

VARIFOLDS, DES FILMS DE SAVON AUX SURFACES DISCRÈTES.

BLANCHE BUET

Formes et mathématiques : on se demande bien par où commencer tellement l'étude des formes est centrale dans le développement des mathématiques. Et d'ailleurs, déjà à notre échelle personnelle, l'étude des formes géométriques est un des premiers contacts mathématiques des écoliers qui apprennent à reconnaître un losange ou calculent le périmètre d'un cercle à l'aide du mystérieux nombre π . Les mathématiques nous apprennent petit à petit et au fil des classes, à décrire et classer les objets qui nous entourent, en commençant par des formes géométriques simples, puis des courbes paramétrées, des sphères, des cylindres et peut-être même un hyperboloïde. Comment ne pas être fascinée quand la géométrie différentielle nous propose finalement de modéliser toutes ces jolies formes sans angles ni pliures et de les baptiser courbes et surfaces *lisses* ?

Même si on se demande en parcourant la côte bretonne si notre chemin est bien une de ces courbes *lisses*, et que dire de ces ensembles de bulles de savon accolées ? On aimerait parler de ces courbes et surfaces pas très lisses et qui pourtant nous entourent aussi !



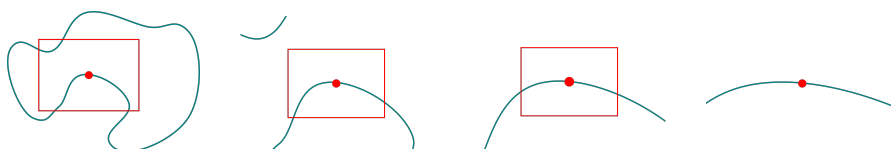
Et puis en lisant plus attentivement le thème proposé, les *maths en pleines formes*

@ D. Rabich, 2020 [4]

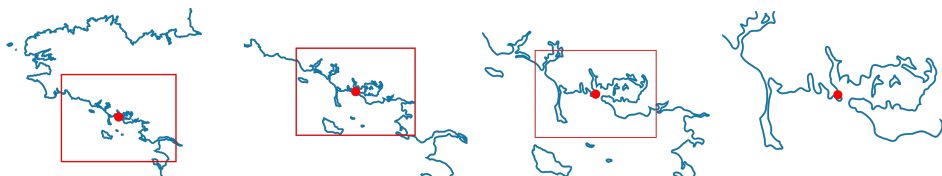
nous renvoient à l'essor enthousiasmant que connaît la discipline ces dernières années, et bien sûr, on aimerait aussi en parler ! Et justement, durant la deuxième moitié du siècle précédent, plusieurs mathématiciens ont proposé de généraliser la notion de surface au-delà du monde lisse afin de progresser dans la compréhension mathématique des lois de Plateau qui décrivent les propriétés des films et bulles de savon. La théorie géométrique de la mesure a ainsi proposé diverses notions de surfaces généralisées, au nombre desquelles figurent les *varifolds*. Il se trouve que grâce à leur aptitude à modéliser des objets peu lisses, ces notions produites s'adaptent naturellement aux surfaces discrètes et structures de données actuelles.

1. LISSE OU PAS LISSE ? À VOS LOUPES !

On évitera soigneusement de définir rigoureusement la notion de courbe ou surface *lisse* ici, mais on va illustrer une de leur propriété fondamentale : lorsqu'on zoome dessus, elles sont de plus en plus plates. Commençons par examiner une première courbe qu'on baptise Γ .



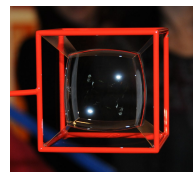
Lorsqu'on zoome autour du point rouge sur Γ , on observe que l'arc obtenu ressemble de plus en plus à une droite : c'est une propriété des courbes lisses. Cette propriété évoquera sans doute la notion de tangente à certains, et pour cause, si on imagine qu'on peut trouver une fonction f dérivable dont la courbe représentative \mathcal{C}_f coïncide avec Γ au moins près du point rouge, alors la droite sur laquelle s'aplatit Γ n'est autre que la tangente à \mathcal{C}_f en ce point. Il existe des courbes ne possédant pas cette propriété, on peut penser à un carré et zoomer en chacun de ses 4 sommets sans jamais voir une droite au lieu d'un coin. Et on peut faire pire, on a beau zoomer autour du point rouge (ou d'un autre point !), la côte bretonne ne ressemble pas plus à une droite.



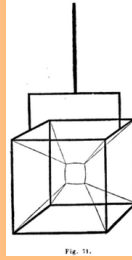
Si maintenant on considérait une surface lisse et non une courbe, on observerait en zoomant que la surface s'aplatit autour d'un plan. Revenons à notre amas de bulles de savons, si on zoome autour d'un point, que se passe-t-il ? On dirait bien que ça dépend du point choisi ! Le physicien belge J. Plateau a étudié ce problème

2. LES EXPÉRIENCES DE J. PLATEAU

Dans les années 1850, le physicien belge J. Plateau réalise de très nombreuses expériences afin de comprendre la structure des bulles et films de savon qu'il appelle *systèmes laminaires*. Il réalise ainsi un grand nombre d'assemblages de bulles de savon et étudie leurs propriétés et plus précisément la façon dont elles s'agencent dans l'espace. Il enrichit ses travaux d'un second type d'expériences en plongeant dans de l'eau savonneuse des structures qu'il appelle *charpentes*, constituées de fils métalliques formant les arêtes d'un polyèdre (voir la figure ci-contre [5]). Il consigne minutieusement les différentes expériences réalisées et en se fondant sur ces constatations, les lois suivantes :



Lois de Plateau [1] .— “à une même arête liquide aboutissent trois lames, et (que) les arêtes liquides aboutissant à un même point sont toujours au nombre de quatre [...] il résulte de l'égalité des tensions que les trois lames unies par une arête liquide font nécessairement entre elles, à cette arête, des angles égaux, et que, par suite, les quatre arêtes concourant en un même point liquide font aussi entre elles, à ce point, des angles égaux.”



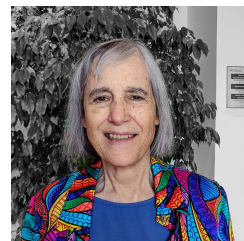
On pourrait reformuler l'observation de J. Plateau comme suit, si on zoome autour d'un point sur un film de savon, on observera que la surface ressemble de plus en plus à l'une des trois configurations suivantes : un plan, trois plans se rencontrant à 120° ou quatre arêtes (et donc 6 plans) se rencontrant avec un angle de $109,47^\circ$ entre deux arêtes. La figure suivante résume ces configurations.



J. Plateau tente d'expliquer ces résultats expérimentaux en modélisant les films de savons comme des surfaces minimisant leur aire, ce à quoi il faudrait ajouter une contrainte de volume enclos concernant les bulles de savon ou encore traduire que le film de savon s'appuie sur la charpente dans le deuxième type d'expériences. Le physicien est cependant perplexe :

“La tension constituant un effort incessant pour diminuer l'étendue des surfaces liquides, il s'ensuit que, dans tout système laminaire, la somme des aires des lames doit être un minimum. [...] Lorsque j'ai posé ce principe, en 1861, au début de ma 6ème série, je comprenais qu'il existe une dépendance nécessaire entre ce même principe et les lois que j'avais trouvées [...] mais je ne pouvais saisir cette dépendance et il me paraissait impossible de la découvrir.”

Comme expliqué dans la suite du mémoire, une solution partielle est proposée par le mathématicien E. Lamarle en 1865 [2] mais il faudra attendre encore un siècle avant que la mathématicienne J. Taylor ne publie en 1976 [3] la démonstration que les lois de Plateau se déduisent à partir du principe d'aire minimale, et ce à l'aide d'outils complexes issus de la théorie géométrique de la mesure.



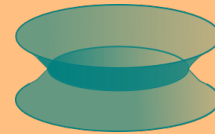
J. Taylor, 2019.
[6]

3. ET LES VARIFOLDS DANS TOUT ÇA ?

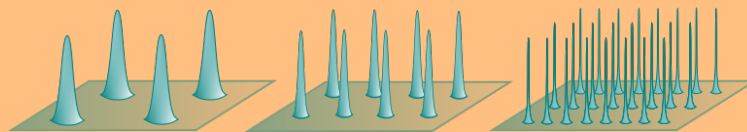
Comme l'a observé J. Plateau, les films de savons ne sont pas des surfaces lisses en général. Rappelez-vous, quand on zoome autour d'un point, le film de savon ne ressemble pas toujours à un plan. Et ce n'est pas la seule raison qui motive la généralisation de la notion de surface : un autre problème est que les surfaces lisses ne résistent pas très bien au passage à la limite. Le concept de *varifold entier* introduit dans les années 60 par F. Almgren et approfondi notamment par W. Allard généralise la notion de surface en autorisant entre autres les fusions et jonctions de portions lisses : les films de savons pourront être modélisés par des varifolds. De plus, un théorème fondamental de "compacité" des varifolds entiers permet de s'assurer que ces derniers ne dégèrent pas quand on essaie d'en prendre une limite.

Des surfaces qui dégèrent ... On peut facilement créer des suites de surfaces lisses qui dégèrent et ne sont plus très lisses à la limite.

Un premier exemple consiste à faire se rapprocher deux portions de surfaces de telle sorte qu'à la limite elles fusionnent. L'objet obtenu n'est pas une surface lisse, et cependant, c'est un objet géométrique encore raisonnable qui



est bien un varifold entier. On peut malheureusement faire bien pire ! On peut petit à petit faire pousser des tentacules de plus en plus fins et de plus en plus nombreux sur un plan tout en s'assurant que leur aire cumulée tende vers 0, ce qui produit un objet bien épineux !



Une propriété importante des varifolds est qu'ils ne voient pas les morceaux qui seraient d'aire nulle : les tentacules de notre deuxième exemple ne seront pas visibles à la limite en tant que varifolds car justement leur aire tend vers 0.

Les varifolds ont notamment permis de montrer des résultats d'existence de surfaces *minimales* (d'aire minimale) dans un cadre plus général que notre espace tridimensionnel.

Définir rigoureusement la notion de *varifold entier* en toute généralité dépasse largement notre cadre informel. On va toutefois essayer de donner un avant goût de *varifold* dans le cas discret.

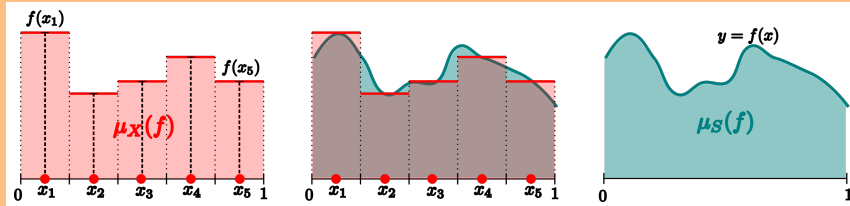
4. VARIFOLDS ET STRUCTURES DISCRÈTES

Comme on l’a annoncé, la notion de varifold est suffisamment générale pour pouvoir modéliser les singularités qui apparaissent dans les films de savon, mais aussi la plupart des structures discrètes de surfaces. Et leur définition apparaît même plus facile à appréhender dans ce cadre.

Un premier pas vers les varifolds. Imaginons qu’on numérise le segment $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ en retenant un nombre fini de points $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ régulièrement espacés dans ce segment. On peut définir à partir de l’ensemble $X \subset \mathbb{R}$ un objet mathématique a priori plus compliqué, appelons-le μ_X , qui à une fonction f continue et positive sur \mathbb{R} associe

$$\mu_X(f) = \frac{1}{5} (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)) .$$

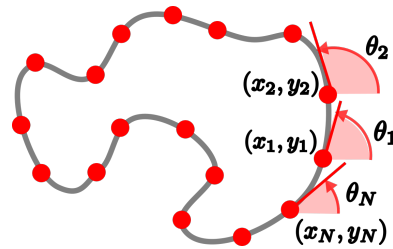
Cette somme peut-être interprétée comme une somme de rectangles de largeur $\frac{1}{5}$ et de hauteurs respectives $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_5)$ qui est proche de l’aire sous la courbe représentative \mathcal{C}_f de f sur $S = [0, 1]$. Si on définissait $\mu_S(f)$ comme étant cette aire sous \mathcal{C}_f , on aurait $\mu_X(f) \simeq \mu_S(f)$.



En d’autres termes, on peut lire la proximité entre le segment S et sa version discrète X “simplement” en calculant $\mu_X(f) - \mu_S(f)$ (pour des fonctions f à choisir).

Considérons l’objet discret suivant : on numérise une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ en retenant un nombre fini N de points $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$ de la courbe. Et pour avoir un varifold, il nous faut ajouter un ingrédient à la recette : un peu de géométrie.

Essayons d’être plus précis, en numérisant Γ , on va non seulement retenir N points, mais en plus, en chacun de ces N points, on va retenir la droite “tangente” : rappelez-vous, la droite sur laquelle la courbe s’aplatit quand on zoome. Pour cela, on appellera $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ l’angle que fait la droite tangente avec l’axe horizontal en chacun des points.



On retiendra finalement

$$X = \{(x_1, y_1, \theta_1), (x_2, y_2, \theta_2), \dots, (x_N, y_N, \theta_N)\} \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[$$

Le varifold V_X qu'on va associer à la discrétisation de Γ encode X , il retient ainsi de façon couplée la localisation de la courbe à travers les points sélectionnés et les directions des droites tangentes à travers les angles associés. Mathématiquement, V_X est un objet à première vue compliqué, c'est une application qui prend en argument une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ et qui est à valeurs dans \mathbb{R} :

$$V_X : \{\text{fonctions continues sur } \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[\} \rightarrow \mathbb{R} .$$

L'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ qui est un élément des parties de \mathbb{R} , souvent noté $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, paraît plus simple que le type de V_X décrit au-dessus. L'ensemble des varifolds forme un espace a priori plus complexe que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et cependant équipé de meilleurs outils pour le mathématicien analyste qui le préférera souvent ! Cette idée d'étudier un objet par voie détournée en regardant comment il interagit avec un autre ensemble, de fonctions par exemple ici, est très utilisé et très fécond en mathématiques.

Mon premier varifold ! Laissons-nous guider par la situation précédente et définissons notre premier varifold V_X qui encode points et angles de X : à une fonction $f : \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, V_X associe

$$V_X(f) = \frac{1}{N} (f(x_1, y_1, \theta_1) + f(x_2, y_2, \theta_2) + \dots + f(x_N, y_N, \theta_N)) .$$

On pourrait également construire un varifold à partir d'un ensemble de points discrétisant une surface, et on pourrait même imaginer construire des varifolds à partir d'ensembles de points en dimension plus élevée. Une fois qu'on a construit un varifold V_X , on peut accéder aux informations géométriques contenues dans la structure en choisissant des fonctions f en lesquelles évaluer V_X . Par exemple, on peut de cette façon calculer les "courbures" : essayer de repérer les parties de l'objet très pliées ou inversement les portions plus planes. On peut également comparer les numérisations X et \tilde{X} de deux courbes distinctes en calculant $V_X(f) - V_{\tilde{X}}(f)$ pour des fonctions f bien choisies : cela peut ensuite être utilisé pour déformer un objet en un autre. On peut enfin utiliser ces varifolds discrets pour étudier les films de savon numériquement, bouclant ainsi la boucle !



REFERENCES

- [1] *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, J. Plateau, 1873, Gauthier-Villars.
- [2] *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces.*, E. Lamarle, 1865.
- [3] *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, J. Taylor, Annals of Maths, 1976.

Crédits Images.— *les images* [4], [5], [6] *proviennent de Wikimedia Commons sous licence CC BY-SA.* Il faut ajouter les noms Joseolgon pour [5] et C. Boban pour [6] au niveau des images.

- [4] @ D. Rabich, 2020.
- [5] @ Joseolgon, 2011.
- [6] @ C. Boban, 2019.