Sur les immeubles hyperboliques

Damien Gaboriau et Frédéric Paulin

Janvier 1998

Résumé: Le but de ce papier est de donner une approche géométrique à la "méthode des amalgames" de Tits pour construire des immeubles, et de commencer une théorie des immeubles hyperboliques, i.e. de type un système de réflexions de l'espace hyperbolique réel. Nous construisons de nombreux exemples et nous étudions leur cohomologie à l'infini. Nous construisons des complexes polyédraux CAT(-1) ayant de gros groupes paraboliques discrets d'isométries.

Abstract: The aim of this paper is to give a geometric approach to Tits' "amalgam method" to construct buildings, and to initiate a study of hyperbolic buildings, i.e. whose types are reflexion systems of the real hyperbolic space. We construct lots of examples, and study their cohomology at infinity. We construct CAT(-1) polyhedral complexes having big discrete parabolic groups of isometries.

Keywords: Immeubles hyperboliques, complexes de groupes, groupes de Coxeter, groupes discrets paraboliques.

AMS codes: 20 E 42, 51 E 24, 20 F 55, 51 M 20

Introduction

Soit P un polyèdre compact convexe (pas forcément un simplexe) de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ de dimension $n \geq 2$, dont chaque angle dièdre est de la forme $\frac{\pi}{k}$, avec k un entier au moins 2. Notons que le groupe W engendré par les réflexions sur les faces de P est un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$, agissant sur $\mathbb{H}^n$ avec domaine fondamental P, par un théorème de Poincaré [Har]; qu'un théorème de Vinberg [Vin] impose une sévère restriction sur la dimension : n est au plus 29; et que la dimension maximale connue est 9, par un exemple de Bugaenko [Bug].

Un *immeuble hyperbolique* de type P est un complexe polyédral X, muni d'une famille maximale de sous-complexes appelés *appartements*, polyédralement isométriques au pavage de $\mathbb{H}^n$ par les images de P sous W, tels que

- par deux cellules de X passe au moins un appartement,
- pour tous appartements A, A' de X, il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant $A \cap A'$.

Notons I l'ensemble des faces de codimension 1 de P, et M la matrice de Coxeter $(m_{i,j})_{i,j\in I}$ avec $\frac{\pi}{m_{i,j}}$ l'angle dièdre entre les faces i et j si celles-ci se rencontrent en une face de codimension 2, et $m_{i,j} = \infty$ sinon. Soit C un *immeuble de type M* (vu comme un système de chambres sur I, voir [Ron]). Les immeubles de type hyperbolique compact au sens de Bourbaki [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12] sont précisément ceux pour lesquels P est un simplexe.

La bonne réalisation géométrique de C n'est pas la réalisation usuelle (par exemple décrite dans [Ron]), mais est le quotient

$$|C| = (C \times P)/\sim$$

pour $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $(c, x) \sim (c', x')$ s'il existe $i \in I$ tel que $x = x' \in i$ et c, c' sont des chambres i-adjacentes. On munit $|C|$ de sa structure naturelle de complexe polyédral.

Nous montrons (section 1) que les immeubles hyperboliques de type P sont précisément les réalisations géométriques des immeubles de type M; que cette réalisation géométrique coïncide avec celle de Davis-Moussong [Dav2]; et que les immeubles hyperboliques sont CAT(-1), i.e. à courbure ≤ -1 au sens d'Alexandrov-Topogonov (voir [GH]). Les *immeubles fuschiens* de M. Bourdon [Bou] sont des immeubles hyperboliques de type P avec P de dimension 2, avec des hypothèses de finitude locale.

Dans [Tit2, Tit3], J. Tits développe une technique, appelée "méthode des amalgames" pour construire des immeubles. Dans [Hae, BH], A. Haefliger introduit une notion de complexe de groupes, plus générale que celle de [Tit3], dont une version simplifiée commune est la suivante (voir section 1.5 pour le cas général).

Un *complexe de groupes* $\mathcal{C}$ est la donnée d'un complexe polyédral connexe X, d'un groupe G_s pour tout sommet s de la subdivision barycentrique X' de X, et d'un morphisme injectif de groupe $\psi_a : G_{o(a)} \to G_{t(a)}$ pour toute arête a de X' d'origine $o(a)$ et d'extrémité $t(a)$, tel que le diagramme évident commute. Le *groupe fondamental* $\pi_1\mathcal{C}$ est la limite inductive des G_s, ψ_a. Pour tout s, il existe un (unique) complexe polyédral sphérique $\widetilde{lk}\ s$, appelé *développement local* en s, muni d'une action polyédrale isométrique de G_s, telle que le quotient (au sens évident) de $\widetilde{lk}\ s$ par G_s s'identifie au link de s dans X', muni de la structure de complexe de groupes induite. Le complexe de groupes est *développable* s'il existe un complexe polyédral simplement connexe $\tilde{\mathcal{C}}$ (alors unique à isomorphisme équivariant près), appelé le *revêtement universel*, tel que $\pi_1\mathcal{C}$ agisse sur $\tilde{\mathcal{C}}$ avec pour quotient (au sens évident) $\mathcal{C}$.

Combinant les résultats de Haefliger et Tits, nous en déduisons le résultat suivant (connu en dimension 2 par P. Brown et M. Bourdon [Bou]). La preuve repose sur une vérification de la simple connexité de résidus, par des techniques de M. Davis.

Théorème 0.1 *Soit $\mathcal{C}$ un complexe de groupe, dont le complexe polyédral sous-jacent est muni d'une application polyédrale sur P, dont la restriction à chaque cellule maximale est une isométrie. Supposons que les développements locaux des cellules de codimension k sont des immeubles sphériques si $k \leq 3$, et sont à courbure ≤ 1 au sens d'Alexandrov-Topogonov si $k \geq 4$. Alors $\mathcal{C}$ est développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de type P.*

L'intérêt principal d'une telle construction est qu'elle fournit des espaces localement compacts singuliers CAT(-1), dont le groupe des automorphismes est très gros (voir par exemple [HP]), et contient des sous-groupes discrets cocompacts.

En section 3, nous utilisons ce résultat pour donner de nombreux exemples explicites d'immeubles hyperboliques. Nous donnons en particulier une liste d'immeubles hyperboliques de dimension 2 à links classiques admettant un groupe d'automorphisme discret transitif sur les chambres, que nous conjecturons complète. Le cas des immeubles hyperboliques triangulaires est connu (travaux de Timmesfeld-Meixner-Stroth [Mei]).

Le problème ouvert principal est celui d'une classification de tous les immeubles hyperboliques localement finis. C'est un problème délicat, car les polyèdres de Coxeter hyperboliques ne sont même pas classés. En dimension 2, c'est, comme dans le cas euclidien, une tache impossible, car nous montrons, en utilisant des techniques de Haglund (section 3.2) :

Théorème 0.2 *Si P est un polygone de Coxeter hyperbolique à un nombre pair de côtés, il existe un ensemble non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type P, dont les links sont classiques et tous isomorphes.*

Les isométries des espaces métriques X localement compacts complets CAT(-1) (et plus généralement des espaces hyperboliques au sens de Gromov) sont classées en trois familles, les isométries elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Les groupes *paraboliques* d'isométries de X (i.e. fixant un point du bord et préservant les horosphères centrées en ce point) sont peu étudiés. Si une construction générale de Gromov [Gro] montre que tout groupe de type fini est un groupe discret parabolique d'isométrie d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, les exemples connus de groupes discrets paraboliques ont de sévères restrictions sur leur structure algébrique. B. Bowditch [Bow1] a montré qu'un groupe parabolique discret d'isométries d'une variété riemanienne à courbure strictement négative pincée est de type fini, donc est virtuellement nilpotent par des arguments de Margulis. La nécessité d'une borne supérieure < 0 découle des travaux de Abresch-Schroeder [AS]. La construction de Gromov fournit des espaces peu homogènes (le groupe de toutes les isométries a un point fixe global à l'infini).

Proposition 0.3 *Il existe une variété riemanienne X complète à courbure sectionelle ≤ -1, de volume fini, de groupe fondamental Γ et revêtement universel $\tilde{X}$ vérifiant:*

- *Γ possède un sous-groupe parabolique libre de rang 2; il est géométriquement fini au sens de Tukia-Bowditch [Tuk, Bow2] et hyperbolique relativement à l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques maximaux, au sens de Gromov-Farb-Bowditch [Bow2];*
- *la dimension de Hausdorff du bord de X est infinie.*

Nos exemples sont construits à partir d'“ideal polyedra” au sens de [CT], qui ont étudiés leurs propriétés géométriques, mais sans fournir de grandes familles d'exemples. Notre construction devrait aussi donner des exemples intéressants pour l'étude dynamique de [DP] des groupes discrets d'isométries d'espaces CAT(-1) en présence de paraboliques.

Nous décrivons en section 4 la topologie de l'espace à l'infini d'un immeuble euclidien ou hyperbolique, comme limite projective de celle des sphères de rayon fini. Le résultat suivant est dû à A. Borel et J.-P. Serre [BS] dans le cas des immeubles euclidiens de Bruhat-Tits, et la construction géométrique plutot qu'algébrique de l'espace à l'infini rend sa preuve beaucoup plus facile. Nous notons $H^i_c(Y;\mathbb{Z})$ le i-ème groupe de cohomologie à support compact d'Alexander-Spanier d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$.

Théorème 0.4 *Soit X un immeuble euclidien ou hyperbolique de dimension n. Alors $H^i_c(Y;\mathbb{Z})$ est nul pour $i \neq n$ et abélien libre pour $i = n$, de dimension infinie si X est épais.*

Nous remercions J.-P. Serre, qui est à l'origine à la section 4, A. Haefliger, P. Brown, F. Haglund, M. Bourdon et J.-Y. Hee pour leurs discussions.

1 Rappels et définitions

Dans tout cet article, pour tout entier n strictement positif, $\mathbb{X}^n$ désigne la sphère $\mathbb{S}^n$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, muni de sa métrique riemanienne standard (à courbure constante respectivement $1, 0, -1$ si $n \geq 2$).

Les seuls faits nouveaux dans ce chapitre sont les énoncés 1.2, 1.5, 1.7, 1.8, et 1.9, avec le fait que l'on admet des cellules de volume fini non compactes dans les complexes polyèdraux.

1.1 Complexes polyédraux

Nous renvoyons par exemple à [BH] pour les justifications et développements sur les rappels ci-dessous.

Un *complexe polyédral* X est un CW-complexe (resp. un CW-complexe privé d'un ensemble X_∞ de sommets) dont chaque cellule ouverte $\overset{\circ}{C}$ (resp. n'appartenant pas à X_∞) est l'intérieur d'un polyèdre convexe compact (resp. polyèdre de volume fini ou isométrique à $\mathbb{R}$) d'un $\mathbb{X}^k$, de sorte que la restriction de l'application d'attachement à chaque face ouverte de codimension 1 de C (resp. n'appartenant pas à X_∞) est une isométrie sur une cellule ouverte de X. Un complexe polyédral X est dit *sphérique, euclidien* ou *hyperbolique* (par morceaux) si, pour toute cellule, $\mathbb{X}^k$ vaut $\mathbb{S}^k, \mathbb{R}^k, \mathbb{H}^k$ respectivement.

Si X est un complexe polyédral, et $x \in X$, nous noterons $\mathrm{lk}(x, X)$ (resp. $\mathrm{Lk}(x, X)$) le *link* (resp. *Link* de x dans X), c'est-à-dire l'ensemble des germes de segments géodésiques issus de x dans les cellules contenant x (resp. et de plus orthogonaux en x à la cellule ouverte contenant x). Il possède une structure naturelle de complexe polyédral sphérique, dont les cellules sont formées des germes de géodésiques contenues dans une cellule donnée. À isométrie près, il est constant sur la cellule ouverte $\overset{\circ}{\sigma}$ contenant x, et on le note aussi $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ (resp. $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$). Si k est la dimension de σ, alors $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ est isométrique à la suspension sphérique itérée k fois de $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$.

Dans tout cet article, X sera muni de l'écart (ou pseudo-distance) d défini comme suit. Une application continue $f : [a, b] \to X$ est une *géodésique brisée* s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p+1} = b$ telle que $f(]t_i, t_{i+1}[)$ est contenu dans une cellule ouverte $\overset{\circ}{C_i}$ de X, avec $f\mid_{]t_i,t_{i+1}[}$ une géodésique pour la métrique de $\overset{\circ}{C_i}$ induite de celle du $\mathbb{X}^{k_i}$ correspondant. La *longueur* de cette géodésique brisée est

$$\ell(f) = \sum_{i=0}^{p} \ell_{\overset{\circ}{C_i}}(f\mid_{]t_i,t_{i+1}[}).$$

L'*écart* $d(x, y) \in [0, +\infty]$ entre x et y dans X est la borne inférieure des longueurs des géodésiques brisées de x à y.

Si X est connexe, a toutes ses cellules compactes, et n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, alors M. Bridson (voir [BH]) a montré que (X, d) est un espace métrique géodésique complet. Rappelons qu'un espace métrique X est dit *géodésique* s'il existe pour tous x, y dans X une *géodésique* de x à y, i.e. une application isométrique d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans X, d'extrémités x, y.

Si X est connexe, admet au moins une cellule non compacte, et n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, nous supposerons que l'écart d est *complet* (ce n'est plus automatique). Les arguments de M. Bridson (voir [BH]) entraînent que (X, d) est alors un espace métrique géodésique (complet).

Par *isométrie polyédrale*, nous entendrons un isomorphisme de CW-complexe qui induise une isométrie sur chaque cellule ouverte (pour la métrique induite des $\mathbb{X}^k$). Une isométrie polyédrale préserve l'écart d. Sauf mention contraire, une action d'un groupe sur un complexe polyédral sera par isométries polyédrales.

Une isométrie polyédrale de X est *sans inversion* si elle fixe point par point chaque cellule qu'elle préserve. Le quotient d'un complexe polyédral par un groupe d'isométries polyédrales sans inversion possède une structure naturelle de complexe polyédral.

Si X est connexe et n'a qu'un nombre fini de types d'isométries de cellules, alors X est localement fini (i.e. le nombre de cellules contenant une cellule de X n'appartenant pas à X_∞ est fini) si et seulement si la topologie induite par la distance d est localement compacte, et dans ce cas la topologie de X coïncide avec celle induite par d.

Lorsque X est localement fini, nous munirons l'ensemble $\mathrm{Isom}(X)$ des isométries polyédrales de X de la topologie compacte-ouverte. Si X est connexe, deux isométries polyédrales sont proches si elles coïncident sur une boule pour d de grand rayon (de centre un point base fixé). Le groupe topologique $\mathrm{Isom}(X)$ est alors localement compact, et le fixateur d'une cellule est un groupe compact profini (car limite projective du groupe fini de ses restrictions à la boule de rayon n).

La *subdivision barycentrique* X' de X est le complexe polyédral, dont les cellules sont les cellules de la subdivision barycentrique de chaque cellule de X (donc son ensemble de sommet à l'infini est le même), les applications d'attachement provenant des restrictions des applications d'attachement de X, ou des applications identité entre faces communes de deux cellules de la subdivision d'une même cellule de X. Nous identifierons tout sommet de X' avec la cellule de X lui correspondant. Une arête a de X' est naturellement orientée : si σ, σ' sont ses sommets, alors a est orientée de σ vers σ' si σ' est une face de σ. On note alors $i(a) = \sigma$ et $t(a) = \sigma'$ le sommet *initial* et *terminal* de a respectivement. Deux arêtes a et b sont *composables* si $t(b) = i(a)$ et $t(a)$ est face de $i(b)$, et on note ab l'arête entre $i(b)$ et $t(a)$.

Par exemple, si σ est une cellule de X de dimension k, alors les sommets de la subdivision barycentrique de $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ sont exactement les cellules τ de X contenant σ, comptées avec multiplicité si plusieurs faces de τ se recollent en σ. Les arêtes a de la subdivision barycentrique de $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ sont les couples (toujours avec multiplicité) (σ', σ'') de cellules de X contenant σ, avec σ' contenant σ''. Leur origine est σ' et leur extrémité σ''.

Complexe polyédral typé

Soit X un complexe polyédral de dimension finie, et P un polyèdre de volume fini de $\mathbb{X}^k$. Une *fonction type* de X dans P est un morphisme de CW-complexes $\tau : X \to P$ tel que la restriction de τ à toute cellule maximale (pour l'inclusion) soit une isométrie. Une isométrie polyédrale de X *préserve le type* si elle laisse τ invariante.

Il est facile de montrer (voir par exemple [HP, §5.5]) que si pour toutes cellules maximales c, c' de X, il existe une suite $c_0 = c, c_1, \cdots, c_n, c_{n+1} = c'$ de cellules maximales avec c_j et c_{j+1} se rencontrant sur une face de codimension 1, alors deux fonctions types égales sur une cellule maximale coïncident, et que s'il est non vide, l'ensemble des fonctions types s'identifie à l'ensemble des isométries de P dans P.

Si σ est une cellule de X, alors son Link est un complexe polyédral (sphérique) admettant une fonction type à valeurs dans $\mathrm{Lk}(\tau(\sigma), P)$, qui à un germe de segment géodésique issu d'un point x de $\overset{\circ}{\sigma}$ associe son image par τ.

Si C est une cellule de X, si J est l'ensemble des faces de codimension 1 de P contenant $\tau(C)$, nous dirons que C (ainsi que son link) est *de type* J.

1.2 Systèmes de chambres, systèmes de Coxeter et immeubles combinatoires

Nous renvoyons par exemple à [Ron] Chap. 1,2,3, [Bour] et [Dav2] pour les justifications et développements sur les rappels ci-dessous, essentiellement introduits par J. Tits.

Une *matrice de Coxeter* M sur un ensemble I est une matrice symétrique $(m_{ij})_{i,j\in I}$ à cœfficients dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ telle que $m_{ii}=1$ et $m_{ij}\geq 2$ pour $i\neq j$. Le *groupe de Coxeter* défini par M est le groupe W défini par générateurs s_i pour $i\in I$ et relations $(s_is_j)^{m_{ij}}=1$ pour $i,j\in I$ avec $m_{ij}\neq\infty$. Si $S=\{s_i/i\in I\}$, le couple (W,S) est appelé un *système de Coxeter*. Si $J\subset I$, le sous-groupe W_J de W engendré par $\{s_j/i\in J\}$ est appelé le *sous-groupe spécial* de type J. Le *rang de* M *et de* (W,S) est le cardinal de I.

Un *système de chambres sur un ensemble* I est un ensemble C muni d'une famille indexée par I de partitions de C. Les éléments de C sont appelés les *chambres*. Deux chambres sont *i-adjacentes* si elles appartiennent à la même partie de la partition correspondant à $i\in I$. Le *rang* de C est le cardinal de I.

Soient C,D deux systèmes de chambres sur I. Un *morphisme* $f:C\to D$ est une application telle que $f(c),f(c')$ sont i-adjacentes pour toutes chambres i-adjacentes c,c' de C.

Soit C un système de chambres sur I. Une *galerie* est une suite finie de chambres $(c_0,c_1,\cdots,c_n)$ telle que c_j est adjacente à c_{j-1} et différente de c_{j-1}, pour tout $j=1\cdots n$. Soit I^* le monoïde libre sur I. La galerie est de *type* $\tau=i_1\cdots i_n\in I^*$ si c_j est i_j-adjacente à c_{j-1}.

Soit $J\subset I$. Un système de chambres sur I est *J-connexe* si deux chambres quelconques c,c' peuvent être jointes par une galerie de type $\tau=i_1\cdots i_n$ avec $i_j\in J$. Les composantes J-connexes de C sont appelées les *J-résidus* (ou résidu de type J) de C. Avec les partitions restreintes, ce sont des systèmes de chambres sur J. Une *cloison* est un résidu de rang un.

Exemples. (1) Soit G un groupe, B un sous-groupe, $(P_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes contenant B. On définit un système de chambres $C=C(G,B,(P_i)_{i\in I})$ sur I par $C=G/B$ et les chambres $gB,g'B$ sont i-adjacentes si elles ont la même image dans G/P_i. Le groupe G est naturellement un groupe d'automorphismes transitif sur les chambres de C.

(2) Soit M une matrice de Coxeter sur I, and (W,S) le système de Coxeter associé. Soit $\mathbf{W}$ le système de chambres $C(W,\{1\},(W_{\{i\}})_{i\in I})$ sur I, appelé le *système de chambres de Coxeter* de type M. Ainsi, l'ensemble des chambres est W, et deux chambres w,w' sont i-adjacentes si et seulement si $w'=w$ ou $w=w's_i$.

(3) Soit P un polyèdre de volume fini de $\mathbb{X}^n$, nous noterons $I=I(P)$ l'ensemble des faces de codimension 1 de P. Soit X un complexe polyédral admettant une fonction type $\tau:X\to P$. Appelons *chambre* de X toute cellule maximale de X. Deux chambres sont dites *i-adjacentes* si elles se rencontrent (au moins) en une cellule de type i (au sens de la fin de la section 1.1). L'ensemble des chambres de X, muni de ces relations d'adjacence,

est un système de chambres sur I, dit *associé* au type τ, que nous noterons C_X. Les cloisons de type i sont exactement les cellules de codimension 1 de X de type i.

Soit M une matrice de Coxeter sur un ensemble I. Un *immeuble combinatoire de type* M est (voir [Ron, page 34]) un système de chambres C sur I, muni d'une famille maximale de sous-systèmes de chambres (appelés *appartements*), isomorphes au système de chambres de Coxeter de type M, tel que

1. par deux chambres passe au moins un appartement,
2. pour tous appartements A, A' contenant une chambre commune c et une chambre ou cloison commune y, il existe un isomorphisme de A sur A' fixant x, y.

Un *morphisme* d'immeuble combinatoire est un morphisme des systèmes de chambres sous-jacents. Un J-résidu d'un immeuble combinatoire est dit *sphérique* si le sous-groupe spécial W_J est fini.

1.3 Groupes de réflexions hyperboliques

Un *système de réflexions de* $\mathbb{X}^n$ est un couple (W, S) avec S un ensemble de réflexions de $\mathbb{X}^n$ (i.e. une isométrie involutive d'ensemble de points fixes de codimension 1) et W le groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$ engendré par S (appelé *groupe de réflexions de* $\mathbb{X}^n$), tel que W est un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$. On dit que (W, S) (resp. W) est un système (resp. groupe) de réflexions *sphériques, euclidiennes, hyperboliques* si $\mathbb{X}^n$ vaut $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ respectivement.

Un *polyèdre de Coxeter* de $\mathbb{X}^n$ est un polyèdre (convexe) de $\mathbb{X}^n$ de dimension n, dont chaque angle dièdre est de la forme $\frac{\pi}{k}$ pour un certain k (dépendant de l'angle dièdre).

Le théorème suivant (voir par exemple [Har]) permet de décrire tous les groupes de réflexions.

Théorème 1.1 *(H. Poincaré) Soit P un polyèdre de Coxeter de $\mathbb{X}^n$, $S(P)$ l'ensemble des réflexions par rapport aux faces de codimension 1 de P et $W(P)$ le groupe engendré par $S(P)$. Alors $(W(P), S(P))$ est un système de réflexions de $\mathbb{X}^n$. Tout système de réflexions de $\mathbb{X}^n$ peut s'obtenir de cette manière, et P est déterminé par $(W(P), S(P))$. De plus, P est un domaine fondamental pour l'action de $W(P)$ sur $\mathbb{X}^n$ (i.e. les images par W de l'intérieur de P sont disjointes, et les images de P recouvrent tout $\mathbb{X}^n$). Enfin, si $I = I(P)$ est l'ensemble des faces de codimension 1 de P, alors $(W(P), S(P))$ est isomorphe au système de Coxeter de matrice de Coxeter sur I définie par $m_{ij} = \infty$ si les faces distinctes i, j de P ne se rencontrent pas en une face de codimension 2 et $\frac{\pi}{m_{ij}}$ étant l'angle dièdre entre i et j sinon.*

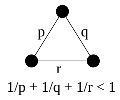
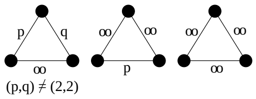
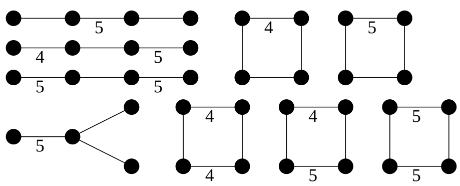
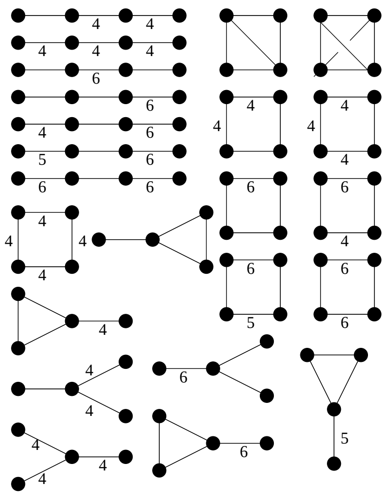
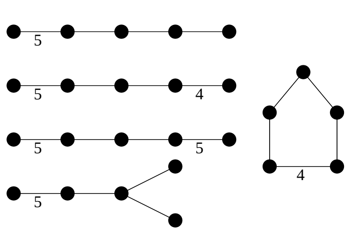
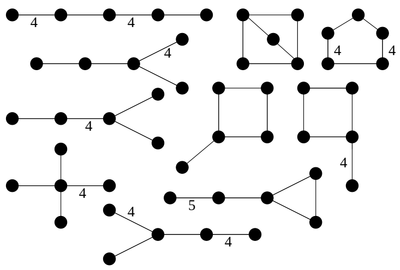
Si (W, S) est un système de réflexions de $\mathbb{X}^n$, nous dirons dans la suite que P est le polyèdre de Coxeter *associé* à (W, S). Nous dirons que (W, S) est *cocompact* (resp. *de covolume fini*) si P est compact (resp. de volume fini).

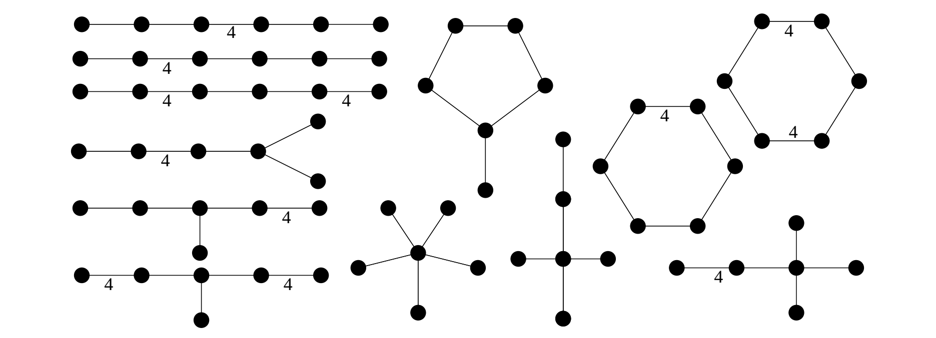
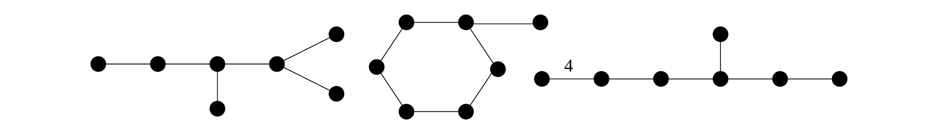
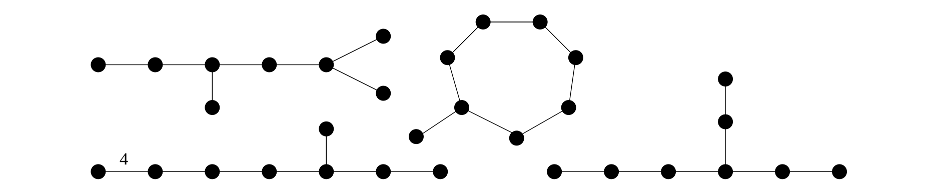
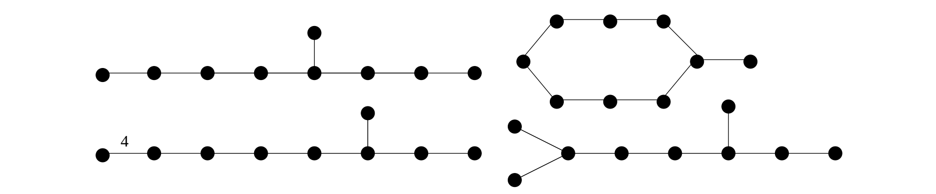
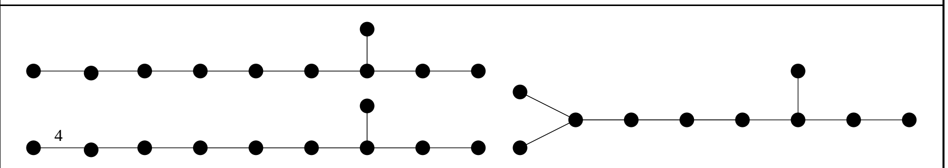
Remarque. Faisons deux remarques sur la terminologie. Dans le livre [Hum], est appelé système de Coxeter hyperbolique ce que nous appelons système de réflexions hyperboliques. Nous avons préféré cette terminologie pour ne pas confondre avec les groupes de Coxeter qui sont hyperboliques au sens de Gromov.

Dans [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12] sont définis les systèmes de Coxeter *de type hyperbolique* (resp. *de type hyperbolique compact*). Ce sont précisément les systèmes de réflexions hyperboliques (W, S) dont le polyèdre associé P est un simplexe de volume fini (resp. un simplexe compact). Il est montré [Bour, Ch. V, §4, Ex. 13-14] qu'un système de Coxeter est de type hyperbolique (resp. de type hyperbolique compact) si et seulement si

- la forme quadratique associée B_M est non dégénérée et non positive, et
- pour toute partie T de S, distincte de S, la forme quadratique $B_{M(T)}$ associée au système de Coxeter (W_T, T) est positive (resp. positive non dégénérée, ou de manière équivalente W_T est fini).

La liste exacte rappelée ci-dessous des systèmes de Coxeter de type hyperbolique est connue (voir [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12-19], [VS, page 205]), et due à F. Lanner pour le cas compact. Ils sont non compacts à partir du rang 6.

	compact	noncompact
Rang 3		
Rang 4		
Rang 5		

Rang 6	
Rang 7	
Rang 8	
Rang 9	
Rang 10	

Soit (W, S) un système de réflexions de covolume fini de $\mathbb{X}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé. Nous noterons $I(P)$ l'ensemble des faces de codimension 1 de P, et s_i la réflexion par rapport à l'hyperplan de P contenant la face $i \in I(P)$.

Un *complexe polyédral de type* (W, S) est un complexe polyédral X muni d'une fonction type dans P. Il lui est associé (voir exemple (3) de la section précédente) un système de chambres C_X. Si $J \subset I(P)$, un J-résidu de C_X est dit *sphérique* si le sous-groupe spécial $W_J = W_{S_J}$ est fini, où $S_J = \{s_j \mid j \in J\}$.

Exemple: Les images par W du polyèdre de Coxeter associé P munissent $\mathbb{X}^n$ d'une structure de complexe polyédral de type (W, S), appelé le *complexe de Coxeter* de (W, S), et noté $\Sigma(W, S)$. (Sa fonction type est la projection canonique $\mathbb{X}^n \to \mathbb{X}^n/W$, ce quotient s'identifiant à P par le théorème de Poincaré.) Le groupe W est alors le groupe des isométries polyédrale du complexe de Coxeter qui préservent le type.

Proposition 1.2 *Soit X un complexe polyédral de type (W, S). Les composantes J-connexes des systèmes de chambres associés aux Links des cellules de X de type J sont en* *bijection avec les J-résidus sphériques du système de chambres associé à X. Les Links de cellules de type J sont des complexes polyédraux (sphériques) de type (W_J, S_J).*

Preuve. Le résultat étant clairement vrai pour $J = \emptyset$, nous supposerons que J est non vide. Soit σ une cellule de X de type J. Si C est une chambre de X contenant σ, notons $c_\sigma(C)$ la chambre de $Lk(\sigma, X)$, formée des germes de géodésiques contenus dans C.

Comme $\sigma = \tau_{|C}^{-1}(\cap J)$, l'intersection $\cap J$ est non vide. Le sous-groupe spécial W_J, fixant $\cap J$, est donc fini (car W est discret et le stabilisateur d'un point dans le groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$ est compact).

Si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$ et si W_J est fini, alors W_J a un point fixe global dans $\mathbb{X}^n$. Soit H_i l'hyperplan contenant la face i de codimension 1 de P, i.e. l'ensemble des points de P fixes par s_i. Il découle des propriétés des polyèdres de Coxeter (voir [Har] par exemple), pour tout $K \subset I$, que $\bigcap_{i \in K} H_i$ est non vide si et seulement si $\cap K$ l'est. Donc si W_J est fini, toute chambre de X possède une unique face de type J. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, cette dernière affirmation est encore vraie, et de plus tout résidu est sphérique.

Si C_{n-1}, C_n sont deux chambres j-adjacentes, avec $j \in J$ et $\sigma \subset C_{n-1}$, alors $C_{n-1} \cap C_n$ contient la cloison de type j de C_{n-1}, donc contient σ. Par récurrence, toute chambre jointe à une chambre contenant σ par une J-galerie contient σ. Donc, si C_0 est une chambre de X contenant σ, l'application qui à une chambre C contenant σ associe la chambre $c_\sigma(C)$ de $Lk(\sigma, X)$ est un isomorphisme du J-résidu de C_0 pour le système de chambres associé à X, à valeurs dans la composante J-connexe de $c_\sigma(C_0)$ pour le système de chambres associé au Link de σ.

Le résultat en découle. □

1.4 Immeubles hyperboliques

Définition 1.3 *Soit (W, S) un groupe de réflexions de $\mathbb{X}^n$ de covolume fini. Un immeuble de type (W, S) est un complexe polyédral X, muni d'une famille maximale de sous-complexes polyédralement isométriques au complexe de Coxeter de (W, S), appelés appartements, tels que*

1. *par deux cellules de X passe au moins un appartement,*

2. *pour tous appartements A, A' contenant deux cellules x, y de X, il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant x, y.*

Nous appelerons *chambre* de X une chambre d'un appartement de X. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$, nous parlerons d'immeuble *sphérique, euclidien, hyperbolique* respectivement.

Si A est un appartement et c une chambre de A, nous appelerons *rétraction de X sur A de centre c* le morphisme de CW-complexe

$$\rho_{c,A} : X \to A$$

ainsi définie. Si $x \in X$, soit A' un appartement contenant c et x, et $f : A' \to A$ une isométrie polyédrale fixant c. Alors $\rho_{c,A}(x) = f(x)$ ne dépend pas de l'appartement A' choisi, car une isométrie de A valant l'identité sur c est l'identité partout.

Un immeuble X de type (W, S) admet une structure de complexe polyédral de type (W, S). Choisissons une chambre c_0 de X, dite *fondamentale*, que l'on identifie à P. Si

A est un appartement contenant c_0, soit $\tau : X \to P$ obtenue en composant la rétraction $\rho_{c_0,A}$ avec l'unique fonction type de A dans c_0 valant l'identité sur c_0. Il est immédiat de vérifier que τ ne dépend pas de A (mais dépend du choix de c_0 identifié à P).

En particulier, si I est l'ensemble des faces de codimension 1 de P, l'ensemble C_X des chambres de X est muni d'une structure de système de chambre sur I. Deux chambres c, c' de X sont i-adjacentes si elles se rencontrent sur une cellule de codimension 1 (cloison) de type i.

Il est immédiat de vérifier que C_X est un immeuble combinatoire de type (W, S). Notons qu'il n'y a pas de relation entre le rang de mC_X en tant que système de chambres et la dimension de X en tant que CW-complexe, comme le montre le cas de la dimenion 2, où le rang est un entier quelconque au moins 3.

Il existe une très jolie caractérisation des immeubles sphériques, démontrée par S. Barré [Bar] en dimension 1. Nous renvoyons à [GH] pour la définition des espaces métriques à courbure $\leq \chi$ au sens d'Alexandrov-Topogonov.

Théorème 1.4 *(B. Kleiner [Kle]) Un complexe polyédral sphérique CAT(1) de dimension n est un immeuble sphérique si et seulement si par deux points passe une sphère de dimension n isométriquement plongée.* □

Proposition 1.5 *Soit X un immeuble de type (W, S). Alors X est CAT(κ), avec κ la courbure de $\mathbb{X}^n$ et ses links sont des immeubles sphériques CAT(1).*

Preuve. La preuve de la première assertion est analogue à celle de [Bro] dans le cas euclidien. Nous ne considerons ci-dessous que le cas hyperbolique, le cas sphérique se traitant de manière semblable. Soient x, y, z les sommets d'un triangle géodésique de X. Soit p un point du côté opposé à x. Soient $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ les sommets d'un triangle géodésique du plan hyperbolique ayant les mêmes longueurs de côtés, et $\overline{p}$ le point correspondant à p. Considérons la rétraction ρ sur un appartement contenant y et z, de centre une chambre contenant p. Notons $x' = \rho(x)$. Comme ρ préserve la distance à p et diminue les distances, le triangle géodésique de sommet x', y, z, qui est contenu dans un plan hyperbolique, vérifie $d(x, p) = d(x', p)$ et $d(x', y) \leq d(x, y) = d(\overline{x}, \overline{y}), d(x', z) \leq d(x, z) = d(\overline{x}, \overline{z})$. Rappelons que dans un triangle géodésique du plan hyperbolique, par la formule du cosinus, si les longueurs de deux côtés sont fixes, alors la longueur du troisième est croissante en fonction de son angle opposé. Par un raisonnement en deux temps, on en déduit donc que $d(x, p) = d(x', p) \leq d(\overline{x}, \overline{p})$, ce qui montre que X est CAT(-1).

L'affirmation sur les links découle du théorème précédent et du fait bien connu (voir [Gro]) que les links d'un complexe polyédral CAT(κ) sont CAT(1). □

1.5 Complexes de groupes

Le contenu de cette section est dû à A. Haefliger [Hae, BH], auquel nous renvoyons pour les preuves et compléments.

Soit X un complexe polyédral connexe. Un *complexe de groupes* sur X est la donnée $(X, G_\sigma, \psi_a, g_{a,b})$ suivante :

1. un groupe G_σ pour tout sommet de la subdivision barycentrique X' de X qui n'est pas dans X_∞,

2. un morphisme injectif $\psi_a : G_{i(a)} \to G_{t(a)}$ pour toute arête a de X' dont le sommet terminal n'est pas dans X_∞,

3. un élément $g_{a,b}$ dans $G_{t(a)}$ pour tout couple d'arêtes composables a et b de X', dont le sommet terminal de a n'est pas dans X_∞,

de sorte que

a) (relation de commutation) $\quad g_{a,b}\psi_{ab}g_{a,b}^{-1} = \psi_a\psi_b$

b) (relation de cocycle) si a, b, c sont trois arêtes de X' composables (dans cet ordre), alors
$$\psi_a(g_{b,c})g_{a,bc} = g_{a,b}\, g_{ab,c}.$$

Nous renvoyons à [Hae] pour la définition d'un morphisme de complexe de groupes. Si les $g_{a,b}$ sont triviaux, le complexe de groupe est dit *simple* (voir [BH, Chap. 12]).

Un *polytope de groupe* est un complexe de groupes simple, dont le complexe X est réduit à une cellule. Si celle-ci est de dimension 2, on dit un *polygone de groupes*.

Soit G un groupe d'automorphismes sans inversion d'un complexe polyédral $\tilde{X}$, et $p : \tilde{X} \to X = G\backslash\tilde{X}$ la projection canonique. On appelle *complexe de groupes quotient* le complexe de groupes sur X construit comme suit (unique à isomorphisme près, voir [Hae]).

Pour toute cellule σ de X, choisissons une cellule $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{X}$ se projetant sur σ. On note G_σ le fixateur de $\tilde{\sigma}$ dans G. Si a est une arête de X' d'origine σ, soit $\tilde{a}$ l'arête de $\tilde{X}'$ d'origine $\tilde{\sigma}$ dont la projection est a. Choisissons h_a dans G envoyant l'extrémité $t(\tilde{a})$ de l'arête $\tilde{a}$ sur $\tilde{\tau}$, avec $\tau = t(a)$ l'extrémité de a. On note $\psi_a : G_{i(a)} \to G_{t(a)}$ la conjugaison par h_a, avec $\psi_a(g) = h_a g h_a^{-1}$. Si a, b sont deux arêtes composables de X', on pose $g_{a,b} = h_a h_b h_{ab}^{-1}$. Les conditions $a), b)$ ci-dessus sont faciles à vérifier.

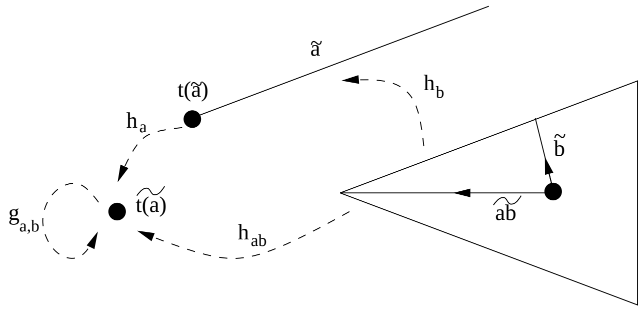


Figure 1 : Complexe de groupe associé à une action.

Un complexe de groupe est dit *développable* s'il est isomorphe au complexe de groupe quotient d' une action sans inversion d'un groupe G sur un complexe polyédral simplement connexe $\tilde{X}$. Un tel espace $\tilde{X}$ muni de cette action (unique à isométrie polyédrale équivariante près) s'appelle alors un *revêtement universel* du complexe de groupe, et le groupe G le *groupe fondamental* du complexe de groupes. Si un complexe de groupe $\mathcal{C}$ est simple et développable, et si X est simplement connexe, alors le groupe fondamental de $\mathcal{C}$ est exactement la limite inductive des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ (voir [BH]).

Un complexe de groupes est dit *de type* (W, S) si son complexe polyédral sous-jacent X l'est. Il est clair que le revêtement universel $\tilde{X}$ d'un complexe de groupes de type (W, S)

est naturellement un complexe polyédral de type (W,S): il suffit de composer l'application quotient $\tilde{X} \to X$ par la fonction type $\tau : X \to P$ de X.

Développement local d'une cellule d'un complexe de groupe

Soit $\mathcal{C} = (X, G_\sigma, \psi_a, g_{a,b})$ un complexe de groupes. Nous construisons ici les candidats naturels pour être les links des cellules d'un éventuel revêtement universel de $\mathcal{C}$.

Soit σ une cellule de X. Notons $\mathcal{C}^\sigma$ le complexe de groupes sur le complexe polyédral $\mathrm{lk}(\sigma, X)$, restriction (au sens évident) de $\mathcal{C}$ à $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ Alors (voir [Hae]) il existe un complexe polyédral $\mathrm{lk}(\tilde{\sigma})$ muni d'une action de G_σ (unique à isométrie polyédrale équivariante près), appelé le *développement local de $\mathcal{C}$ en σ*, tel que $\mathcal{C}^\sigma$ soit isomorphe au complexe de groupes quotient.

Par exemple, si $\mathcal{C}$ est dévelopable, de revêtement universel $\tilde{X}$, pour toute cellule σ de X, si $\tilde{\sigma}$ est une cellule de $\tilde{X}$ se projetant sur σ, alors $\mathrm{lk}(\tilde{\sigma})$ ainsi défini est polyédralement isométrique au link de $\tilde{\sigma}$ dans $\tilde{X}$.

Un complexe de groupes est dit *à courbure négative* si le complexe polyédral est euclidien ou hyperbolique, et si le développement local en chaque cellule (muni de sa métrique polyédrale) est CAT(1). Le critère géométrique principal de développabilité est le suivant.

Théorème 1.6 *(A. Haefliger [Hae, BH]) Un complexe de groupes à courbure négative est développable.* □

Notons que le revêtement universel d'un complexe de groupes à courbure négative sur un complexe polyédral X, est CAT(0), et même CAT(-1) si X est un complexe polyédral hyperbolique.

1.6 Constructions de Davis

Rappelons une construction due à M. Davis [Dav1]. Soit I un ensemble fini. Un *espace à face sur I* est un espace topologique F muni d'une famille $\{F_i\}_{i\in I}$ de sous-espaces indexée par I.

Exemples : (1) On note Δ_I l'espace à face, d'espace F le simplexe euclidien standard d'ensemble de sommets I, avec F_i la face de codimension 1 opposée à i.

(2) Si P est un polyèdre de $\mathbb{X}^n$, et $I = I(P)$, on note encore P l'espace à faces de type I, dont l'espace est $F = P$, muni de la famille $\{F_i = i\}_{i\in I}$ des faces de codimension 1 de P indexée par elle-même.

Si C est un système de chambres sur I (munit de la topologie discrète) et $(F, \{F_i\}_{i\in I})$ un espace à faces sur I (par abus noté F), alors M. Davis désigne par $F(C)$ l'espace topologique quotient suivant:

$$F(C) = C \times F/\sim$$

avec $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $(c,x) \sim (c',x')$ s'il existe $i \in I$ avec c et c' i-adjacents et $x = x' \in F_i$. Soit π la projection canonique de $C \times F$ dans $F(C)$.

Si F est un complexe polyédral et les F_i sont des sous-complexes, par transport de structure, comme chaque copie $\{c\} \times F$ de F s'injecte par π, le quotient $F(C)$ hérite d'une structure naturelle de complexe polyédral. Le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ des automorphismes de système de chambres de C agit par isométries polyédrales sur $F(C)$.

Par exemple (voir [Dav2] et la remarque 1.8), $\Delta_I(C)$ est la réalisation géométrique standard (voir [Ron, page 2]) de C, que nous noterons $||C||$ dans la suite, et si X est un immeuble euclidien ou hyperbolique, de chambre le polyèdre euclidien ou hyperbolique P, et de système de chambres associé C_X, alors $P(C_X)$ est polyédralement isométrique à X.

Réalisation géométrique de Davis-Moussong d'un immeuble combinatoire.

A tout immeuble combinatoire C, M. Davis associe naturellement un CW-complexe, muni d'une structure de complexe polyédral euclidien par G. Moussong (voir [Dav2, §10]). Topologiquement, c'est la réalisation géométrique de l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, de tous les résidus sphériques de C.

De manière plus constructive (voir [Dav2, §10]), si (W, S) est un système de Coxeter, notons $P(W, S)$ le complexe polyédral euclidien construit ci-dessous, que nous appellerons la *chambre de Davis-Moussong*.

Soit Δ_S le simplexe standard d'ensemble des sommets S, dont les faces s'identifient aux parties de S. Soit $N = N(W, S)$, appelé *nerf fini* de (W, S), le sous-complexe simplicial de Δ_S, dont les simplexes sont les parties T de S telles que le sous-groupe spécial W_T est fini. En particulier, N contient tous les sommets de Δ_S. Le 1-squelette de $N(W, S)$ est obtenu à partir du diagramme de Coxeter de (W, S) en enlevant les arêtes de poids ∞ et en rajoutant celles de poids 2.

En tant que CW-complexe, $P(W, S)$ est le complexe simplicial $x_0 * N'$, cône simplicial de sommet x_0 sur la subdivision barycentrique N' de N. Pour tout sommet s de N, on note F_s l'étoile de s dans N', vue comme partie de $P(W, S)$. Nous renvoyons à [Mou][Dav2, §9] pour la définition de la structure euclidienne sur les cellules de $P(W, S)$.

Maintenant, soit C un système de chambres sur I, et (W, S) un système de Coxeter avec $S = \{s_i \,/\, i \in I\}$. Considérons l'espace à faces $(P(W, S), \{F_{s_i}\}_{i\in I})$ sur I. La *réalisation géométrique de Davis-Moussong* de C est $|C| = P(W, S)(C)$. Nous appelerons *chambre de* $|C|$ les images par la projection canonique π des $\{c\} \times P(W, S)$ pour c chambre de C, et *cloisons de type i de* $|C|$ les images par π des $\{c\} \times F_{s_i}$ avec $c \in C$.

On montre (voir [Dav2]) que si C est un immeuble combinatoire de type (W, S), alors la métrique polyédrale de $|C|$ est CAT(0). Les chambres de $|C|$ sont alors des copies isométriques de la chambre de Davis-Moussong $P(W, S)$. Deux chambres de C sont i-adjacentes si et seulement si les chambres correspondantes de $|C|$ se rencontrent sur une cloison de type i.

Quelques lemmes sur la réalisation géométrique de Davis-Moussong.

Lemme 1.7 *Soit (W, S) un système de réflexions de $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé. En tant que CW-complexe, la chambre de Davis-Moussong $P(W, S)$ se plonge de manière canonique dans la subdivision barycentrique de P. Si P est compact, alors ce plongement est surjectif. De plus, si $J \subset I(P)$ et (W_J, S_J) est le sous-groupe spécial correspondant, alors le polyèdre P se rétracte de manière canonique sur la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J), de sorte qu'une face $j \in J$ s'envoie sur la face F_j de la chambre de Davis-Moussong de $(W(P), S(P))$.*

Preuve. Soit f l'application de l'ensemble des sommets de $N(W, S)$ dans le bord ∂P de P, qui à un sommet s_i associe le barycentre de la face i de codimension 1 de P (on utilise le modèle de Klein de l'espace hyperbolique réel). Comme un polyèdre de Coxeter est simple (voir par exemple [Vin]), la cellulation duale $(\partial P)^*$ de ∂P est simpliciale (et recouvre tout

∂P si P est compact). Si σ est un simplexe de Δ_S, d'ensemble de sommets $T \subset S$ avec $T = \{s_j \ / \ j \in J\}$, alors nous avons déjà vu que σ est dans $N(W,S)$ si et seulement si $\cap J$ est non vide. Donc l'application f s'étend en un isomorphisme de complexe simplicial de $N(W,S)$ sur $(\partial P)^*$. En passant à la subdivision barycentrique et aux cônes, la première affirmation en découle.

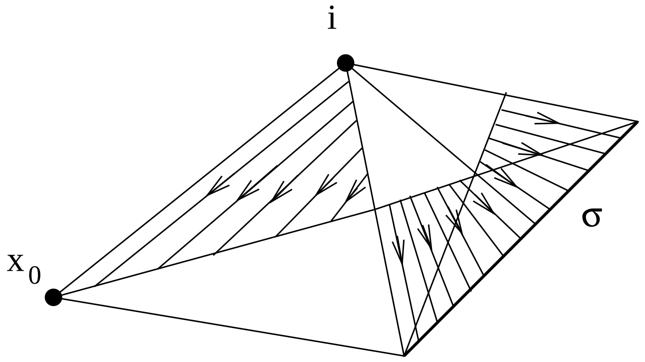


Figure 2 : Rétraction d'un polyèdre de Coxeter sur une chambre de Davis-Moussong.

Comme P se rétracte par déformation forte canonique sur le cône sur $(\partial P)^*$, pour la deuxième assertion, il suffit de montrer que $P(W,S)$ se rétracte comme voulu sur $P(W_J, S_J)$. Par récurrence, il suffit de montrer le cas $I = J \cup \{i\}$. Notons que $N(W_J, S_J)$ est un sous-complexe plein de $N(W,S)$ (i.e. une cellule dont le bord est contenue dans le sous-complexe est elle-même contenue dans le sous-complexe). Donc $P(W_J, S_J)$ est un sous-complexe plein de $P(W,S)$. Soit ω une face de $N(W,S)$ ayant i pour sommet, et σ l'intersection de ω et $N(W_J, S_J)$. Il existe une rétraction forte par déformation (canonique) de ω privé de l'étoile ouverte dans ω' du sommet i, à valeurs dans σ'. Elle préserve les étoiles dans ω' des sommets de σ. Il en est de même en prenant le cône de base x_0.

L'étoile de i dans le cône sur ω' de sommet x_0 se rétracte fortement par déformation (de manière canonique) sur le cône de sommet x_0 sur le link de i dans ω'. En combinant ces deux rétractions, on obtient le résultat. □

Remarque 1.8 *Soit (W,S) un groupe cocompact de réflexions de $\mathbb{X}^n$, X un immeuble de type (W,S) et C_X l'immeuble combinatoire des chambres de X. En tant que CW-complexe, la réalisation géométrique de Davis-Moussong de C_X est isomorphe à la subdivision barycentrique de X si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et au cône sur celle-ci sinon.*

Preuve. Si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, ceci découle immédiatement du lemme 1.7, et de la naturalité de la réalisation de Davis-Moussong. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, voir [Dav2]. □

En choisissant bien la structure CAT(-1) mise par G. Moussong sur la réalisation géométrique, il y a en fait isométrie dans la remarque précédente.

Par contre, si (W,S) est un système de réflexions hyperboliques qui n'est pas de type hyperbolique, alors la réalisation géométrique standard (voir [Ron]) de C_X est très différente de X.

Lemme 1.9 *Soit C un système de chambres de type (W,S), avec W infini. Supposons que la réalisation géométrique standard de chaque résidu de rang ≥ 2 de type non sphérique est simplement connexe. Alors la réalisation géométrique standard et celle de Davis-Moussong ont le même type d'homotopie en dimension 0 et 1.*

Preuve. Soit Δ'_I la subdivision barycentrique du simplexe Δ_I, b_I son barycentre et $\partial\Delta'_I$ son bord. Considérons d'abord l'unique plongement simplicial $i : P(W,S) \to \Delta'_I$, qui envoie x_0 sur b_I et le sommet $s \in S$ de $P(W,S)$ sur le barycentre de la face F_i opposée au sommet i de Δ_I, si $s = s_i$ est la réflexion par rapport à la face i de P, et plus généralement, le sommet de $N'(W,S)$ qui est le barycentre de la face d'ensemble de sommets S_J sur le barycentre de la face $\bigcap_{j\in J} F_j$ de Δ_I. Identifions $P(W,S)$ avec son image par i.

Soit $\Delta_{I,*}$ la réunion des faces ouvertes de Δ_I de la forme $\bigcap_{j\in J} F_j$ avec W_J infini et $J \neq I$. Notons que $P(W,S)$ est contenu dans $\Delta'_I - \Delta'_{I,*}$ par définition du nerf fini. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe un rétract fort par déformation de $\Delta'_I - \Delta'_{I,*}$ sur $P(W,S)$, qui envoie la face F_i de Δ_I sur l'étoile du sommet s_i dans $N'(W,S) \subset P(W,S)$.

Par naturalité de la construction de Davis, si $||C||_*$ est l'image dans $||C||$ de $C \times \Delta_{I,*}$, alors $||C|| - ||C||_*$ se rétracte fortement par déformation sur la réalisation de Davis-Moussong de C. Comme les links des simplexes ouverts contenus dans $||C||_*$ sont simplement connexes par hypothèse, on en déduit que l'inclusion $||C|| - ||C||_* \subset ||C||$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de dimension 0 et 1. □

2 Critères immobiliers locaux

Le but de cette section est de donner un critère "local" sur un complexe de groupes, pour qu'il soit développable et de revêtement universel un immeuble hyperbolique.

Soit (W,S) un système de réflexions de covolume fini de $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé.

Théorème 2.1 *Un complexe de groupes de type (W,S) est développable de revêtement universel un immeuble de type (W,S) si et seulement si ses développements locaux sont $CAT(1)$ et ceux dont le type J est de cardinal au plus 3 sont des immeubles sphériques.*

Preuve. La condition est nécessaire par la proposition 1.5 et le fait qu'un immeuble sphérique de rang au moins 3 est simplement connexe (voir [Ron]).

Montrons qu'elle est suffisante. Soit $\mathcal{C}$ un complexe de groupes sur le complexe polyédral X de type (W,S). Supposons que le développement local en toute cellule de X soit CAT(1). Alors $\mathcal{C}$ est développable, par le théorème 1.6. Soit $\tilde{X}$ un développement universel de $\mathcal{C}$. Nous avons déjà vu que $\tilde{X}$ est un complexe polyédral de type (W,S), dont nous notons $\tilde{\tau} : \tilde{X} \to P$ la fonction type. Soit $C_{\tilde{X}}$ le système de chambres sur $I = I(P)$ associé (voir exemple (3) section 1.2). Notons M la matrice de Coxeter de (W,S).

Montrons que $C_{\tilde{X}}$ est un système de chambres de type M au sens de [Ron, page 39]. En effet, soit R un J-résidu de rang 2 de $C_{\tilde{X}}$. Il s'agit de voir que R est un immeuble combinatoire de type (W_J, S_J).

Si R est de type sphérique, par la proposition 1.2, alors R est le système de chambres associé au Link d'une cellule de type J. Par hypothèse, ce link est un immeuble sphérique, donc R est un immeuble combinatoire. Le fait que R soit de type (W_J, S_J) a déjà été vu dans 1.2.

Maintenant, si R n'est pas de type sphérique, il s'agit de montrer que R est un immeuble de type $\tilde{A}_1$, c'est-à-dire un arbre sans feuille terminale. Soit $J = \{i,j\}$ le type de R. Le résidu R est une composante connexe du graphe dont les sommets sont les cloisons de type i et j, avec une arête entre la cloison de type i et la cloison de type j d'une même chambre.

Comme les links des faces de codimension 2 sont des immeubles sphériques, chaque cloison de $\tilde{X}$ est contenue dans au moins deux chambres. Donc R n'a pas de sommet terminal.

Géométriquement, identifions (la réalisation géométrique de) ce graphe avec le sous-espace $T = \tilde{\tau}^{-1}(\alpha)$ de $\tilde{X}$, où α est l'arc d'une perpendiculaire commune entre les faces i et j de P. L'existence d'un tel arc contenu dans P découle des propriétés des polyèdres de Coxeter: l'application type $\mathbb{X}^n \to \mathbb{X}^n/W = P$ diminue les distances, et envoie un hyperplan passant par une face de codimension 1 sur cette face.

Il s'agit de voir que chaque composante connexe de T est simplement connexe. Comme $\tilde{\tau}$ induit sur la réunion de deux chambres adjacentes la réflexion par rapport à leur cloison commune (voir par exemple [HP, section 5.5]), le sous-espace T est localement convexe dans $\tilde{X}$. Comme X est CAT(0), chaque composante connexe de T est donc globalement convexe, et en particulier est simplement connexe. Donc R est bien un arbre.

Lemme 2.2 *La réalisation géométrique standard des résidus propres de rang k au moins 3 de $C_{\tilde{X}}$ est simplement connexe.*

Preuve. Si R est un résidu sphérique de rang ≥ 3, soit J son type, et σ une de ses chambres. Alors la réalisation géométrique standard de R est homéomorphe au link L de la face de type J de σ, car R est sphérique. Puisque $\tilde{X}$ est CAT(0), ce link L est CAT(1). Rappelons que les résidus sphériques de rang 3 de R sont des immeubles combinatoires par hypothèse. Par le théorème 4.9, page 47 de [Ron], le revêtement universel au sens des systèmes de chambres de R est donc un immeuble combinatoire sphérique de rang ≥ 3. Un revêtement au sens des systèmes de chambres induit un revêtement branché au-dessus du squelette de codimension ≥ 3 entre les réalisations géométriques standard (voir [Ron, page 42]). Soit $\tilde{L}$ le revêtement branché de L correspondant. Comme $\tilde{L}$ est un immeuble sphérique, il existe un ensemble dense de paires de points de $\overline{L}$ qui sont joints par une (unique) géodésique de longueur $< \pi$ ne rencontrant pas le squelette de codimension 2 de $\overline{L}$. Considérons l'image d'une telle géodésique dans L. Puisque $\overline{L} \to L$ ne plie pas sur les cloisons, cette image est une courbe localement injective localement géodésique de longueur $< \pi$. Comme L est CAT(1), cette courbe est une géodésique minimisante. D'où $\overline{L} \to L$ est une isométrie sur un ensemble dense de paires de points, donc c'est une isométrie. En particulier L est un immeuble sphérique. Comme son rang est au moins 3, il est alors simplement connexe.

Supposons maintenant que R est le J-résidu d'une chambre c de X, avec J non sphérique.

Soit $\bigcup R$ la réunion des chambres de R. C'est un sous-complexe de X, qui est évidemment un complexe polyédral de type P. Comme les angles dièdres de P sont au plus $\frac{\pi}{2}$, le sous-espace $\bigcup R$ est localement convexe dans X. Comme X est CAT(0), on en déduit que $\bigcup R$ est globalement convexe, donc en particulier simplement connexe. Notons que R est un système de chambres de type (W_J, S_J). Par le lemme 1.7, le polyèdre P se rétracte naturellement sur la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J), de sorte que si $j \in J$, alors la face j de codimension 1 de P s'envoie sur la face F_j de la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J). Nous en déduissons que la réalisation de Davis-Moussong de R a même type d'homotopie que $\bigcup R$, donc est simplement connexe. Par le lemme 1.9 et par récurrence, comme R est non sphérique, il en découle que $||R||$ est simplement connexe. □

Soit $\tilde{C_{\tilde{X}}}$ un revêtement universel au sens des systèmes de chambres (voir [Ron, page 44]) du système de chambres $C_{\tilde{X}}$ de type M. Les résidus sphériques de rang 3 de $C_{\tilde{X}}$ sont des immeubles combinatoires, car ce sont les systèmes de chambres associés aux links de cellules de type J dans $\tilde{X}$, avec J de cardinal 3, par la proposition 1.2 et l'hypothèse. Par le théorème 4.9, page 47 de [Ron], nous en déduisons que $\tilde{C_{\tilde{X}}}$ est un immeuble combinatoire de type (W, S).

Par le lemme 1.9, comme $\tilde{X}$ a le même type d'homotopie que la réalisation géométrique de Davis-Moussong de son système de chambres associé $C_{\tilde{X}}$, et comme $\tilde{X}$ est simplement connexe, on en déduit donc que $||C_{\tilde{X}}||$ est simplement connexe.

Lemme 2.3 *(Exercice 9 page 52 de [Ron]) Si C est un système de chambres de rang $n \geq 3$, si la réalisation géométrique standard de chaque résidu propre de rang $k \geq 3$ est simplement connexe, si $\overline{C} \rightarrow C$ est un revêtement au sens des systèmes de chambres, alors l'application canonique $||\overline{C}|| \rightarrow ||C||$ entre les réalisations géométriques standards est un revêtement.* □

Appliquons ce résultat à $C = C_{\tilde{X}}$ et $\overline{C} = \tilde{C_{\tilde{X}}}$, qui vérifient bien les hypothèses du lemme. Comme $||C_{\tilde{X}}||$ est simplement connexe, nous en déduisons que $\tilde{C_{\tilde{X}}}$ et $C_{\tilde{X}}$ sont isomorphes, donc que $C_{\tilde{X}}$ est un immeuble combinatoire, de type (W, S). Par conséquent, X est un immeuble de type (W, S). □

Dans le cas où (W, S) est le groupe de Coxeter fini de type $\tilde{A}_2$, le corollaire suivant est dû à [Bar]. Il était connu de Kleiner et Leeb dans le cas euclidien.

Corollaire 2.4 *Si X est un complexe polyédral de type (W, S), dont les links sont $CAT(1)$ et tel que, par deux points d'un link de type J de cardinal au plus trois passe une sphère de dimension $|J| - 1$ isométriquement plongée, alors le revêtement universel de X est un immeuble de type (W, S).*

Preuve. Ce résultat découle du théorème précédent en mettant la structure de complexe de groupes triviaux sur X, par la caractérisation 1.4 des immeubles sphériques. □

Remarque. Ce même théorème et son corollaire sont valables pour un groupe de Coxeter (W, S) quelconque, en remplaçant "immeuble de type (W, S)" par "réalisation géométrique de Davis-Moussong d'un immeuble combinatoire de type (W, S)", en remplacant les complexes polyédraux de type (W, S) par les complexes formés de recollements convenables de chambres de Davis-Moussong $P(W, S)$, en définissant les complexes de groupes sur ces complexes de manière naturelle en utilisant le fait que les arêtes d'un tel complexe sont naturellement orientées (il n'y a pas besoin de prendre de subdivision barycentrique). Le langage des ensembles partiellement ordonnés , voire des petites catégories, de [Hae, BH] est ici parfaitement bien adapté. Il rend la preuve de cette extension tout à fait semblable. Mais pour des raisons de lisibilité, et parce que les seuls exemples auxquels nous appliquerons le théorème 2.1 sont bien dans notre cadre, nous avons préféré nous restreindre aux groupes de réflexions euclidiennes ou hyperboliques.

Corollaire 2.5 *(S. Barré) Soit X un 2-complexe hyperbolique $CAT(-1)$, dont les polygones sont isométriques à un même polygone de Coxeter P, tel que tout germe de géodésique soit contenu dans un germe de plan hyperbolique. Alors le revêtement universel de X est un immeuble hyperbolique.* □

3 Exemples d'immeubles hyperboliques

3.1 Polygones de groupes

3.1.1 La construction générale

Si m est un entier au moins 2, rappelons qu'un *m-gone généralisé* est un graphe biparti connexe de diamètre m et de maille (la longueur du plus petit cycle non trivial) $2m$. Si chaque arête est munie de la longueur $\frac{\pi}{m}$, ce sont exactement les immeubles sphériques de rang 2 (i.e. de type un système de réflexions du cercle $\mathbb{S}^1$ — un groupe diédral d'ordre $2m$ avec ses générateurs standards —) voir [Ron]. Rappelons que par un théorème de Feit-Higman, un m-gone généralisé fini épais (i.e. de valence au moins 3 en chaque sommet) ne peut exister que si $m = 2, 3, 4, 6$ ou 8. Par exemple, avec les notations de l'exemple 1 de la section 1.2, les m-gones généralisés admettant un groupe d'automorphisme transitif sur les chambres sont de la forme $C(G, B; P_1, P_2)$.

Proposition 3.1 *Soit P un polygone hyperbolique de Coxeter, compact à $k \geq 3$ sommets, d'angles aux sommets (avec ordre cyclique) $\frac{\pi}{m_1}, \cdots, \frac{\pi}{m_k}$. Soit G_i un groupe fini d'automorphismes d'un m_i-gone généralisé, transitif sur les chambres, de stabilisateur d'une chambre B_i, et stabilisateurs des cloisons de cette chambre $P_{1,i}, P_{2,i}$. Pour tout i mod k, supposons donné un isomorphisme de paire*

$$(P_{2,i}, B_i) \simeq (P_{1,i+1}, B_{i+1})$$

de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & B_1 \longrightarrow B_2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ B_n & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & B_3 \end{array}$$

Identifions tous les groupes B_i par les isomorphismes précédents, en un groupe noté B, ainsi que $P_{2,i}$ avec $P_{1,i+1}$ en un groupe Q_i. Soit $\mathcal{C}$ le polygone de groupe, de polygone P, de groupe de sommet G_i (ordre cyclique), de groupe d'arête Q_i entre les sommets i et $i+1$, et de groupe de polygone B avec les inclusions évidentes. Alors $\mathcal{C}$ est développable, et son revêtement universel est un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$.

Preuve. C'est une simple application du théorème 2.1, car le développement local du sommet i est combinatoirement le m_i-gone généralisé $C(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$, la condition sur les angles de P assurant que la métrique est celle d'immeuble sphérique. $\square$

Remarquons que tout immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$, muni d'un groupe discret d'automorphismes transitif sur les chambres est de cette forme. La classification des tels immeubles hyperboliques se ramène donc à la classification des suites finies de quadruplets de groupes $(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$ avec B_i sous-groupe de $P_{1,i}, P_{2,i}$, eux-mêmes sous-groupes de G_i, munis d'isomorphismes de paire $(P_{2,i}, B_i) \simeq (P_{1,i+1}, B_{i+1})$ faisant commuter le diagramme des B_i, de sorte que $C(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$ soit un m_i-gone généralisé, avec $\frac{\pi}{m_i}$ l'angle du i-ème sommet de P.

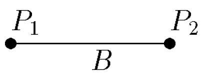
Remarque 3.2 *Si P est un polygone hyperbolique de Coxeter d'aire finie noncompact, on obtient de même un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$ en prenant le revêtement* *universel d'un polygone de groupes finis sur P, tel que, pour tout sommet fini s d'angle $\frac{\pi}{m}$, si a^+, a^- sont les deux arêtes de P contenant s, alors G_s agit sur un m-gone généralisé transitivement sur les chambres, de stabilisateur d'une chambre G_P, et stabilisateurs des cloisons de cette chambre G_{a^-}, G_{a^+}.*

3.1.2 Rappels sur les groupes de type de Lie finis de rang 2

Nous rappelons ci-dessous la liste des groupes G de type de Lie (i.e. de Chevalley ou de Chevalley tordu), finis et de rang 2, au sens suivant (voir [CSM, Car]).

Un groupe de Chevalley fini correspond à un couple d'une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ simple non triviale sur $\mathbb{C}$ et d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ (q puissance non nulle d'un nombre premier). Nous dirons qu'il est de rang 2 si le diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ a deux sommets (donc de type A_2, B_2 ou G_2). Un groupe de Chevalley tordu fini correspond à un triplet d'une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ simple non triviale sur $\mathbb{C}$, d'un automorphisme α d'ordre $n \geq 2$ du diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ et d'un corps fini $\mathbb{F}_{q^n}$. Nous dirons qu'il est de rang 2 si le quotient du diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ par α a deux sommets (donc de type ${}^2A_3, {}^2A_4, {}^3D_4$ ou ${}^2F_4$ — dans ce dernier cas, comme α ne préserve pas l'orientation des arêtes, et il faut prendre pour ordre du corps 2^{2e+1}, et on pose par convention $q^2 = 2^{2e+1}$ —).

Rappelons que tous les groupes de Chevalley [Car] Prop. 8.2.1 page 108 et groupes de Chevalley tordu [Car] Theo. 13.5.4 page 230, possèdent une (B,N)-paire. Ils agissent donc sur l'immeuble sphérique associé à cette (B,N)-paire, de manière transitive sur les paires (C, Σ), avec C une chambre et Σ un appartement contenant C (voir par exemple [Car] page 299). Si le rang est 2, alors cet immeuble sphérique est de rang 2 et B est le fixateur d'une arête. Nous noterons P_1, P_2 les fixateurs des deux sommets de cette arête, de sorte que le quotient de l'immeuble par G soit le graphe de groupes suivant :



Définition 3.3 *Nous appellerons $(G, B; P_1, P_2)$ un quadruplet de Chevalley, et noterons $C(G, B; P_1, P_2)$ l'immeuble sphérique associé, appelé graphe de Chevalley.*

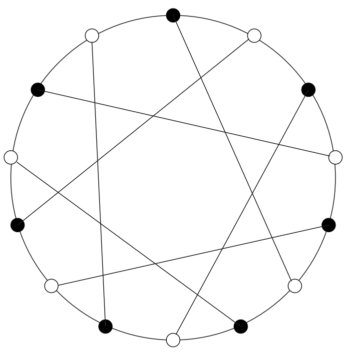


Figure 3 : Graphe d'incidence du plan projectif sur $\mathbb{F}_2$.

L'exemple qu'il faut garder en tête est celui de $G = PGL_3(\mathbb{F}_q)$, avec B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, P_1 le sous-groupe des matrices dont les coefficients

1,3 et 2,3 sont nuls et P_2 le sous-groupe des matrices dont les coefficients 1,2 et 1,3 sont nuls. L'immeuble associé $C(G, B; P_1, P_2)$ est l'immeuble des drapeaux du plan projectif sur le corps $\mathbb{F}_q$, dont les sommets sont les points P et les droites L de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ avec une arête entre P et L si et seulement si P appartient à L.

Groupe	Cardinal du groupe	Cardinal de B
$A_2(q) = PSL_3(\mathbb{F}_q)$	$\frac{1}{(3,q-1)}q^3(q^2-1)(q^3-1)$	$\frac{1}{(3,q-1)}q^3(q-1)^2$
$C_2(q) = PSp_4(\mathbb{F}_q)$	$\frac{1}{(2,q-1)}q^4(q^2-1)(q^4-1)$	$\frac{1}{(2,q-1)}q^4(q-1)^2$
${}^2A_3(q^2) = PSU_4(\mathbb{F}_{q^2})$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^6(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^6(q-1)(q^2-1)$
${}^2A_4(q^2) = PSU_5(\mathbb{F}_{q^2})$	$\frac{1}{(5,q+1)}q^{10}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^{10}(q^2-1)^2$
$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	$q^6(q-1)^2$
${}^3D_4(q^3)$	$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	$q^{12}(q^2-q+1)$
${}^2F_4(q^2)(q^2 = 2^{2e+1})$	$q^{24}(q^2-1)(q^6+1)(q^8-1)(q^{12}+1)$	$q^{24}(q^2-1)^2$

Type de l´immeuble	Paramètres de l´immeuble
A_2	$\overset{q^2+q+1}{\underset{q}{\bullet}} \text{———————} \overset{q^2+q+1}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^2+1)(q+1)}{\underset{q}{\bullet}} =\!=\!=\!=\!=\!=\!= \overset{(q^2+1)(q+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^3+1)(q+1)}{\underset{q^2}{\bullet}} =\!=\!=\!=\!=\!=\!= \overset{(q^2+1)(q^3+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^3+1)(q^5+1)}{\underset{q^2}{\bullet}} =\!=\!=\!=\!=\!=\!= \overset{(q+1)(q^2+1)(q^5+1)}{\underset{q^3}{\bullet}}$
G_2	$\overset{(q+1)(q^4+q^2+1)}{\underset{q}{\bullet}} \underset{6}{\text{———————}} \overset{(q+1)(q^4+q^2+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
G_2	$\overset{(q^3+1)(q^8+q^4+1)}{\underset{q^3}{\bullet}} \underset{6}{\text{———————}} \overset{(q+1)(q^8+q^4+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
$I_2(8)$	$\overset{(q+1)(q^3+1)(q^6+1)}{\underset{q}{\bullet}} \underset{8}{\text{———————}} \overset{(q+1)(q^3+1)(q^6+1)}{\underset{q^2}{\bullet}}$

Table 1: Immeubles sphériques finis de rang 2 provenant des groupes de type de Lie.

Dans la table ci-dessus, la notation (n, m) désigne le pgcd de n et m. Si s est le nombre en dessous d'un sommet du diagramme, la valence de ce sommet est $s + 1$. Le nombre au-dessus d'un sommet du diagramme est le nombre de sommets de l'immeuble ayant le même type que ce sommet.

Les formules pour les ordres des groupes sont issues de [Car] en utilisant Theorem 9.4.10 (page 144) et les pages 122, 155, pour les groupes de Chevalley, et Theorem 14.3.2 (page 262) pour les groupes de Chevalley tordus.

Si N est le nombre de racines positives, et d le nombre de caractères de Q/P avec Q (resp. P) le sous-groupe additif engendré par un système fondamental de poids (resp. racines), alors le cardinal du sous-groupe de Borel d'un groupe de Chevalley est, en rang 2, voir [Car] page 121:

$$|B| = \frac{1}{d}q^N(q-1)^2.$$

Pour un groupe de Chevalley tordu, si τ est l'isométrie du système de racines, si N est le nombre de racines positives, et d le nombre de caractères auto-conjugués de Q/P, et si

$\eta_1, \cdots, \eta_l$ sont les valeurs propres de τ, alors le cardinal du sous-groupe de Borel est, voir [Car] page 251:

$$|B| = \frac{1}{d} q^N (q - \eta_1) \cdots (q - \eta_l).$$

Les tables page 43, 122 et 46-47 de [Car] permettent alors de calculer $|B|$ dans le tableau ci-dessus.

Les deux dernières données sont extraites de l'appendice 6 (page 191) de [Ron].

Rappelons que les formes hermitiennes sur $\mathbb{F}_q^2$ pour l'involution $\lambda \mapsto \lambda^q$ de $\mathbb{F}_q^2$ sont équivalentes. Nous n'avons pas fait figurer les groupes de type B_2 ni de type ${}^2D_3$, à cause des isomorphismes de dualité

$$P\Omega_5(\mathbb{F}_q) = PSp_4(\mathbb{F}_q) \text{ et } P\Omega_6^-(\mathbb{F}_{q^2}) = PSU_4(\mathbb{F}_{q^2})$$

(voir respectivement [Tay] pages 196 et 198). Tous les groupes sont simples sauf $C_2(2) \simeq S_6$, $G_2(2)$ et ${}^2F_4(2)$ (voir [Car] pages 172 et 262).

Cette table montre en particulier que toutes les possibilités laissées par le théorème de Feit-Higmann sont permises.

3.1.3 L'exemple de Aschbacher-Smith

L'exemple suivant [AB] de triangle hyperbolique de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2, nous a été communiqué par P. Brown. La liste complète des triangles de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2 épais classique, est donnée par exemple dans [Mei].

Dans ce diagramme, $(G_2(2), B; P_1, P_2)$ est le quadruplet de Chevalley de type G_2 sur le corps $\mathbb{F}_2$, avec B le 2-Sylow de $G_2(2)$, d'ordre 64, d'indice 3 dans P_1 et P_2. Le groupe H d'ordre $576 = 64.3^2$ agit transitivement sur les arêtes d'un graphe biparti complet à $3+3$ sommets, de fixateur d'arête B, et fixateurs de sommets deux copies de P_2.

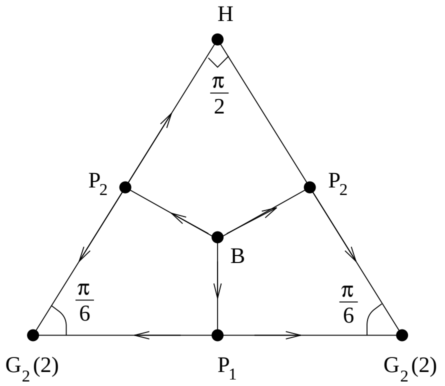


Figure 4 : Triangle hyperbolique de groupes.

D'après le résultat de A. Zuk [Zuk] (voir aussi [BS]), le groupe fondamental de ce triangle de groupes a la propriété T de Kazhdan. Nous ne savons pas s'il est un quotient d'un réseau uniforme du groupe des isométries de l'espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique octonien.

3.1.4 Vers une classification des immeubles fuschiens homogènes

Les exemples ci-dessous donnent une liste (que nous conjecturons essentiellement complète) d'immeubles hyperboliques de dimension 2 *homogènes* (i.e. admettant un groupe discret d'automorphisme transitif sur les chambres) et *classiques* (i.e. dont les links sont des bigones généralisés ou des polygones généralisés associés à un quadruplet de Chevalley).

Si $C(G, B; P_1, P_2)$ est un graphe de Chevalley, le groupe $\mathrm{Aut}_0\, C(G, B; P_1, P_2)$ des automorphismes préservant le type de $C(G, B; P_1, P_2)$ est, d'après [Tit1, cor. 5.9], extension de G par le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{F}_q$ sous-jacent.

Théorème 3.4 *(G. Seitz [Sei]) Si $(G, B; P_1, P_2)$ est un quadruplet de Chevalley, si H est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_0\, C(G, B; P_1, P_2)$ agissant transitivement sur les chambres, alors ou bien H contient G, ou bien (G, H) est de la forme suivante:*

$G = PSL_3(2)$ et $|H| = 3.7$
$G = PSL_3(8)$ et $|H| = 3^2.73 \quad (H \subset P\Gamma L_3(8))$
$G = PSp_4(2) \simeq S_6$ et $H \simeq A_6$
$G = G_2(2)$ et $H = G_2(2)'$
$G = {}^3F_4^3$ et $H = F_4(2)'$
$G = PSp_4(3) \simeq PSU_4(2^2)$ et H est un sous – groupe parabolique maximal de $PSU_4(2^2)$ d'ordre $2^6.3.5$. □

En négligeant les éventuelles possibilités d'isomorphismes venant des automorphismes des corps, et des cas particuliers précédents, nous pouvons donc supposer que les groupes de sommet d'un polygone de groupes finis dont le revêtement universel est un immeuble hyperbolique sont des groupes finis de type de Lie.

Si $(G, B; P_1, P_2)$ et $(G', B'; P_1', P_2')$ sont deux quadruplets de Chevalley distincts, la paire (P_1, B) n'est jamais isomorphe à la paire (P_1', B'). En effet, un simple calcul de l'ordre de P_1/B (qui vaut $q^\alpha + 1$ d'après la table 1, avec $\alpha = 1, 2$ ou 3 et q l'ordre du corps) montre que la caractéristique p doit être la même. Alors le p-Sylow U de B doit être isomorphe à celui pour B'. En utilisant que l'ordre de U est la puissance de q dans l'expression de l'ordre de B (voir [Car]), et en examinant les ordres des groupes B, on en déduit que B et B' ne peuvent pas être isomorphes.

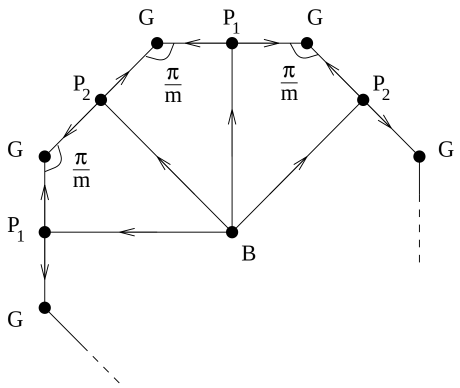


Figure 5 : Polygone hyperbolique régulier de groupes.

De plus, il n'existe pas d'isomorphisme de P_1 sur P_2 fixant point par point B. En effet, notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ les racines positives dans l'ordre croissant, et U_{α_i} les groupes de racine correspondants, de sorte que P_1 est engendré par B et $U_{-\alpha_1}$, et P_2 par B et $U_{-\alpha_m}$. Un isomorphisme de P_1 sur P_2 fixant B envoie le centralisateur de U_{α_m} dans P_1 sur celui dans P_2. Comme $U_{-\alpha_1}$ centralise U_{α_m}, mais que le centralisateur de U_{α_m} dans P_2 est contenu dans B, ceci est impossible.

Donc si les groupes de sommet d'un polygone de groupes sont tous des groupes finis de type de Lie, alors le polygone P a un nombre pair $2p$ de côtés, et les groupes de sommet sont constants (voir figure ci-dessus). Si toutes les flèches sont les inclusions évidentes, on obtient bien un polygone de groupes. Rappelons que tout automorphisme σ du corps fini $\mathbb{F}_q$ sous-jacent induit un automorphisme de G qui préserve B, P_1 et P_2. Pour toute partie A de l'ensemble des sommets, on peut remplacer les trois inclusions arrivant dans le groupe d'un sommet de A en les inclusions composées par l'automorphisme induit par σ. On obtient encore un polygone de groupes.

Supposons qu'il existe $\sigma : G \to G$ un isomorphisme de type graphe de G, d'ordre 2 avec $\sigma(P_1) = P_2$ et $\sigma(B) = B$. Par exemple, si $G = PSL_3(\mathbb{F}_q)$, on peut prendre σ la composée de l'inverse et de la transposition par rapport à l'antidiagonale. Alors l'immeuble hyperbolique donné par le polygone de groupes ci-dessus (avec pour flèches les inclusions) peut aussi être défini par un triangle de groupes.

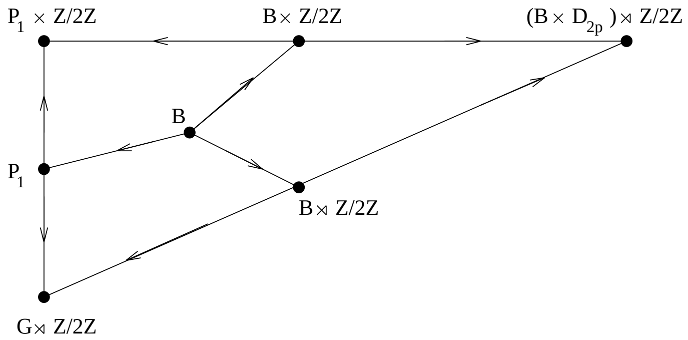


Figure 6 : Un triangle non épais de groupes.

En effet, si $2p$ est le nombre de côtés du polygone, alors le polygone de groupe a une symétrie évidente par un groupe d'ordre $4p$, de quotient le triangle de groupes ci-dessus. Le groupe D_{2p} est le groupe diédral d'ordre $2p$, de présentation $\langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^p = 1\rangle$. Dans les produits semi-directs, le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur G et B par σ et sur D_{2p} par permutation de a et b. L'inclusion de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans D_{2p} est celle envoyant le générateur sur a. Les morphismes sont alors ceux évidents.

Il reste donc à comprendre quand une paire (P_1, B) d'un quadruplet de Chevalley $(G, B; P_1, P_2)$ est isomorphe à une paire (P_1, B) d'un groupe agissant transitivement sur les chambres d'un bigone généralisé (voir section précédente pour un exemple).

Un cas particulier important est quand B est trivial, car la deuxième condition de la proposition 3.1 disparaît. Par le théorème de Seitz 3.4 ci-dessus, il existe exactement deux groupes d'automorphismes H agissant simplement transitivement sur les chambres d'un m-gone généralisé classique avec $m \geq 3$, celui associé à $G = PSL_3(2)$ (voir figure 5) et $G = PSL_3(8)$, où H est respectivement d'ordre 3.7 et 3^2.73.

Si G_i agit simplement transitivement sur les chambres d'un m_i-gone généralisé, avec stabilisateurs de sommets $P_{1,i}, P_{2,i}$, on obtient par la figure ci-dessous d'autres familles de polygones de groupes du modèle cherché (toujours avec un nombre pair de côtés).

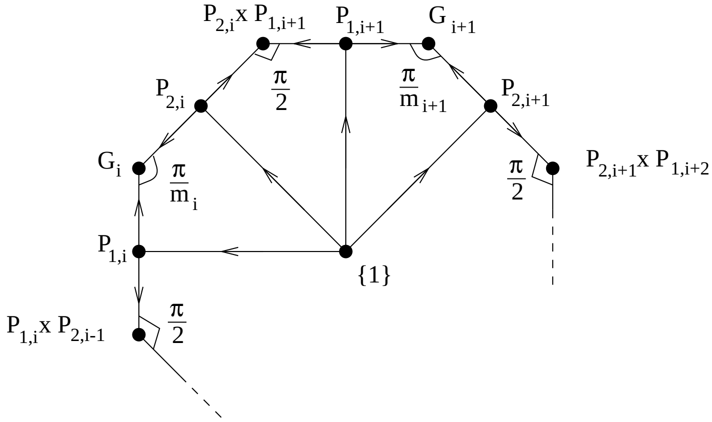


Figure 7 : Polygone hyperbolique de groupes avec angles droits.

Enfin, considérons $\mathcal{T}$ un triangle de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2 épais classique (voir la classification de Timmesfeld-Meixner-Stroth [Mei]), de groupes de sommets respectivement G_1, G_2, G_3, dont les angles sont nécessairement de la forme $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}$ respectivement, avec $m = 6$ ou 8, et la caractéristique ne peut être que 2 ou 3. Considérons une partition de $p = p_1 + \cdots p_{3s}$ avec $s \geq 1$ et les p_i entiers impairs. Soit P un polygone hyperbolique d'angles aux p_1 premiers sommets $\frac{\pi}{2}$, aux $p_2 + p_3$ sommets suivants $\frac{\pi}{m}$, etc (dans un ordre cyclique). On munit alors P de la structure de polygones de groupes, de groupes des p_1 premiers sommets G_1, des p_2 sommets suivants G_2, des p_3 sommets suivants G_3, etc, avec les groupes d'arête donnés par ceux de $\mathcal{T}$ (ce qui est cohérent, car p_i est impair).

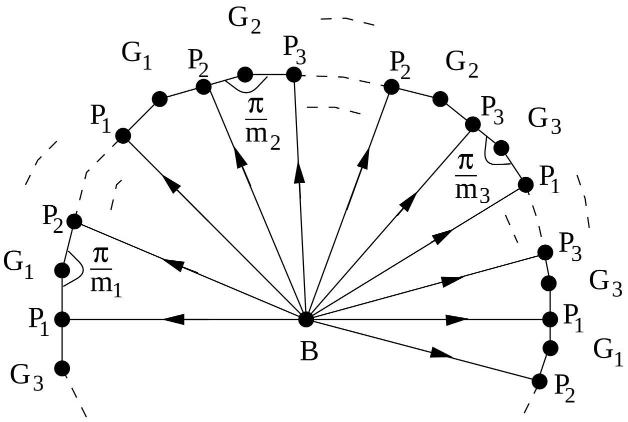


Figure 8 : Polygone hyperbolique de groupes exotiques.

3.2 Déformations d'immeubles fuschiens et revêtements branchés d'immeubles euclidiens

Si X est un immeuble hyperbolique de dimension 2, de chambre un polygone régulier P à un nombre pair de côtés, alors les techniques de F. Haglund [Hag] (voir aussi [BB]) permettent de construire des nouveaux exemples, qui n'admettent pas en général de sous-groupe discret cocompact d'isométries.

Appelons *diamètre de* P l'intersection avec P de la droite médiatrice d'un côté de P. Appelons *mur* de X (voir [HP]) la réunion des géodésiques de X contenant un diamètre de chambre de X donné.

Soient X^+, X^- les adhérences des deux composantes connexes de X privé d'un mur M, et M^+, M^- les traces de M dans X^+, X^-. Soit $\phi : M^+ \to M^-$ une isométrie polyédrale. Alors le complexe polygonal X_ϕ obtenu en recollant X^+, X^- par ϕ est un immeuble hyperbolique de dimension 2 de même type que X (ses links n'ont pas changé et on applique le corollaire 2.4).

Dans le cas de l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$, le graphe biparti complet étant trop flexible, tous les immeubles ainsi obtenus sont polyédralement isométriques. Par contre, si L est un m-gone généralisé classique de caractéristique assez grande, pour tout sommet s de L et arête a de L dont un sommet est s, il existe un automorphisme de l'étoile de s dans L, fixant a, qui ne s'étend pas en un automorphisme de L. Les techniques de [HP] permettent alors de montrer le fait suivant.

Théorème 3.5 *Soit P un polygone hyperbolique régulier d'angle π/m avec $m \geq 3$, ayant un nombre pair de côtés. Soit L un m-gone généralisé classique de caractéristique assez grande. Alors il existe une infinité non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type $(W(P), S(P))$, dont tous les links sont isomorphes à L.* □

Le résultat est beaucoup plus difficile dans le cas des immeubles triangulaires euclidiens d'ordre 2, voir [Bar].

Proposition 3.6 *Si X est un immeuble euclidien ou hyperbolique de dimension 2, et n un entier au moins 2, alors un revêtement de X branché d'ordre n au centre de chaque chambre de X admet une structure d'immeuble hyperbolique $\tilde{X}(n)$ de dimension 2. Si X admet un sous-groupe discret cocompact d'automorphismes, alors $\tilde{X}(n)$ aussi.*

Preuve. Si X^* est l'espace topologique X privé des barycentres de ses chambres, alors par contractibilité de X, avec un choix de point base arbitraire, le groupe fondamental $\pi_1 X^*$ de X^* est un produit libre infini $*_{\mathbb{N}}\, \mathbb{Z}$ de groupes infinis cycliques, avec un $\mathbb{Z}$ pour chaque chambre de X. Pour tout entier n, fixons une surjection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cette suite de surjections induit une surjection ρ du produit libre $*_{\mathbb{N}}\, \mathbb{Z}$ sur le produit libre $*_{\mathbb{N}}\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le complété du revêtement de X^* induit par ρ est l'espace $\tilde{X}(n)$ cherché, en tant que CW-complexe. Si C est une chambre de X, alors par Gauss-Bonnet, le revêtement d'ordre $n \geq 2$ branché au barycentre de C admet une structure de polygone hyperbolique, dont les angles correspondent à ceux de C par l'application de revêtement. En munissant les chambres de $\tilde{X}(n)$ de cette structure, le fait que $\tilde{X}(n)$ est un immeuble hyperbolique de dimension 2 découle alors du corollaire 2.4, les links n'ayant pas changés. □

Nous renvoyons à [Bou] pour un autre procédé d'hyperbolisation des immeubles euclidiens. Comme dans [Bou], en tirant en arrière par revêtement branché, nous en déduisons que tout réseau dans un groupe algébrique semi-simple de rang 2 sur un corps local (comme $PSL_3(K)$ avec K égal à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}((t))$ ou à une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) admet une extension (de noyau un produit libre infini de copies de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) qui est un réseau dans un immeuble fuschien. En fait, $\mathrm{Aut}(\tilde{X}(n))$ contient un sous-groupe $G(n)$ qui s'insère dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow *_{\mathbb{N}}\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G(n) \longrightarrow \ \mathrm{Aut}_0(I) \longrightarrow 1.$$

Si $\mathrm{Aut}_0(I)$ agit transitivement sur les chambres de I, alors $G(n)$ agit aussi (sans préserver le type) transitivement sur les chambres de $\tilde{I}(n)$, les fixateurs de points de $G(n)$ s'envoyant isomorphiquement sur les fixateurs correspondants dans $\mathrm{Aut}_0(I)$.

3.3 Polyèdres hyperboliques à angles droits

Soit P un polyèdre hyperbolique de volume fini, à angles dièdres droits (si sa dimension est au moins 3), et soit P_∞ l'ensemble de ses sommets à l'infini.

En dimension 2, il est facile de classer ces polyèdres (il y a des modules). En dimension 3, le théorème d'Andreev [And] permet de les caractériser par la combinatoire de leur bord. (Dans le cas compact, ce sont exactement les cellulations duales des triangulations de la sphère de dimension 2 différentes du simplexe et du dual du prisme, telles que tout cycle d'arêtes de longueur trois dans cette triangulation borde une face.) Par exemple, il existe un dodécaèdre hyperbolique régulier à angles droits. D'après une communication d'I. Rivin, il y a une infinité de P en dimension 4, et aucun en dimension au moins 5.

Si $I = I(P)$ est l'ensemble des faces de codimension 1 de P, soit G_i un groupe fini de cardinal $n_i \geq 2$ pour tout i dans I (par exemple $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$). Si σ est une face de P différente d'un sommet à l'infini, disons que $\sigma = \cap J$ pour $J \subset I$ (avec par convention $J = \emptyset$ si $\sigma = P$), et posons $G_\sigma = \prod_{j\in J} G_j$. Comme P est un polyèdre de Coxeter, les links de ses faces (différentes d'un sommet à l'infini) sont des simplexes (voir [Vin]). Donc l'écriture $\sigma = \cap J$ existe et est unique.

Si $\sigma = \cap J$ est une face propre de $\tau = \cap K$ (avec $\sigma \notin P_\infty$) et a est l'arête de la subdivision barycentrique de P d'origine τ et d'extrémité σ, posons $\psi_a : G_\tau = \prod_{i\in K} G_i \to G_\sigma = \prod_{i\in J} G_i$ le morphisme de groupe injectif évident donné par l'inclusion $K \subset J$.

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{C} = (P, \{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un complexe de groupes simple dont le développement local d'une face $\sigma = \cap J \notin P_\infty$ de dimension k est une suspension sphérique k-ème d'un joint sphérique itéré d'ensembles finis à n_j éléments pour j parcourant J. En particulier $\mathcal{C}$ est à courbure négative.

Par la section 1.5, la limite inductive Γ des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un groupe discret d'isométries d'un complexe polyédral CAT(-1) localement fini $\tilde{X}$ (le revêtement universel de $\mathcal{C}$).

3.4 Polyèdres idéaux

Nous construisons ci-dessous des exemples de groupes paraboliques discrets d'isométries de complexes polyédraux CAT(-1), qui sont contenus dans des groupes discrets de covolume fini.

Soit X un complexe polyédral hyperbolique fini, avec X_∞ non vide (i.e. dont au moins l'une des cellules a au moins un point à l'infini) et $\mathcal{C}$ un complexe de groupes finis sur X. Soit $x_0 \in X_\infty$, le link de x_0 dans X hérite de $\mathcal{C}$, comme dans la section 1.5, une structure de complexe de groupes, notéee $\mathcal{C}_{x_0}$.

Supposons $\mathcal{C}$ à courbure négative (au sens de la section 1.5), et notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de $\mathcal{C}$ (qui existe par le théorème 1.6). Alors $\tilde{X}$ est un complexe polyédral

CAT(-1) localement compact. L'action sur $\tilde{X}$ du groupe fondamental de $\mathcal{C}$ est discrète, car les fixateurs de cellules sont finis (et de covolume fini, car X est de volume fini).

Le complexe de groupes $\mathcal{C}_{x_0}$ est développable. Ceci découle des techniques de [Hae], mais en utilisant la structure euclidienne des horosphères, et la condition de courbure négative de $\mathcal{C}$, il est facile de munir $\mathcal{C}_{x_0}$ d'une structure de complexe de groupes à courbure négative. Soit G_{x_0} le groupe fondamental de $\mathcal{C}_{x_0}$.

Alors il découle des résultats de [Hae] que G_{x_0} s'injecte dans le groupe fondamental de $\mathcal{C}$, et est exactement le stabilisateur d'un point à l'infini de $\tilde{X}$ (au-dessus de x_0). Une horosphère de $\tilde{X}$ suffisamment petite centrée en ce point est isométrique (pour la métrique de longueur induite) au revêtement universel de $\mathcal{C}_{x_0}$ (avec la structure ci-dessus construite). Comme G_{x_0} préserve ces horosphères, c'est un groupe parabolique.

Comme X n'a qu'un nombre fini de cellules, en prenant dans X une horosphère suffisamment petite centrée en chaque point de X_∞, et en prenant l'image réciproque dans le revêtement universel $\tilde{X}$, on obtient une famille équivariante d'horoboules centrées en tous les points paraboliques, ces horosphères étant de plus à distance minorée par une constante strictement positive. Il découle alors de la proposition 5.12 de [Bow2] que le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C})$ est un groupe géométriquement fini au sens de Tukia-Bowditch [Tuk, Bow2] et est hyperbolique relativement à l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques maximaux, au sens de Gromov-Farb-Bowditch [Bow2].

Supposons que G_{x_0} contienne un groupe libre de rang 2. Par la proposition 1.6 de [BM], puisqu'un groupe qui contient un groupe libre de rang 2 n'est pas moyennable, l'exposant critique de G_{x_0} est infini. Donc la dimension de Hausdorff du bord du revêtement universel $\tilde{X}$ est infinie, ce qui montre la proposition 0.3, à l'aide des exemples suivants et après épaissisement pour obtenir des variétés (la courbure n'étant pas minorée près des points fixes paraboliques).

Exemple : Donnons maintenant une famille d'exemples explicites.

D'après la remarque 3.2), l'exemple le plus simple est un triangle idéal de groupes finis, de groupe du triangle trivial, et groupes des arêtes les groupes finis A, B, C. Le groupe fondamental est le produit libre $A*B*C$, les sous-groupes paraboliques maximaux sont les conjugués de $A*B$, $A*C$ et $B*C$, qui contiennent un groupe libre de rang 2 si A, B, C sont de cardinal au moins 3. Les horosphères sont isométriques pour la distance de longueur induite aux arbres de Bass-Serre des produits libres $A*B$, $A*C$ et $B*C$. Mais toute droite géodésique dans un tel arbre est contenue dans une copie d'un plan hyperbolique, et y est une horosphère, donc est exponentiellement distordue pour la distance induite. Dans ce cas, il est facile de montrer directement que la série de Poincaré diverge en tout exposant fini et que la dimension de Hausdorff du bord est infinie. Le bord est une courbe (compact connexe métrisable, de dimension topologique 1), dont les seuls points de coupure locaux sont les points fixes paraboliques. Il est homéomorphe à l'espace topologique quotient du Cantor des bouts de l'arbre de Bass-Serre du produit libre $A * B * C$ par la relation d'équivalence qui écrase en un point l'ensemble limite de chaque conjugué de $A * B$, $A * C$ ou $B * C$.

Soit P un polyèdre hyperbolique idéal (i.e. tous ses sommets sont à l'infini) à angles dièdres droits. Reprenons la construction et les notations de la section 3.3 précédente.

Par le raisonnement précédent, la limite inductive Γ des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un groupe discret non élémentaire d'isométries d'un complexe polyédral CAT(-1) localement fini $\tilde{X}$. Soit x un sommet de P. Si Γ_x est la limite inductive des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ pour σ parcourant l'ensemble des faces de P contenant strictement x, alors Γ_x est un sous-groupe de Γ fixant un point à l'infini de $\tilde{X}$.

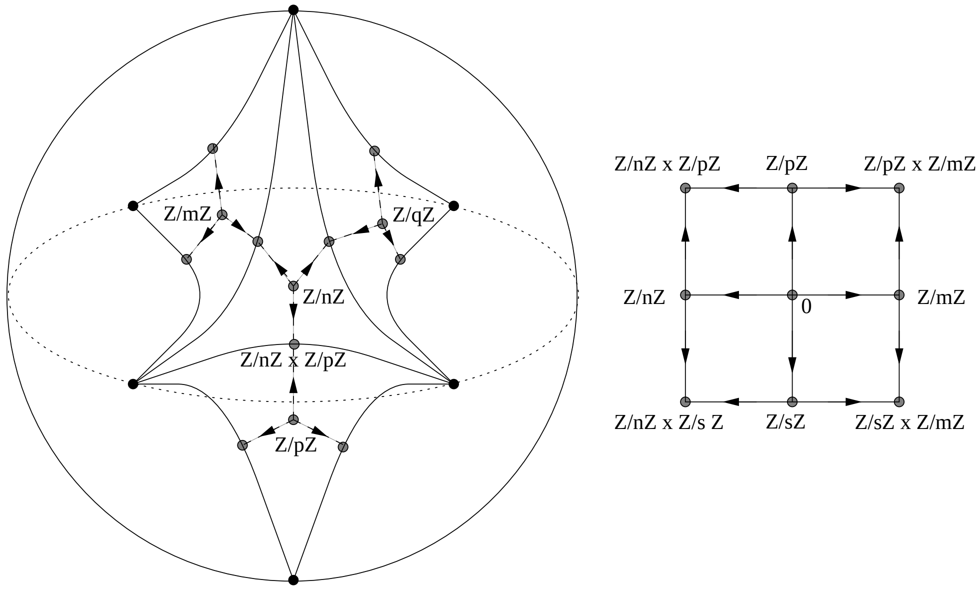


Figure 9 : Octaèdre hyperbolique idéal à angles droit.

Si, pour une face i de codimension 1 contenant x, l'un des n_i, disons n_{i_0}, est au moins 3, alors le groupe de type fini G_x contient un groupe libre de rang 2, donc n'est pas virtuellement nilpotent. En effet, G_x a pour présentation

$$G_x = \langle *_{\{i\,/\,x \in i\}} G_i \;\mid\; [G_i, G_j] = 1 \;\text{ si }\; i \cap j \neq \{x\} \rangle$$

Comme le link de x dans P est combinatorialement un cube (c'est un polyèdre euclidien à angles droits), si j_0 est la face de codimension 1 de P opposée à i_0 dans le link de x, alors les applications canoniques (la première injective, la seconde surjective) de composée l'identité

$$G_{i_0} * G_{j_0} \to *_{\{i\,/\,x\in i\}} G_i \to G_{i_0} * G_{j_0}$$

induisent des applications

$$G_{i_0} * G_{j_0} \to G_x \to G_{i_0} * G_{j_0}$$

de composée l'identité. Donc G_x contient un produit libre de deux groupes finis d'ordre l'un au moins 2, l'autre au moins 3, donc contient un groupe libre de rang 2.

3.5 Polyèdres hyperideaux tronqués

Certains polyèdres hyperboliques hyperidéaux P (i.e. dans le modèle projectif de $\mathbb{H}^n$, ce sont des polyèdres dont les sommets sont contenus dans le complémentaire de l'adhérence de $\mathbb{H}^n$, et dont les arêtes rencontrent $\mathbb{H}^n$), une fois tronqués par les hyperplans polaires des sommets, sont des polyèdres de Coxeter (voir [VS]). Nous en donnons ci-dessous une famille (à quatre paramètres k, m, q, s) en dimension 3, munie d'une structure de polytope de groupes.

Pour tous entiers $k \geq 4$ et $m \geq 2$, avec k pair et $m \geq 3$ si $k = 4$, il existe un (unique) polyèdre hyperbolique hyperidéal de dimension 3, dont les angles dièdres sont $\frac{\pi}{m}$ et qui est combinatoirement la suspension d'un k-gone (voir figure ci-dessous si $k = 6$). En tronquant par les hyperplans polaires des sommets, on obtient un polyèdre hyperbolique de Coxeter $P = P(k, m)$, dont les angles dièdres aux arêtes intersections avec les hyperplans polaires sont $\pi/2$. Nous appelerons *nouvelles* les faces et arêtes de P contenues dans des hyperplans polaires, et *originelles* les autres.

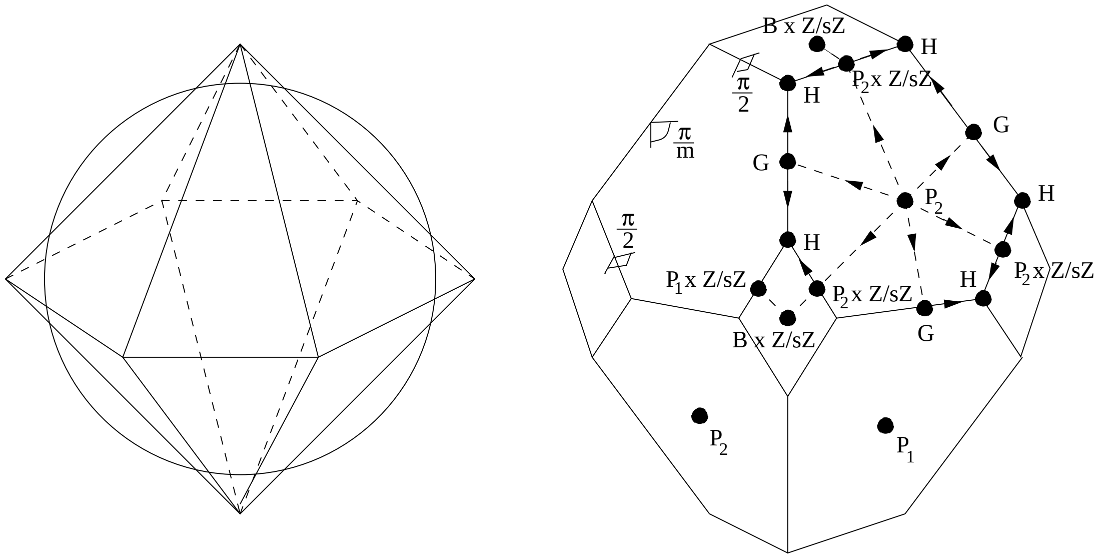


Figure 10 : Octaèdre hyperidéal tronqué.

Pour tout quadruplet de Chevalley $(G, B; P_1, P_2)$ dont l'immeuble est un m-gone généralisé, et tout entier $s \geq 2$, donnons une structure de polytope de groupes sur P.

Le groupe de P lui-même est B. Le groupe d'une face originelle est P_1 ou P_2, de sorte que deux telles faces se rencontrant en une arête n'ont pas le même groupe. Ceci est possible car k est pair. Le groupe d'une face nouvelle est $B \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Le groupe d'une arête originelle est G. Le groupe d'une arête nouvelle est $P_i \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ si elle est contenue dans une face originelle de groupe P_i. Enfin, le groupe d'un sommet est le groupe $H = G \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Les morphismes de groupes sont les inclusions évidentes. Le groupe H agit naturellement sur l'immeuble sphérique qui est le cône sphérique itéré s fois sur le graphe de Chevalley $C(G, B; P_1, P_2)$. L'action est transitive sur les chambres, et le quotient est bien le triangle sphérique de groupes induit sur le link d'un sommet de P.

Par le théorème 2.1, ce polytope de groupes est développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$. Le groupe fondamental du polytope de groupe est un sous-groupe discret cocompact d'isométries polyèdrales de l'immeuble, préservant le type, et il agit transitivement sur les chambres.

4 Cohomologie à l'infini des immeubles

Soit X un espace métrique CAT(0) complet localement compact. Rappelons que l'on note ∂X l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques $r : [0, +\infty[\to X$ pour la relation d'équivalence $r \sim r'$ si les images de r et r' restent à distance de Hausdorff finie. Il existe (voir [GH, BH]) sur la réunion disjointe $\overline{X}$ de X et de ∂X une et une seule topologie qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\overline{X}$ est métrisable, compact, contractile,

- la topologie induite sur X est la topologie originelle de X, et X est un ouvert dense dans $\overline{X}$,

- l'action du groupe des isométries de X s'étend continuement en une action continue sur $\overline{X}$,

- une suite de points $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X converge vers un point a de ∂X si et seulement si la suite des x_i sort de tout compact et la suite des segments géodésiques entre x_0 et x_i reste à distance bornée de l'image d'un rayon géodésique représentant a.

Pour tout point x de X et toute suite croissante de réels $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, considérons la suite des sphères $S(x, r_i)$ de centre x et rayon r_i, et la suite des applications $p_i : S(x, r_{i+1}) \to S(x, r_i)$ qui à un point y de $S(x, r_{i+1})$ associe l'unique point à distance r_i de x sur l'unique géodésique entre x et y. Par inégalité CAT(0), les applications p_i sont continues.

Pour tout i, considérons l'application $f_i : \partial X \to S(x, r_i)$, qui à un point a associe l'unique point à distance r_i de x sur l'unique rayon géodésique issu de x représentant a. Il est clair par inégalité CAT(0) que les f_i sont continues, et que $f_i = p_i \circ f_{i+1}$.

Considérons $S(x, \infty) = \varprojlim S(x, r_i)$ la limite projective des $\{S(x, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}, \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, munie de la topologie limite projective. Comme les $S(x, r_i)$ sont compacts, $S(x, \infty)$ l'est aussi.

Les applications f_i induisent une application continue $f_\infty : \partial X \to S(x, \infty)$. Il est immédiat qu'elle est injective (si deux rayons géodésiques coïncident sur tous les segments $[0, r_i]$, ils sont égaux) et surjective. Comme les espaces ∂X et $S(x, \infty)$ sont compacts, l'application f_∞ est un homéomorphisme.

Supposons maintenant que X est un immeuble euclidien ou hyperbolique localement fini. Fixons-nous x un point de X, intérieur à une chambre c_0. Remarquons que la fonction distance à x est une fonction C^1 dans l'intérieur de chaque chambre c, car chaque appartement est totalement géodésique, et il existe au moins un appartement contenant c_0 et c. Par locale finitude, il existe donc une suite strictement croissante de réels s_i, avec $s_0 = 0$, telle que pour s différent d'un s_i, la sphère $S(x, s)$ n'est tangente à aucune cellule de X (de codimension non nulle). Par un argument de dénombrabilité et par convexité stricte des sphères dans l'espace euclidien ou hyperbolique, nous pouvons supposer que les points de tangences des sphères $S(x, s_i)$ avec une cellule sont à l'intérieur de cette cellule. Posons $r_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})$.

Proposition 4.1 *L'espace topologique $S(x, r_i)$ a le type d'homotopie d'un bouquet fini de sphères de dimension $n-1$, si les appartements de X sont de dimension n. Si X est épais, alors le nombre de sphères du bouquet tend vers l'infini quand $i \to \infty$.*

Preuve. Il suffit de se placer au voisinage d'un point de tangence y entre la sphère $S(x, s_i)$ et une cellule ouverte de X. Notons v le point du link de X en y correspondant au germe de segment géodésique de y vers x. Alors $S(x, s_i + \epsilon)$ est obtenue (dans ce voisinage) à partir de $S(x, s_i - \epsilon)$ en faisant une somme connexe avec le link de y, le long d'une boule de ce link de centre v et de rayon $< \frac{\pi}{2}$.

Rappelons (voir [Ron]) qu'un immeuble sphérique fini de dimension p a le type d'homotopie d'un bouquet fini de sphères de dimension p, et que toute boule ouverte de rayon $\leq \frac{\pi}{2}$ est contractile.

Le résultat en découle. $\square$

Théorème 4.2 *Soit X un immeuble euclidien ou hyperbolique localement fini de dimension n. Alors $H_c^k(X;\mathbb{Z})$ est nul pour $k \neq n$ et abélien libre pour $k = n$, de dimension infinie si X est épais.*

Preuve. Notons $\tilde{H}_c^k(Y;\mathbb{Z}))$ le k-ème groupe de cohomologie réduite d'Alexander-Spanier d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$. Comme $\overline{X}$ est compact contractile et ∂X fermé dans $\overline{X}$, on a par la suite exacte de cohomologie à support compact relative

$$H_c^k(X;\mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}^{k-1}(\partial X;\mathbb{Z}).$$

Notons $\tilde{\check{H}}^k(Y;\mathbb{Z}))$ le k-ème groupe de cohomologie réduite de Cěch d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$. Comme ∂X est compact, on a

$$\tilde{H}^k(\partial X;\mathbb{Z}) \simeq \tilde{\check{H}}^k(\partial X;\mathbb{Z}).$$

Comme ∂X est homéomorphe à la limite projective des sphères $S(x,r_i)$, on en déduit

$$\tilde{\check{H}}^k(\partial X;\mathbb{Z}) \simeq \varinjlim \tilde{\check{H}}^k(S(x,r_i);\mathbb{Z}).$$

Comme une limite inductive de groupes abéliens libres est un groupe abélien libre, le résultat découle de la proposition précédente. $\square$

Bibliographie

[AS] U. Abresch, V. Schroeder, *Graph manifolds, ends of negatively curved manifolds and the hyperbolic 120-cell space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 299-336.

[And] E.M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskii space*, Math. USSR Sb. **12** (1970), 413–440.

[AB] M. Ashbacher, S. Smith, *Tits geometries over GF(2) defined by groups over GF(3)*, Comm. Alg. **11** (1983) 1675–1684.

[BB] W. Ballmann, M. Brin, *Polygonal complexes and combinatorial group theory*, Geom. Dedicata **50** Série I (1994) 165-191.

[BS] W. Ballmann, J. Swiatkowski, *On L^2-cohomologie and property (T) for automorphism groups of polyedral cell complexes*, GAFA **7** (1997) 615-645.

[Bar] S. Barré, *Polyèdres finis de dimension 2 à courbure ≤ 0 et de rang 2*, Ann. Inst. Four. Grenoble **45** (1995) 1037-1059.

[Bour] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5,6, Hermann, Paris, 1968.

[Bou] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuschiens*, prépublication Nancy 1998.

[Bow1] B. Bowditch, *Discrete parabolic groups*, J. Diff. Geom. **38** (1993), 559-583.

[Bow2] B. Bowditch, *Relatively hyperbolic groups*, prépublication Univ. Southampton 1997.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, livre en préparation.

[Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.

[Bug] V. Bugaenko, *Groups of automorphisms of unimodular hyperbolic quadratic forms over the ring* $\mathbb{Z}[(\sqrt{5}+1)/2]$, Moscow Univ. Math. Bull. **39** (1984) 6-14.

[BM] M. Burger, S. Mozes, *CAT(*-1*) spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-94.

[Car] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Pure Appl, Math. **28**, Wiley (1972).

[CSM] R.W. Carter, G. Segal, I. MacDonald, *Lectures on Lie algebras and Lie groups*, Lond. Math. Soc. Student Texts **32**, Cambridge Univ. Press, 1995.

[CT] C. Charitos, G. Tsapongas, *Geodesic flow on ideal polyedra*, à paraitre dans Can. J. Math.

[CD] R. Charney, M. Davis, *Singular metrics of nonpositive curvature on branched covers of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **115** (1993), 929-1009.

[DP] F. Dal'bo, M. Peigné, *Géodésiques fermées et pointes en courbure variable*, C.R. Acad. Sci. Paris I **322** (1996) 939-944.

[Dav1] M. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983) 293-324.

[Dav2] M. Davis, *Buildings are CAT(0)*, prépublication, Ohio State University 1994, à paraître dans "Geometry and cohomology in group theory", Lect. Notes Ser. Lond. Math. Soc.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe, eds. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.

[Hae] A. Haefliger, *Complexes of groups and orbihedra*, dans "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 504-540 World Scientific, 1991.

[Hag] F. Haglund, *Les polyèdres de Gromov*, Thèse, ENS Lyon, 1992.

[HP] F. Haglund, F.Paulin, *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative*, Prépublication Univ. Orsay (1997).

[Har] P. de la Harpe, *An invitation to Coxeter groups*, dans "Group theory from a geometrical viewpoint " (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 193-253, World Scientific, 1991.

[Hum] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kle] B. Kleiner, en préparation.

[Mei] T. Meixner, *Groups acting transitively on locally finite classical Tits Chamber systems*, dans "Finite geometries, buildings and related topics", W. Kantor, R. Liebler, S. Payne, E. Shult, Oxford Univ. Press. 1990.

[Mou] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter group*, Doctoral Dissertation, Ohio State University, 1988.

[Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[Sei] G. Seitz, *Flag transitive subgroups of Chevalley groups*, Ann. Math. **97** (1973) 27-56.

[Tay] D.E. Taylor, *The geometry of the classical groups*, Sigma Ser. Pure Math. **9**, Heldermann 1992.

[Tit1] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes **386**, Springer Verlag, 1974.

[Tit2] J. Tits, *Building and group amalgamations*, Proc. Groups - St-Andrew 1985, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **121**, Camb. Univ. Press 1987, pp. 110-127.

[Tit3] J. Tits, *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées*, Bull. Soc. Math. Belgique, Ser. A **38** (1986) 367-387.

[Tuk] P. Tukia, *Conical limit points and uniform convergence groups*, prépublication, Univ. Helsinki 1996.

[Vin] E.B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups*, Russian Math. Surveys **40** (1985), 31-75.

[VS] E. Vinberg, O. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, in "Geometry II: Spaces of constant curvature", E. Vinberg ed., Enc. Math. Scien **29**, Springer Verlag 1993, 139-248.

[Zuk] A. Zuk, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, Comp. Rend. Acad. Scien. Paris **323** (1996), 453-458.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 128 CNRS
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07, FRANCE
gaboriau@umpa.ens-lyon.fr

Laboratoire de Topologie et Dynamique, URA 1169 CNRS
Bât. 425, Université Paris XI
91405 ORSAY, FRANCE
Frederic.Paulin@math.u-psud.fr