rp_0}{K} < 0$

$p_1 < 0$, la population s'éteint à la 1ère génération.

HYPOTHÈSE : $0 < p_0 < \frac{(r+1)K}{r}$.

2- On définit $u_n = \frac{r\,p_n}{(r+1)K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Double implication :

• On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \overset{(*)}{=} p_n + f(p_n)$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (r+1)\,u_n(1-u_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{r\,p_{n+1}}{(r+1)K} \underset{\text{on utilise } (*)}{=} \frac{r}{(r+1)K}\left(p_n + f(p_n)\right)$$

$$= \frac{r}{(r+1)K}\left(p_n + rp_n\left(1 - \frac{p_n}{K}\right)\right)$$ on veut revenir à u_n :

← $p_n = \frac{(r+1)K}{r}u_n$

$$= \frac{r}{(r+1)K}\left(\frac{(r+1)K}{r}u_n + r\,\frac{(r+1)K}{r}u_n\left(1 - \frac{(r+1)K}{r}\frac{u_n}{K}\right)\right)$$

$$\underset{\text{on simplifie !}}{=} \quad u_n + r\,u_n\left(1 - \frac{r+1}{r}u_n\right)$$

$$= u_n + r u_n - (r+1)\,u_n^2$$

$$= u_n(1+r) - (1+r)\,u_n^2$$

$$= (1+r)\,u_n(1-u_n)$$ <u>ouf</u> !

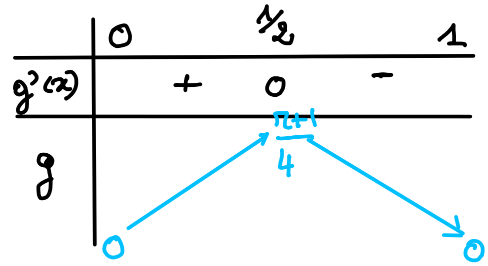
• Il reste à montrer l'autre implication ....

3/ – Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$: étudier les variations de g.
$x \longmapsto (r+1)x(1-x) = (r+1)(x-x^2)$

g est dérivable (polynome) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (r+1)(1-2x)$

$g'(x) = 0 \underset{\substack{r+1 \neq 0 \\ \text{car } r>0}}{\Leftrightarrow} 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

et $g(0) = 0$; $g(1) = 0$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = (r+1)\frac{1}{4}$



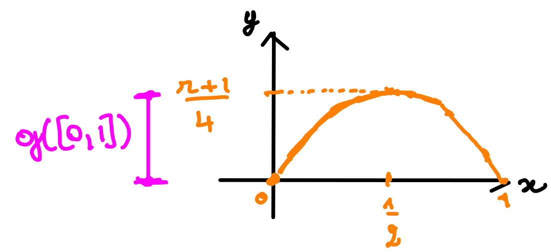
4/ – On suppose $0 < r \leq 3$. Montrer que

$g([0,1]) \subset [0,1]$

rappel : $g([0,1]) = \{g(x) : x \in [0,1]\}$

D'après les variations de g,

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r+1}{4}$



donc $g([0,1]) \subset [0, \underbrace{\frac{r+1}{4}}_{\leq 1}]$ et $0 < r \leq 3$
$\Rightarrow 1 < r+1 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{r+1}{4} \leq 1$

finalement : $\boxed{g([0,1]) \subset [0,1]}$

5/ – On cherche les points fixe de g : on cherche les solutions $\alpha \in]0,1[$ de l'équation $g(\alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow (r+1)\alpha(1-\alpha) = \alpha$

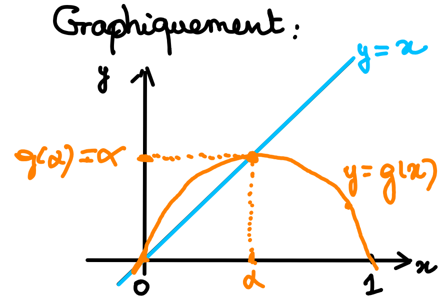
$\Leftrightarrow r\alpha + \cancel{\alpha} - (r+1)\alpha^2 = \cancel{\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha(r-(r+1)\alpha) = 0$

$\underset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} r-(r+1)\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{r}{r+1}$

Graphiquement :



Intersections de la courbe de g avec la droite $y = x$.

et g admet un unique point fixe dans $]0,1[$: $\boxed{\alpha = \frac{r}{r+1}}$

6/ – On calcule $g'(\alpha) = (r+1)(1-2\alpha) = (r+1)\left(1-2\frac{r}{r+1}\right)$

$= (r+1)\left(\frac{r+1-2r}{r+1}\right)$

donc $\boxed{g'(\alpha) = 1-r}$

7/- On suppose $0 < r \leq 1$: $\qquad \alpha = \frac{r}{r+1} = \frac{r+1}{r+1} - \frac{1}{r+1} = 1 - \frac{1}{r+1}$

$$0 < r \leq 1 \iff 1 < r+1 \leq 2$$

$$\underset{r+1>0}{\iff} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{r+1} < 1$$

$$\iff -1 < \frac{-1}{r+1} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\iff 0 < 1 - \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff \boxed{0 < \alpha \leq \frac{1}{2}}$$

• Comme g est croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$: $g([\alpha,\frac{1}{2}]) \subset [\underset{\alpha}{g(\alpha)}, g(\frac{1}{2})]$ et $g(\frac{1}{2}) = (r+1)\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{r+1}{4}$

$\subset [\alpha, \frac{r+1}{4}]$ et $r \leq 1$ donc $r+1 \leq 2$ $\Rightarrow \frac{r+1}{4} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\subset [\alpha, \frac{1}{2}]$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante

$f([a,b]) = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$

Soit $x \in [a,b]$.

* $x \geq a \underset{f \text{ croissante}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(a)$
* $x \leq b \Rightarrow f(x) \leq f(b)$

$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$

donc $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$.

• Comme g est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$: $g(]0,\alpha]) \subset]\underset{0}{g(0)}, \underset{\alpha}{g(\alpha)}] =]0,\alpha]$

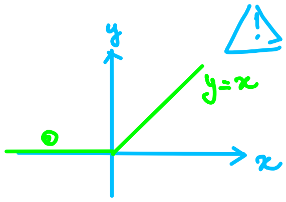
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stt croissante

$\Rightarrow f(]a,b]) \subset]f(a), f(b)]$

en effet, soit $x \in [a,b]$

* $x > a \underset{\text{stt} \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(a)$
* OK pour b idem

⚠ f croissante $\not\Rightarrow f(]a,b]) \subset]f(a), f(b)]$



C.ex : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(]-1,1]) = [0,1]$

$]f(-1), f(1)] =]0,1]$ pas $\subset$

• $0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq -\alpha < 0$

$\iff \underset{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 - \alpha < 1$

g est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$

donc $g([\frac{1}{2}, 1-\alpha]) \subset [g(1-\alpha), g(\frac{1}{2})]$

$= [\alpha, \underbrace{\frac{r+1}{4}}_{\leq \frac{1}{2}}]$

donc $g([\frac{1}{2}, 1-\alpha]) \subset [\alpha, \frac{1}{2}]$

• comme g est stt décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, $g([1-\alpha, 1[) \subset]\underset{0}{g(1)}, \underset{\alpha}{g(1-\alpha)}] =]0,\alpha]$

⚠ Pourquoi cherche-t-on des intervalles stables par g ? $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle stable par g i.e. $g(I) \subset I$.
ALORS, la suite récurrente définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = g(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
reste dans I : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

On le vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation ($n=0$) : $u_0 \in I$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \in I$. Montrons que $u_{n+1} \in I$.

  On a $u_{n+1} = g(u_n)$ et comme $\underbrace{u_n \in I}_{\text{par hypothèse de récurrence.}}$, $g(u_n) \in g(I) \subset I$ car I stable par g

  on a bien $u_{n+1} \in I$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ □

8/- Soit $u_0 \in]0, \alpha]$. Comme $g(]0,\alpha]) \subset]0,\alpha]$ ($]0,\alpha]$ stable par g)
on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\alpha]$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

on étudie donc le signe de
$$\begin{aligned} g(x) - x &= (r+1)x(1-x) - x \\ &= x[(r+1)(1-x) - 1] \\ &= x[r + \cancel{1} - (r+1)x - \cancel{1}] \\ &= x(r - (r+1)x) \\ &= rx\left(1 - \frac{r+1}{r}x\right) \end{aligned}$$

En réalité, comme $u_n \in]0,\alpha]$, on cherche le signe de $g(x) - x$ pour $x \in]0,\alpha]$
Mais dans la question suivante on recommence avec $u_0 \in [\alpha, \frac{1}{2}]$...

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) - x = rx\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}$

En particulier, pour $x \in]0,\alpha]$:

- $0 < x \leq \alpha \underset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{x}{\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{x}{\alpha} < 0$
  $\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{x}{\alpha} < 1$
- $rx > 0$

et donc $g(x) - x \geq 0$ pour $x \in]0,\alpha]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\alpha]$ et donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α donc elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n \leq \alpha$ on en déduit par comparaison à la limite

$$0 \leq \ell \leq \alpha$$

Attention : à la limite, les inégalités strictes ne sont pas préservées : penser à $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ pas > 0.

On va utiliser la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ pour en savoir plus sur ℓ.

- $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$
- comme g est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale) elle est en particulier continue au point $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to \ell} g(x) = g(\ell) \\ \text{De plus } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\end{array}\right\} \underset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$$

Par unicité de la limite : $\lim_{n\infty} u_{n+1} = \lim_{n\infty} g(u_n) \Leftrightarrow \ell = g(\ell)$

et donc ℓ est un point fixe de g. Comme $\ell \in [0,\alpha]$, on en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$

Montrons enfin que $\ell > 0$ (et donc $\ell = \alpha$) : comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq u_0 \underset{\substack{\text{par comparaison}\\ n\to+\infty}}{\Longrightarrow} \ell \geq u_0 \underset{u_0>0}{\Longrightarrow} \ell > 0.$$

Conclusion : si $u_0 \in \left]0,\alpha\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Revenons à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $p_n = \frac{(r+1)K}{r} u_n = \frac{K}{\alpha} u_n$

- $0 < u_0 \leq \alpha \underset{\frac{K}{\alpha}>0}{\Longleftrightarrow} 0 < \underbrace{\frac{K}{\alpha} u_0}_{=p_0} \leq K$
- $\lim_{n\infty} p_n = \frac{K}{\alpha} \lim_{n\infty} u_n = \frac{K}{\alpha}\cdot\alpha = K$

Cas $0 < p_0 \leq K$: la population $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers K "STABILISATION"

9/- On suppose à présent $u_0 \in [\alpha, \frac{1}{2}]$. On a vu que $[\alpha, \frac{1}{2}]$ stable par g à la question 7

et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\alpha, \frac{1}{2}]$.

De plus, si on reprend l'expression, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) - x = rx\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)$$

tableau de signes (dès quest° 8)

x	0		α		1
rx	0	$+$		$+$	
$1 - \frac{x}{\alpha}$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

Comme $u_n \in [\alpha, \frac{1}{2}]$

on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \leq 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi décroissante. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de plus minorée par α, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ $\xRightarrow[\text{quand } n \to +\infty]{\text{par encadrement (comparaison)}}$ $\alpha \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Enfin, le même argument qu'à la question 8/- permet de dire que ℓ est un point fixe de g : $g(\ell) = \ell$.

Or g a un unique point fixe dans $]0, 1[$ et c'est α, on en déduit $\ell = \alpha$.

Conclusion : si $u_0 \in [\alpha, \frac{1}{2}]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α également.

Comme

$$\alpha \leq u_0 \leq \frac{1}{2} \underset{\times \frac{K}{\alpha} \geq 0}{\iff} K \leq \underbrace{\frac{K}{\alpha} u_0}_{p_0} \leq \frac{K}{2\alpha} = \frac{K(r+1)}{2r}$$

$$\boxed{\text{Cas } K \leq p_0 \leq \frac{r+1}{2r} K : \text{ la population } (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } K. \text{ STABILISATION à nouveau}}$$