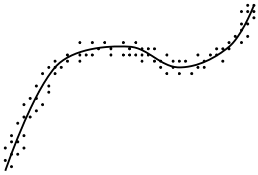
Approximation de surfaces par des varifolds discrets : représentation, courbure, rectifiabilité

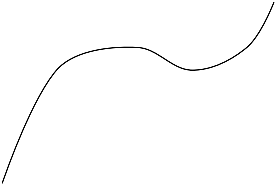
Blanche Buet
encadrée par
Gian Paolo Leonardi et Simon Masnou

Institut Camille Jordan

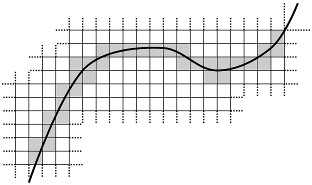
12 décembre 2014



(a) Nuage de points



(b) Courbe régulière



(c) Approximation volumétrique

On cherche un cadre commun pour étudier une surface et ses différentes discrétisations

$\rightarrow$ les varifolds

Pourquoi se placer dans l'espace des varifolds ?

- Les varifolds : un espace contenant à la fois
  - des objets reguliers (surfaces, sous-variétés, ensembles rectifiables),
  - des objets discrets (triangulations, approximations volumiques, nuages de points).
- On peut définir une courbure généralisée d'un varifold qui coïncide avec la courbure moyenne classique pour des objets de classe C^2.
- Lien entre contrôle de la courbure généralisée et rectifiabilité.
- Propriétés de compacité.

- F. Almgren, *The theory of varifolds* (1965)
- W. K. Allard, *The first variation of a varifold* (1972)

Plan

Définition

Un d–varifold sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure de Radon V sur $\mathbb{R}^n \times G_{d,n}$ avec

$$G_{d,n} = \{d\text{–sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^n\}$$

Un varifold est une mesure donnant

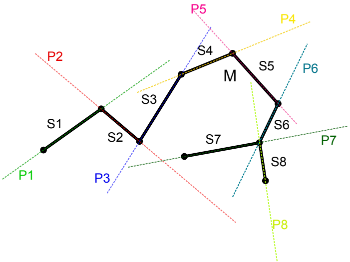
- information de position et masse : mesure sur $\mathbb{R}^n$.
- information de plan tangent : mesure sur la Grassmannienne $G_{d,n}$

Exemple

À une droite $D \subset \mathbb{R}^n$ de direction $\overrightarrow{D} \in G_{1,n}$ on associe le 1–varifold

$$V = \mathcal{H}^1_{|D} \otimes \delta_{\overrightarrow{D}}$$

Varifold associé à une ligne ligne brisée



Exemple

Le 1–varifold naturellement associé à cette ligne brisée :

$$V = \sum_{i=1}^{8} \underbrace{\mathcal{H}^1_{|S_i}}_{\mathbb{R}^2} \otimes \underbrace{\delta_{P_i}}_{G_{1,2}} .$$

$\|V\| = \sum_{i=1}^{8} \mathcal{H}^1_{|S_i}$.

Définition (Mesure masse d'un varifold)

La masse d'un d–varifold V est la mesure de Radon positive $\|V\|$ retenant uniquement l'information spatiale définie par

$$\|V\|(A) = V(A \times G_{d,n}) \text{ pour tout borélien } A \subset \mathbb{R}^n.$$

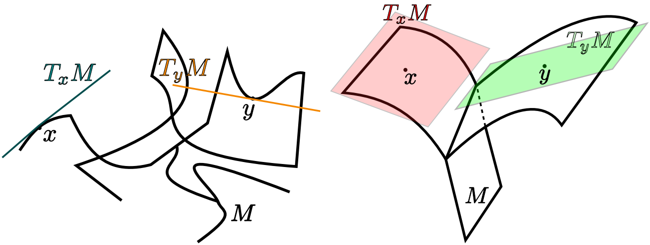
Varifold associé à une surface

- $M \subset \mathbb{R}^3$ surface.
- Le varifold naturellement associé à M est la mesure $v(M) = \mathcal{H}^2_{|M} \otimes \delta_{T_x M}$ i.e. pour tout $\varphi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{G}_{2,3})$,

$$\int \varphi(x,S)\, dv(M)(x,S) = \int_M \int_{G_{2,3}} \varphi(x,S)\, d\delta_{T_x M}(S)\, d\mathcal{H}^2(x)$$
$$= \int_M \varphi(x, T_x M)\, d\mathcal{H}^2(x)\,.$$

$$\|V\| = \mathcal{H}^2_{|M}$$

Varifold d–rectifiable : varifold associé à un ensemble d–rectifiable



Définition (Varifold rectifiable)

- $M \subset \mathbb{R}^n$ *ensemble d–rectifiable*,
- $\theta : M \to \mathbb{R}_+ \in \mathrm{L}^1_{loc}(M)$ *multiplicité*.

Le varifold $v(M,\theta)$ est la mesure de Radon

$$v(M,\theta) = \theta \mathcal{H}^d_{|M} \otimes \delta_{T_x M} \text{ et } \|V\| = \theta\, \mathcal{H}^d_{|M} \,.$$

Exemples de varifolds discrets : nuages de points

- courants : cycles normaux (Morvan,Cohen-Steiner,2006)(Chazal,Cohen-Steiner,Lieutier,Thibert,2009)
- varifolds (Charon,Trouvé)

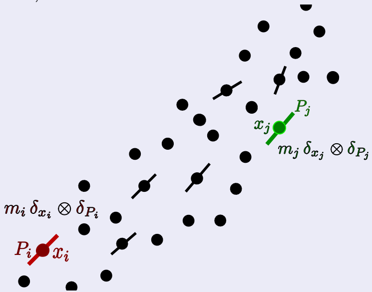
Définition (Varifold nuage de points)

Soit $\{x_i\}_{i=1\ldots N} \subset \mathbb{R}^n$ un nuage de points, pondéré par les masses $\{m_i\}_{i=1\ldots N}$ et muni des directions $\{P_i\}_{i=1\ldots N} \subset G_{d,n}$. On associe à ce nuage de points le d−varifold sur $\mathbb{R}^n \times G_{d,n}$:

$$V = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \delta_{x_i} \otimes \delta_{P_i} \ ,$$

de sorte que $\varphi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^n \times \mathrm{G_{d,n}})$,

$$\int \varphi \, dV = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \varphi(x_i, P_i) \ .$$



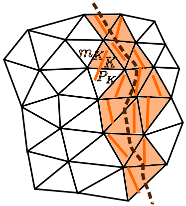
Varifolds volumiques discrets

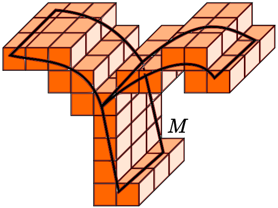
Définition (Varifolds volumiques discrets)

Soit $\mathcal{K}$ un maillage de $\mathbb{R}^n$ et une famille $\{m_K, P_K\}_{K\in\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}_+ \times G_{d,n}$. On peut construire le d–varifold volumique discret associé :

$$V_{\mathcal{K}} = \sum_{K\in\mathcal{K}} m_K \frac{\mathcal{L}^n_{|K}}{|K|} \otimes \delta_{P_K} \text{ with } |K| = \mathcal{L}^n(K)\,.$$

Ce d–varifold n'est pas rectifiable : son support est n–rectifiable mais pas d–rectifiable.





Approximation des varifolds rectifiables par des varifolds discrets

Question

Est-ce que les varifolds rectifiables sont bien approchés par les varifolds volumiques discrets ? en quel sens ? est-il possible de quantifier l'erreur d'approximation ?

- en quel sens ? : convergence naturelle dans l'espace des varifolds : convergence faible–$*$, une suite de varifolds $V_i \xrightarrow[i\to\infty]{*} V$ si pour tout $\varphi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^n \times \mathrm{G_{d,n}})$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} \varphi \, dV_i \to \int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} \varphi \, dV \, .$$

- quantifier ? : mesurer l'erreur d'approximation, on veut une distance adaptée dans l'espace des varifolds.

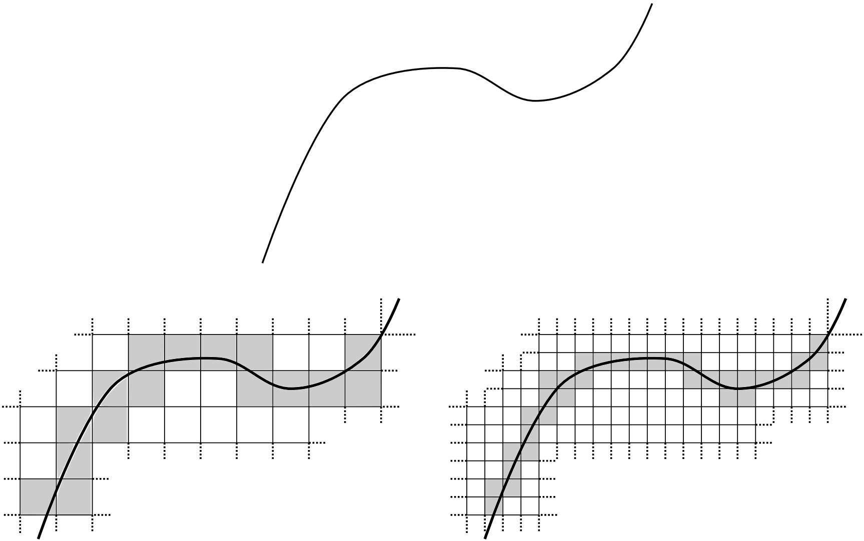
Approximation par des varifolds volumiques discrets

Question

On fixe une famille de maillages $(\mathcal{K}_i)_i$ dont le pas

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_i} \mathrm{diam} K = \delta_i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

peut-on approcher tout varifold rectifiable par une suite de varifolds volumiques discrets $(V_i)_i$ associés aux maillages donnés $(\mathcal{K}_i)_i$?



Définition d'un varifold volumique discret par projection sur un maillages $\mathcal{K}$

Soit $V = v(M,\theta) = \theta \mathcal{H}^d_{|M} \otimes \delta_{T_x M}$ un d–varifold rectifiable dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{K}$ un maillage de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$V_{\mathcal{K}} = \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{m_K}{|K|} \mathcal{L}^n \otimes \delta_{P_K} \, ,$$

avec

$$m_K = \int_{K \cap M} \theta \, d\mathcal{H}^d \text{ et } P_K \in \operatorname*{arg\,min}_{P \in G_{d,n}} \int_{K \cap M} \| P - T_x M \| \, \theta(x) \, d\mathcal{H}^d(x) \, .$$

Théorème (B., Approximation par des varifolds volumiques discrets)

Si V est un d–varifold rectifiable et $(\mathcal{K}_i)_i$ une famille de maillages dont le pas tend vers 0, alors

$$V_{\mathcal{K}_i} \xrightarrow[i \to +\infty]{*} V \text{ dans } \mathbb{R}^n \, .$$

Version quantitative

Si le varifold rectifiable $V = \theta \mathcal{H}^d_{|M} \otimes \delta_{T_x M}$ vérifie de plus : il existe $0 < \beta < 1$ et $C > 0$ tels que pour $\mathcal{H}^d$–presque tout x, $y \in M$,

$$\| T_x M - T_y M \| \leq C |x - y|^\beta \, ,$$

alors,

Théorème (B., Convergence en termes de “flat distance”)

pour une famille de maillages $(\mathcal{K}_i)_i$ de pas $\delta_i \to 0$ et pour $V_{\mathcal{K}_i}$ les projections de V sur $\mathcal{K}_i$,

$$\Delta^{1,1}(V, V_{\mathcal{K}_i}) \leq \left(\delta_i + 2C\delta_i^\beta \right) \|V\|(\mathbb{R}^n) \, ,$$

où $\Delta^{1,1}$ désigne la flat distance aussi appelée bounded Lipschitz distance :

$$\Delta^{1,1}(V, W) = \sup \left\{ \left| \int \varphi \, dV - \int \varphi \, dW \right| \; : \; \varphi \in \mathrm{Lip}_1, \; \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} .$$

Et inversement ?

Question

Comment assurer qu'un varifold, obtenu comme limite de varifolds discrets (et donc a priori non rectifiables), soit rectifiable ?

Théorème d'Allard :
contrôle uniforme des variations premières + contrôle de la densité inférieure $\longrightarrow$ rectifiabilité

Plan

Théorème de la divergence

Théorème

$M \subset \mathbb{R}^n$ sous-variété C^2 de dimension d et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour tout $X \in \mathrm{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_{M\cap\Omega} \mathrm{div}_M X \, d\mathcal{H}^d = -\int_{M\cap\Omega} < X, \vec{H} > \, d\mathcal{H}^d$$

C'est en fait une façon de définir le vecteur courbure moyenne $\vec{H}$ dans une classe plus générale que les sous-variétés : dans l'ensemble des varifolds.

Courbure d'un varifold

Définition (Variation première)

On appelle variation première d'un d–varifold V la forme linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^\mathrm{n}, \mathbb{R}^\mathrm{n}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} \mathrm{div}_S X(x)\, dV(x, S)\,. \end{array}$$

Si $V = V(\text{sous-variété } M)$, $\delta V = -H\,\mathcal{H}^d_{|M}$ et H est la courbure moyenne au sens classique. Que peut-on dire dans le cas général ? C'est seulement une distribution d'ordre 1, pas une mesure de Radon.

Variation première bornée

Définition

S'il existe $C > 0$ telle que pour tout $X \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$,

$$|\delta V(X)| \leq C \|X\|_\infty \ ,$$

alors δV s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathrm{C}^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ et on dit que V est à variation première bornée.

EXEMPLES de varifolds à variation première non bornée :

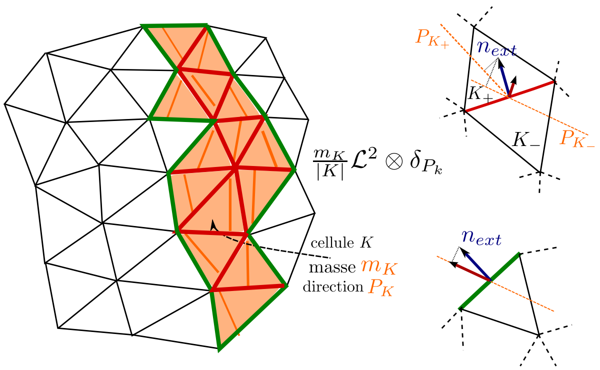
- Nuage de points $\displaystyle\sum_i m_i \delta_{x_i} \otimes \delta_{P_i}$,
- Varifold spatialement supporté par une droite D, $V = \mathcal{H}^1_{|D} \otimes \delta_P$ où la direction P est constante non parallèle à D.

Que peut-on dire lorsque la variation première est bornée ?

- Par le théorème de Riesz, δV s'identifie à une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$.
- Par le théorème de Radon-Nikodym, décomposition en une courbure absolument continue devant la masse $\|V\|$ et une courbure singulière :

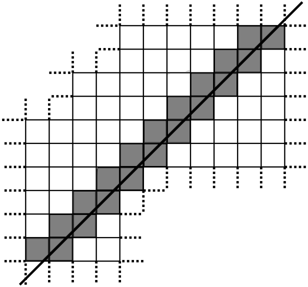
$$\delta V = -H \|V\| + (\delta V)_s \, .$$

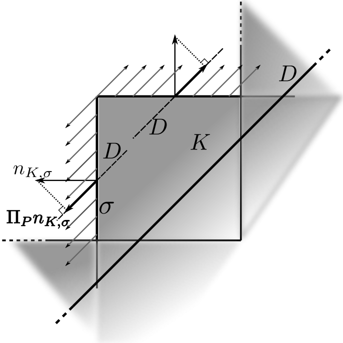
Courbure d'un varifold volumique discret



$$\delta V = - \sum_{T \text{ arête du maillage}} \left[\frac{m_{K_+}}{|K_+|} \Pi_{P_{K_+}} - \frac{m_{K_-}}{|K_-|} \Pi_{P_{K_-}} \right] (n_{ext})\, d\mathcal{H}^{n-1}_{|T} \, .$$

Variation de masse $\longrightarrow$ création de courbure.





Si on considère les varifolds volumiques discrets $V_{\mathcal{K}_i}$ obtenus par projection de $V = \mathcal{H}^1_{|D} \otimes \delta_D$ sur les maillages $\mathcal{K}_i$ dont le pas δ_i tend vers 0,

$$|\delta V_{\mathcal{K}_i}|(\mathbb{R}^n) \geq \frac{C}{\delta_i} \|V\|(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty \, .$$

Pourtant $\delta V = 0$.

Création d'un bord artificiel non parallèle à la direction tangente D.

Plan

Les varifolds discrets (volumiques et nuages de points) ne sont pas d–rectifiables et la variation première n'est pas adaptée.

Question

Comment assurer qu'un varifold, obtenu comme limite de varifolds a priori non rectifiables, soit rectifiable ?

Formulation quantitative de la rectifiabilité.

Nombres β de Jones

- P.W. Jones, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, 1990
- G. David et S. Semmes, *Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings*, 1993
- H. Pajot, *Conditions quantitatives de rectifiabilité*, 1997

Théorème (H. Pajot, 1997)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ compact avec $\mathcal{H}^d(E) < +\infty$. On suppose qu'en $\mathcal{H}^d$–presque tout point $x \in E$, on a les propriétés suivantes :

1. $\theta_*^d(x, E) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^d(E \cap B_r(x))}{r^d} > 0$,
2. $\displaystyle\int_0^1 \beta_2(x, r, E)^2 \frac{dr}{r} < +\infty$ *où*

$$\beta_2(x, r, E) = \inf_{P \; d\text{–}plan \; affine} \left(\frac{1}{r^d} \int_{E \cap B_r(x)} \left(\frac{d(y, P)}{r} \right)^2 d\mathcal{H}^d(y) \right)^{1/2} .$$

Alors, E est d–rectifiable.

Théorème (B.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et V un d–varifold sur Ω de masse finie $\|V\|(\Omega) < +\infty$. Supposons que

(i) *il existe $0 < C_1 < C_2$ tels que, pour $\|V\|$–presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $r > 0$,*

$$C_1 r^d \leq \|V\|(B_r(x)) \leq C_2 r^d \, , \tag{1}$$

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega \times G_{d,n}} E_0(x, P, V) \, dV(x, P) < +\infty$, *où*

$$E_0(x, P, V) = \int_{r=0}^{1} \frac{1}{r^d} \int_{y \in B_r(x) \cap \Omega} \left(\frac{d(y - x, P)}{r} \right)^2 d\|V\|(y) \, \frac{dr}{r} \, .$$

Alors V est un d–varifold rectifiable.

Lien entre la version ensemble et la version varifold

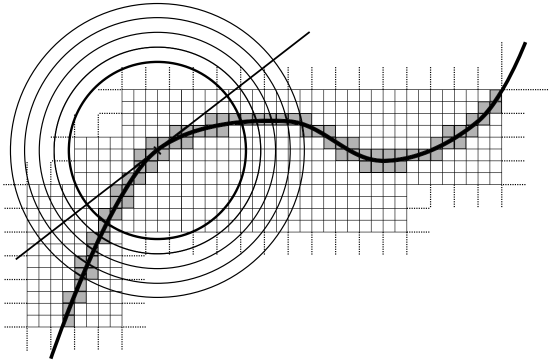
Si $V = v(M, \theta)$ est rectifiable à variation première bornée,

$$E_0(x, P, V) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad P = T_x M \, .$$

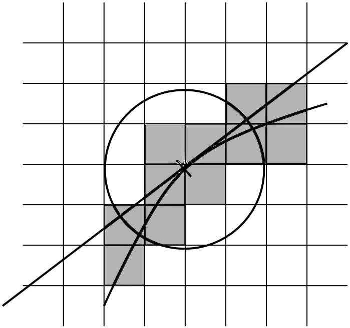
- $\Rightarrow$: définition du plan tangent approché par *blow up*,
- $\Leftarrow$: contrôle du *height excess* de Brakke.

Échelle de discrétisation

Dans une boule de rayon trop petit, la masse n'est pas concentrée sur un plan mais uniformément répartie.
$\rightarrow$ rayon minimal α.



(a)



(b)

Rectifiabilité d'une limite de varifolds

Théorème (B.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $(V_i)_i$ une suite de d–varifolds sur Ω qui converge faiblement–$*$ vers un d–varifold V de masse finie $\|V\|(\Omega) < +\infty$. Soit $(\alpha_i)_i$ et $(\beta_i)_i$ deux suites positives décroissantes tendant vers 0. On suppose :

(i) *il existe $0 < C_1 < C_2$ tels que pour $\|V_i\|$–presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\beta_i < r < d(x, \Omega^c)$,*

$$C_1 r^d \leq \|V_i\|(B_r(x)) \leq C_2 r^d \,,$$

(ii) $\displaystyle \sup_i \int_{\Omega \times G_{d,n}} E_{\alpha_i}(x, P, V_i)\, dV_i(x, P) < +\infty$, *avec*

$$E_{\alpha_i}(x, P, W) = \int_{r=\alpha_i}^{1} \frac{1}{r^d} \int_{y \in B_r(x) \cap \Omega} \left(\frac{d(y-x, P)}{r} \right)^2 d\|W\|(y) \, \frac{dr}{r}$$

Alors V est un d–varifold rectifiable.

Point clé

Lien entre $E_0(x,P,V)$ et $E_{\alpha_i}(x,P,V_i)$ puis intégrer contre resp. V et V_i : problème du type $f_i\, d\mu_i \xrightarrow[i\to\infty]{?} f\, d\mu$,
$\to$ il faut gagner en uniformité sur la convergence
On définit pour $\omega \subset\subset \Omega$ un distance

$$\Delta_\omega(V,V_i) = \sup \left\{ \int_{r=0}^{1} \left| \int_{B_r(x)\cap\omega} \varphi\, d\|V_i\| - \int_{B_r(x)\cap\omega} \varphi\, d\|V\| \right| dr \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \in \mathrm{Lip}_{2(\mathrm{diam}\omega)}(\omega), \\ \|\varphi\|_\infty \leq (\mathrm{diam}\omega)^2 \\ x \in \overline{\omega} \end{array} \right\} . \rightsquigarrow \varphi = d(y-x,P)^2$$

- Si $V_i \xrightarrow[i\to\infty]{*} V$ alors $\Delta_\omega(V,V_i) \to 0$.
- Si $(V_i)_i$ est la suite de varifolds volumiques discrets donnés par le théorème d'approximation, alors $\Delta_\omega(V,V_i) = O(\delta_i^\beta)$.

Le cas des varifolds discrets

- V un d–varifold rectifiable vérifiant les hypothèses du théorème d'approximation par des varifolds volumiques discrets,
- $(\mathcal{K}_i)$ suite de maillages de pas $\delta_i \to 0$,
- $V_i \xrightharpoonup[i\to\infty]{*} V$ la suite de varifolds volumiques discrets donnés par le théorème d'approximation.

Théorème (B.)

Pour toute suite d'échelles α_i vérifiant

$$\frac{\delta_i^\beta}{\alpha_i^{d+3}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \, ,$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} E_0(x,P,V)\, dV(x,P) = \lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} E_{\alpha_i}(x,P,V_i)\, dV_i(x,P) \, .$$

Plan

Question

Comment assurer qu'un varifold, obtenu comme limite de varifolds quelconques, a priori à variation première non bornée (varifolds associés à des nuages de points par exemple), soit à variation première bornée ?

IDÉE :

Théorème (G.P. Leonardi-S. Masnou)

Si $V = v(M, \theta)$ est un d–varifold rectifiable à variation première bornée, alors pour $x \in M$ et pour presque tout $r > 0$,

$$\delta V(B_r(x)) = \int_{\partial B_r(x) \cap M} \eta(y)\theta(y)\, d\mathcal{H}^{d-1}(y)\,.$$

Sous forme intégrée :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=0}^{\varepsilon} \delta V(B_r(x))\, dr = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)\times G_{d,n}} \frac{\Pi_S(y-x)}{|y-x|}\, dV(y,S)}_{\text{bien défini pour un varifold quelconque}}\,.$$

Méthode de Carathéodory

On veut reconstruire une mesure μ à partir de valeurs approchées sur l'ensemble des boules fermées $\mathcal{C}$ données par $q(\emptyset) = 0$ et

$$\begin{array}{rccl} q & : & \mathcal{C} & \rightarrow & [0, +\infty] \\ & & B_r(x) & \mapsto & \frac{1}{r} \int_{s=0}^{r} \mu(B_s(x))\, ds \, . \end{array}$$

Méthode de Carathéodory métrique (construction de la mesure de Hausdorff)

- pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, on définit pour $\delta > 0$,

$$\nu_\delta^q(E) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} q(B_i) \,\middle|\, E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i, \forall i, \ \mathrm{diam B_i} \leq \delta \right\} ,$$

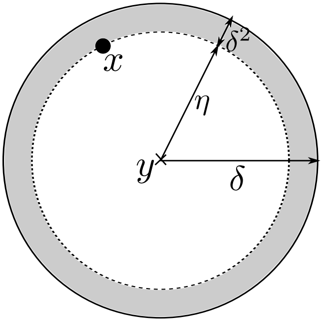
- puis

$$\nu^{q,*}(E) = \lim_{\delta \to 0} \nu_\delta^q(E) \, .$$

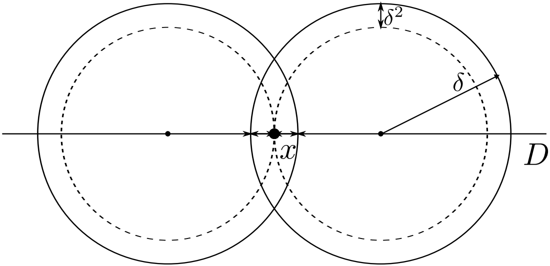
- La restriction de $\nu^{q,*}$ aux boréliens définit une mesure borélienne positive ν^q.

inf sur des recouvrements de plus en plus fins.

La méthode de Carathéodory n'est pas adaptée



(a) Recouvrement par une boule décentrée



(b) Recouvrement avec des boules centrées sur le support de la mesure

Avec $\mu = \delta_x$,

$$q(B_\delta(y)) = \frac{1}{\delta} \int_{s=\delta-\delta^2}^{\delta} \delta_x(B_s(y))\, ds = \delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\,.$$

Une construction par *packing*

Proche de la définition de *Packing measure* introduite par S.J. Taylor et C. Tricot dans *Packing measure, and its evaluation for a Brownian path* (1985).

Construction par "packing" : on optimise le placement des boules.

- Pour $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $\delta > 0$, un *packing* de U d'ordre δ est une union dénombrable disjointe de boules fermées de diamètre inférieur ou égal à δ incluses dans U.
- On définit

$$\hat{\mu}_\delta^q(U) := \sup \left\{ \sum_{B \in \mathcal{F}} q(B) \, : \, \mathcal{F} \text{ est un packing d'ordre } \delta \text{ de } U \right\} .$$

- Et comme dans la méthode de Carathéodory,

$$\hat{\mu}^q(U) = \lim_{\delta \to 0} \hat{\mu}_q^\delta(U) = \inf_{\delta > 0} \hat{\mu}_q^\delta(U) .$$

- On définit ensuite $\hat{\mu}^q$ sur tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\hat{\mu}^q(A) = \inf \left\{ \hat{\mu}^q(U) \, : \, U \text{ ouvert}, \, A \subset U \right\} .$$

Point clé

On veut construire une mesure $\hat{\mu}^q$ équivalente à μ.

- $\hat{\mu}^q$ sous-additive : pas vrai pour une prémesure q quelconque.
- $q \leq \mu$ sur les boules $\Rightarrow \hat{\mu}^q \leq \mu$.
- $\mu \leq C\hat{\mu}^q$?

$$q(B_r(x)) = \frac{1}{r}\int_{s=0}^{r} \mu(B_s(x))\, ds \geq \frac{1}{2}\mu\left(B_{\frac{r}{2}}(x)\right).$$

Appliquer Besicovitch en sélectionnant les boules pour lesquelles la mesure est doublante : $\mu(B) \geq C\mu(2B)$. On veut $0 < C < 1$ tel que pour μ–presque tout x,

$$\liminf\{r \mid \mu(B_r(x)) \geq C\mu(B_{2r}(x))\} = 0$$

- Comparer μ à la mesure de Lebesgue qui est doublante :

$$f(r) = \frac{\mu(B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \, .$$

- ou bien x tel que

$$\liminf_r f(r) > 0 \;\Rightarrow\; \limsup_r \frac{f(r)}{f(2r)} \geq 1 \;\Rightarrow\; \limsup_r \frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_{2r}(x)} \geq \frac{1}{2^n} \, ,$$

- ou bien x,

$$\liminf_r f(r) = 0 \text{ et } \mu\left(\left\{x \in \Omega \; : \; \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0\right\}\right) = 0 \, .$$

Reconstruction d'une mesure équivalente dans le cas d'une mesure positive

Théorème (B., Leonardi)

Soit μ une mesure de Borel positive dans $\mathbb{R}^n$. Alors,

1. *$\hat{\mu}^q$ est une mesure métrique extérieure. Vient de la forme particulière de q,*
2. *il existe une constante dimensionnelle $C_n \geq 1$ telle que pour tout borélien $A \subset \Omega$,*

$$\frac{1}{C_n}\mu(A) \leq \hat{\mu}^q(A) \leq \inf\{\mu(U) \mid U \text{ ouvert }, A \subset U\} \, ,$$

3. *si de plus μ est une mesure de Radon, alors μ et $\hat{\mu}^q$ sont équivalentes sur les boréliens : $\dfrac{1}{C_n}\mu \leq \hat{\mu}^q \leq \mu$.*

Plan

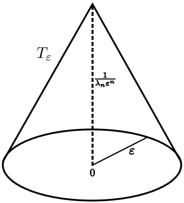
On reconnaît une convolution

On revient à

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=0}^{\varepsilon} \delta V(B_r(x))\, dr = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)\times G_{d,n}} \frac{\Pi_S(y-x)}{|y-x|}\, dV(y,S)}_{\text{bien défini pour un varifold quelconque}} .$$

Régularisation de la variation première : idée initiale

$$\text{Soit } T(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n}(1 - |z|) & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad (2)$$



où λ_n est tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} T = 1$, et on définit l'approximation de l'unité associée $T_\varepsilon(z) = \dfrac{1}{\varepsilon^n} T\left(\dfrac{z}{\varepsilon}\right)$.

Proposition

Soit V un d–varifold sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\delta V * T_\varepsilon(x)$ est bien défini pour $\mathcal{L}^n$–presque tout x et

$$\delta V * T_\varepsilon(x) = \frac{-1}{\lambda_n \varepsilon_n} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x) \times G_{d,n}} \frac{\Pi_S(y - x)}{|y - x|} \, dV(y, S)$$

Variation première et courbure approchées

On fixe un noyau symétrique positif $\rho \in \mathrm{W}^{1,\infty}$ vérifiant

$$\int \rho = 1 \text{ et } \mathrm{supp}\rho \subset B_1(0)\,, \tag{3}$$

ainsi que l'approximation de l'identité associée $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Si V est à variation première bornée, alors

- $$\delta V * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{*} \delta V$$
- Si de plus V est rectifiable et ρ est radial, alors pour $\|V\|$–presque tout x,

$$H_\varepsilon(x) = -\frac{\delta V * \rho_\varepsilon(x)}{\|V\| * \rho_\varepsilon(x)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} H(x) \text{ avec } \delta V = -H\|V\| + \delta V_s\,.$$

Énergies de Willmore approchées

Définition (Énergies de Willmore approchées)

Soit $p \geq 1$ et $\varepsilon > 0$. On définit l'énergie de Willmore approchée (à l'échelle ε) d'un d–varifold V dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{W}_\varepsilon^p(V) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\delta V * \rho_\varepsilon(x)}{\|V\| * \rho_\varepsilon(x)} \right|^p \|V\| * \rho_\varepsilon(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

$$\mathcal{W}_\varepsilon^p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\Gamma} \mathcal{W}^p \quad \text{pour } 1 < p < +\infty$$

$$\mathcal{W}_\varepsilon^1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\Gamma} \text{la variation totale de la variation première} \neq \mathcal{W}^1\,.$$

$$\mathcal{W}^p(V) = \int_\Omega |H|^p \, d\|V\| \text{ avec } \delta V = -H\,\|V\| \text{ et } +\infty \text{ sinon}\,,$$

Pour un noyau ρ explicite, l'expression de $\delta V * \rho_\varepsilon$ est explicite.

Le cas des varifolds discrets

Théorème (B.,Leonardi,Masnou)

- $V = v(M,\theta)$ *un d–varifold rectifiable dans* $\mathbb{R}^n$ *de masse finie* $\|V\|(\mathbb{R}^n) < +\infty$.
- $(\mathcal{K}_i)_i$ *une famille de maillages* $\sup_{K \in \mathcal{K}_i} \mathrm{diam}(K) \leq \delta_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$.
- $(V_{\mathcal{K}_i})_i$ *la suite de varifolds volumiques discrets obtenus par projection sur* $\mathcal{K}_i$.
- $\rho \in \mathrm{W}^{2,\infty}$ *radial.*
- β *comme dans l'hypothèse Hölder du théorème d'approximation.*

Alors pour toute suite $\varepsilon_i \downarrow 0$ *et vérifiant* $\dfrac{\delta_i^\beta}{\varepsilon_i^2} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$ *on a*

$$\mathcal{W}^1_{\varepsilon_i}(V_{\mathcal{K}_i}) \xrightarrow[i \to +\infty]{} |\delta V|(\mathbb{R}^n) \text{ et } -\frac{\delta V_i * \rho_{\varepsilon_i}(x)}{\|V_i\| * \rho_{\varepsilon_i}(x)} \xrightarrow[i \to \infty]{} H(x) .$$

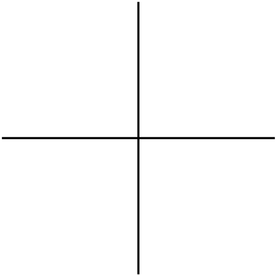
Que représente $\delta V * \rho_\varepsilon$?

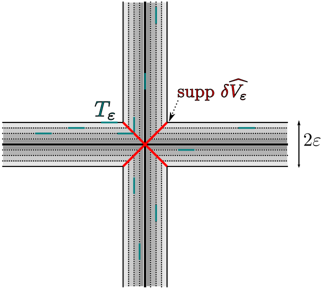
Γ–convergence de $\mathcal{W}_\varepsilon^p$ pour $p > 1$?

$$\mathcal{W}_{\varepsilon_i}^p(V_{\mathcal{K}_i}) \xrightarrow[i\to+\infty]{?} \mathcal{W}^p(V) \quad : .$$

Question

- Soit V un d–varifold, peut-on réécrire la régularisation $\delta V * \rho_\varepsilon$ de la variation première de V comme la variation première $\delta\left(\widehat{V_\varepsilon}\right)$ d'un varifold $\widehat{V_\varepsilon}$?
- Et si oui, est-ce que $\widehat{V_\varepsilon}$ est la régularisation (en un sens à définir) de V ?





On applique le théorème de désintégration à $\widehat{V_\varepsilon}$:

$$\widehat{V_\varepsilon} = (\|V\| * \rho_\varepsilon(x)) \otimes \widehat{\nu_x^\varepsilon} ,$$

en supposant que $\|\widehat{V_\varepsilon}\| = \|V\| * \rho_\varepsilon$ et on cherche à identifier $\widehat{\nu_x^\varepsilon}$.

- n'est pas le plan tangent à l'ensemble de niveau passant par x,
- mais c'est une combinaison convexe de δ_{T_1} et δ_{T_2} où T_1 et T_2 sont les directions des axes de la croix.

Identification de $\widehat{V_\varepsilon}$ dans le cas général

Théorème (B.,Leonardi,Masnou)

On définit $\widehat{V_\varepsilon}$ *par*

$$\left\langle \widehat{V_\varepsilon}, \psi \right\rangle = \langle V, (y,S) \mapsto \psi(\cdot, S) * \rho_\varepsilon(y) \rangle \quad \textit{pour tout } \psi \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^0(\Omega \times \mathrm{G}_{\mathrm{d,n}})\,;$$

Alors,

1. $\|\widehat{V_\varepsilon}\| = \|V\| * \rho_\varepsilon$,
2. $\delta\left(\widehat{V_\varepsilon}\right) = \delta V * \rho_\varepsilon$.

Plan

Calculs de courbures discrètes :

- formule des cotangentes (Pinkall-Polthier,1993),
- variation de l'aire enclose par la surface dans une boule (Coeurjolly-Lachaud-Roussillon,2012),
- formulation à partir des cycles normaux (Morvan,Cohen-Steiner,2006)(Chazal,Cohen-Steiner,Lieutier,Thibert,2009).

Approximation de la courbure moyenne d'un nuage de points

Pour un d–varifold V_N associé à un nuage de points,

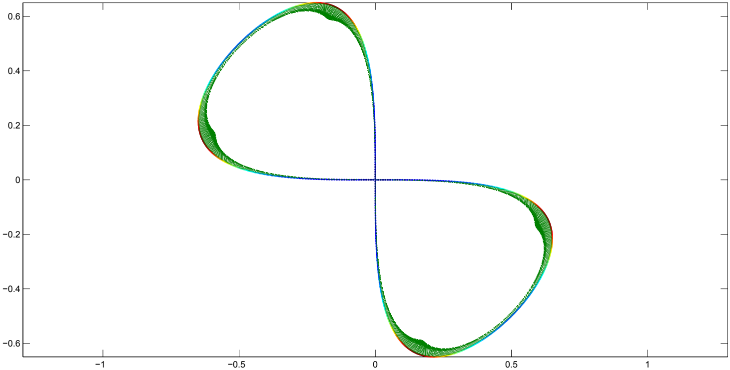
$$V_N = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta_{x_j} \otimes \delta_{P_j} \ ,$$

on définit

$$H_\varepsilon^N(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbb{1}_{\{|x_j - x| < \varepsilon\}} \frac{\Pi_{P_j}(x_j - x)}{|x_j - x|}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{|x_j - x| < \varepsilon\}} m_j |x_j - x|} \ .$$

noyau $\rho(x) = |x|$ si $|x| < 1$ et 0 sinon : noyau qui rend la formule indépendante de ε (sauf pour la taille de la boule $\{|x_j - x| < \varepsilon\}$)

Courbure singulière nulle au niveau d'une singularité



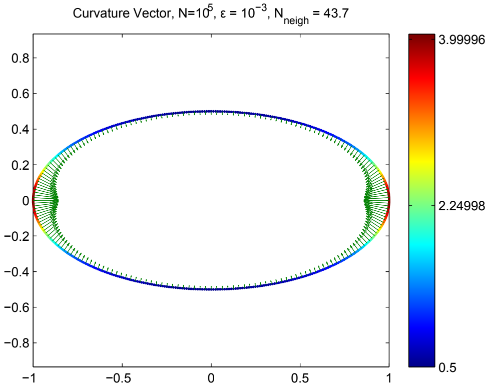
Formule avec projection sur les normales

Formule par compensation de termes d'ordre 1 : $\dfrac{\Pi_{P_j}(x_j - x)}{|x_j - x|}$

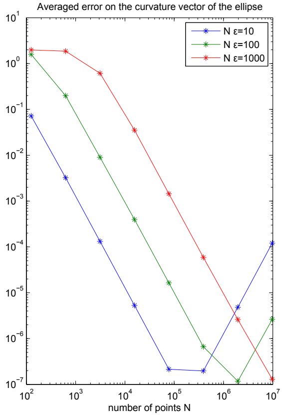
$\rightarrow$ projection sur les normales : compensation de termes d'ordre ε :

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{|x_j - x| < \varepsilon\}} m_j \frac{\Pi_{P_j^\perp}(x_j - x)}{|x_j - x|}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{|x_j - x| < \varepsilon\}} m_j |x_j - x|},$$

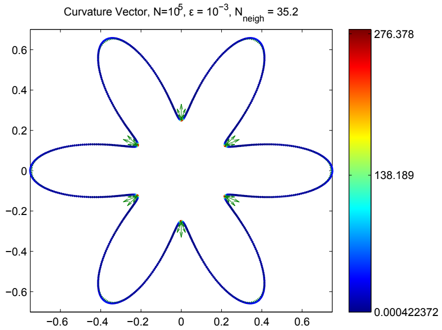
Calculs de courbures de nuages de points $2D$

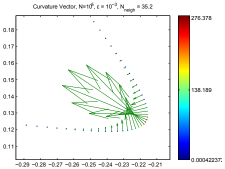


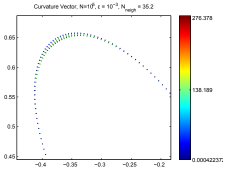
(a)

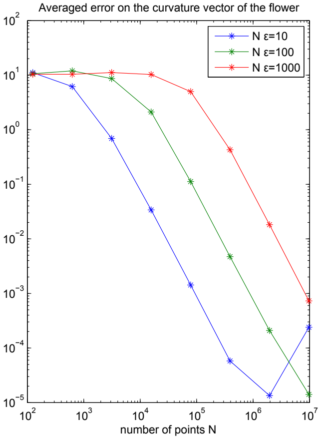


(b)


Curvature Vector, N=10^5, ε = 10^−3, N_neigh = 35.2
276.378
138.189
0.000422372



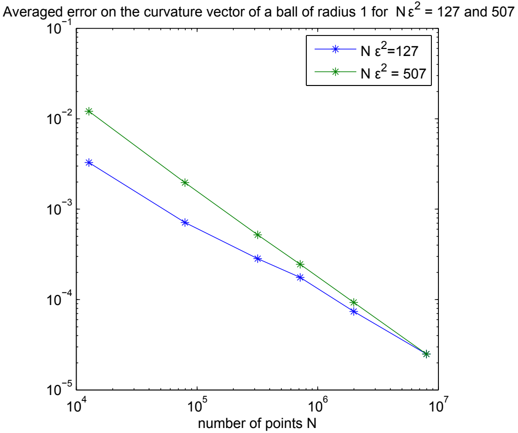



Averaged error on the curvature vector of the flower
N ε=10
N ε=100
N ε=1000
number of points N

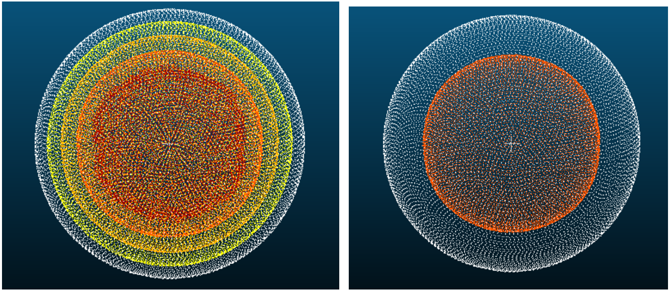
Calculs de la courbure moyenne de nuages de points $3D$

Code C++ utilisant les librairies :

- `nanoflann` pour la recherche des plus proches voisins dans un nuage de points,
- `eigen` pour l'algèbre linéaire nécessaire au calcul des plans tangents



Mouvement par courbure moyenne

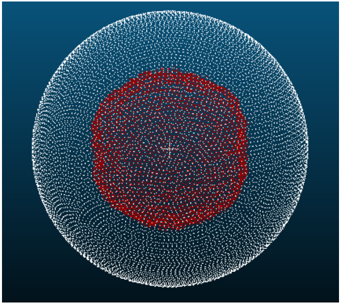


(a) De 0 à 40 itérations (b) Après 30 itérations

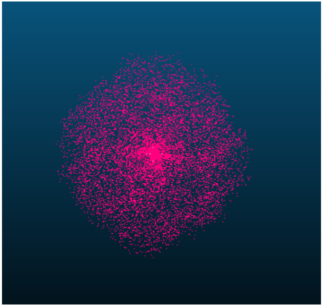
FIGURE: Boule évoluant par le flot par courbure moyenne, *avec un rayon* $\varepsilon = 0.6$ *et un pas de temps* $dt = 0.01$.

Apparition d'instabilités

Schéma explicite en temps.



(a) Après 40 itérations

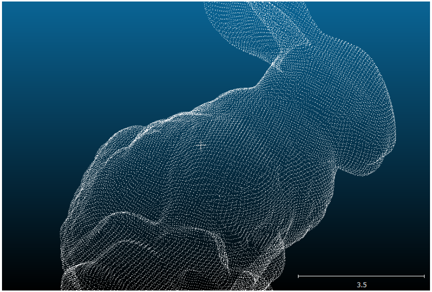


(b) Après 50 itérations

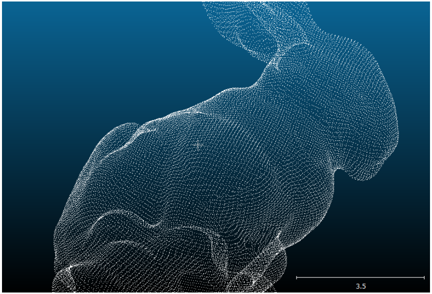
FIGURE: Boule évoluant par le flot par courbure moyenne, *avec un rayon* $\varepsilon = 0.6$ *et un pas de temps* $dt = 0.01$.

Mouvement par courbure moyenne régularisant

Petit pas de temps,
30000 points



(a) État initial



(b) Après 120 itérations

FIGURE: Évolution par le flot par courbure moyenne : *comparaison après* 120 *itérations pour* $dt = 0.001$ *et* $\varepsilon = 0.5$.

Mouvement par courbure moyenne retour ?

pas défini mais ...

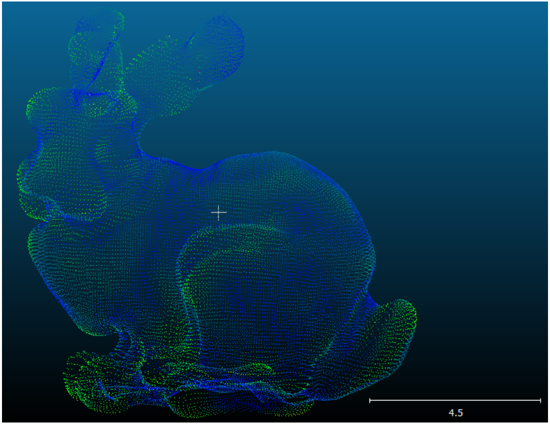


FIGURE: Évolution par un flot suivant $-H$: *Après* 340 *itérations et un rayon* $\varepsilon = 0.5$ *et un pas de temps* $dt = 0.001$

Intensité de la courbure moyenne

435000 points.

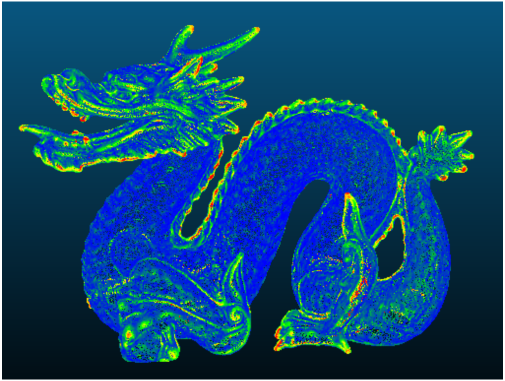


FIGURE: Intensité de la courbure moyenne, *calculs avec* $\varepsilon = 0.02$ *pour un dragon de diamètre* 1

Perspectives

- Étudier le problème de la multiplicité : comment assurer qu'un varifold obtenu comme limite de varifolds discrets soit entier.
- Peut-on récupérer d'autres quantités que la courbure moyenne (courbure de Gauss, courbure anisotrope). Hutchinson et Mantegazza ont défini une notion de varifold mettant en jeu toute la seconde forme fondamentale.
- Stabiliser le calcul numérique de la courbure : prendre en compte les variations d'échantillonnage, le bruit...
- Étudier et comparer les calculs de courbures, et effectuer des flots sur différentes discrétisations (volumiques, nuages de points, triangulations) de la même surface.