publications d'Orsay

Seminaire de

Geometrie Algebrique

1969/1970

69/70

0. IMAGES DIRECTES ET RECIPROQUES DE FAISCEAU.

0.1. Espaces étalés et faisceaux.

1) Soit $E \xrightarrow{p} X$ une application continue. On dit que p est étale quand pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que p soit un homéomorphisme de U sur son image. On dit aussi que (E,p) est un espace étalé sur X.

Il est clair que id est étale, et que le composé de deux morphismes étal est encore étale.

Soient (E,p) et (F,q) deux espaces étalés sur X. Un morphisme $(E,p) \to (F,q)$ est une application continue $f : E \to F$ telle que le triangle suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Remarque : Il est alors facile de vérifier que f est étale.

Si $E \xrightarrow{p} X$ est un espace étalé et si $x \in X$, on appelle fibre en x de l'espace étalé l'ensemble $p^{-1}(x)$. La topologie induite sur la fibre est discrète.

2) Faisceau associé à un espace étalé. Soit $E \xrightarrow{p} X$ un espace étalé. Pour tout ouvert $U \subset X$ notons $\Gamma(U,E)$ l'ensemble des sections continues $U \xrightarrow{s} E$ $(p \circ s = \mathrm{id})$.

Si $V \subset U$, alors le morphisme de restriction $\Gamma(U,E) \to \Gamma(V,E)$ est évident. On obtient ainsi un faisceau $\mathcal{F}$ sur X . L'application qui à (E,p) fait correspondre $\mathcal{F}$ est un foncteur covariant T de la catégorie des espaces étalés sur X dans celle des faisceaux sur X .

Réciproquement, considérons un faisceau $\mathcal{F}$ sur X , et un point $x \in X$. On appelle <u>fibre de</u> $\mathcal{F}$ <u>en</u> x l'ensemble $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ et on pose

$$E = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x .$$

On munit E de la projection p qui à $a \in \mathcal{F}_x$ fait correspondre x . Maintenant, l'application canonique de $\mathcal{F}(U)$ dans la limite inductive $\mathcal{F}_x$ notée $s \mapsto s_x$, induit une application $\tilde{s} : U \to E$ définie ainsi :

$$\tilde{s}(x) = s_x .$$

On munit E de la topologie la plus fine qui rende les applications $\tilde{s}$ continues $E \xrightarrow{p} X$ est alors un espace étalé sur X (Godement p. 110-111). On obtient ainsi un foncteur T' covariant de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des espaces étalés sur X .

<u>Théorème</u>. Les foncteurs T et T' vérifient $T \circ T' \simeq \mathrm{id}$ (faisceaux sur X) et $T' \circ T \simeq \mathrm{id}$ (espaces étalés sur X) et sont donc des équivalences de catégories.

Remarque : La fibre $\mathcal{F}_x$ du faisceau est égale à la fibre $p^{-1}(x)$ de l'espace étalé associé, évidemment.

Pour des démonstrations cf Godement : Faisceaux et surtout Cartan Cours aux carrés E.N.S. 1963-1964 p. 40 sq..

0.2. Images directes et réciproques de faisceaux.

1) Image directe.

Soient $X \to Y$ une application continue, et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X.

Considérons le préfaisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y défini par

- $\forall V$ ouvert $\subset Y$: $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$

- morphismes de restriction évidents.

Alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau et f_* est un foncteur covariant appelé <u>image directe par</u> f.

2) Image réciproque.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue, et soit (G,p) un espace étalé sur Y. On considère le produit fibré $X \times_Y G$ dans la catégorie des espaces topologiques.

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y G & \xrightarrow{g} & G \\ \big\downarrow q & & \big\downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

On constate que q est encore étale. Le produit fibré définit un foncteur de la catégorie des espaces étalés sur Y dans celle des espaces étalés sur X, et par suite un foncteur f^* de la catégorie des faisceaux sur Y dans celle des faisceaux sur X, appelé <u>image réciproque par</u> f.

<u>Exemples.</u>

Si U est un ouvert d'un espace topologique X, l'injection canonique j est continue et même étale.

Si F est un faisceau sur X, son image réciproque est le faisceau restreint à U. L'espace étalé correspondant est l'image réciproque de U par la projection au sens des espaces topologiques, avec la projection restreinte.
Si (E,p) est un espace étalé sur U, l'image directe j_*G du faisceau associé est le faisceau défini par $j_*G(V) = G(U \cap V)$, dont l'espace étalé associé est $(E, j \circ p)$.

Si x est un point d'un espace topologique X, l'image réciproque d'un faisceau F sur X par l'application canonique $\{x\} \to X$ est la fibre F_x munie de la topologie discrète.

3) <u>Propriétés d'adjonction</u>.

Le foncteur f^* est un adjoint à gauche du foncteur f_*.

Pour montrer ceci, on va définir un morphisme de faisceaux sur Y.

$$a_G : G \to f_*f^*G .$$

Si U est un ouvert de Y on a $G(U) = \mathrm{Cont}_Y(U,G)$ et

$$f_*f^*G(U) = f^*G(f^{-1}U) = \mathrm{Cont}_X(f^{-1}U \,,\, X \times_Y G) = \mathrm{Cont}_X(X \times_Y U \,,\, X \times_Y G).$$

On va prendre comme image de $s \in G(U)$ la section $a_G(U)(s) = \mathrm{id} \times s$ qui est évidemment continue. La compatibilité aux restrictions est évidente. On obtient bien un morphisme de faisceaux.

Il faut pour que ces morphismes définissent une adjonction qu'ils satisfassent deux conditions.

La première est la fonctorialité en G, c'est-à-dire la commutativité du diagramme suivant pour tout morphisme $h : G \to G'$ de faisceaux sur Y.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "a_G"'] \arrow[d, "h"] & f_* f^* G \arrow[d, "f_* f^* h"] \\ G' \arrow[r, "a_{G'}"'] & f_* f^* G' \end{tikzcd}$$

Si s est une section continue de G sur l'ouvert U de Y, on a :

$$a_{G'}(U)h(U)(s) = a_{G'}(U)(h\circ s) = \mathrm{id} \times h\circ s$$

$$(f_* f^* h)(U)a_G(U)(s) = (f_* f^* h)(U)(\mathrm{id}\times s) = (f^* h)(f^{-1}U)(\mathrm{id}\times s) = (\mathrm{id}\times h)\circ(\mathrm{id}\times s).$$

Ce qui assure la fonctorialité en G.

La seconde est que, pour tout faisceau F sur X et tout faisceau G sur Y, l'application de $\mathrm{Hom}_X(f^* G,F)$ dans $\mathrm{Hom}_Y(G,f_* F)$ définie par $m \mapsto (f_* m)a_G$ soit bijective.

On peut encore décrire l'application comme suit :

A une section t sur un ouvert U de Y, correspond la section $(\mathrm{id}\times t) \in f^* G(f^{-1}U)$ qui a pour image par $m(U)$ la section $m\circ(\mathrm{id}\times t) \in F(f^{-1}U)$ qui est aussi une section de $f_* F$ sur U ; c'est cette section qui est

$$(f_* m)(U)a_G(U)(t).$$

Injectivité.

Si $m \neq m'$, il y a au moins un point de l'espace étalé $f^* G$ sur X où les applications m et m' diffèrent. Soit (x,a) un tel point. Son image a par g est dans une certaine section t de G au-dessus d'un certain ouvert V de Y contenant $p(a) = f(x)$. On voit alors que pour le choix de V et t qu'on vient de faire, on a $(f_* m)(V)a_G(V)(t) \neq (f_* m')(V)a_G(V)(t)$, donc $(f_* m)a_G \neq (f_* m')a_G$.

Surjectivité.

Soit n un morphisme de G dans f_*F. On se propose de construire un morphisme de f^*G dans F qui donne n par l'application $(f_*.)a_G$.

Soit $(x,a) \in f^*G$, et soit $y = p(a) = f(x)$. Il existe un ouvert V de Y contenant y et une section s au-dessus de V telle que $a = t(y)$. Alors $n(V)(t)$ est une section de f_*F sur V, ou encore une section de F sur $f^{-1}V$, ce qui donne un point de F qui est $n(V)(t)(x)$ se projetant sur x. Ce point ne dépend que de (x,a) et non de V et t. On a ainsi défini une application de f^*G dans F, dont ou pourra vérifier qu'elle est continue et qu'elle redonne bien n.

4) <u>Propriétés d'exactitude</u>.

Grâce à l'adjonction, on sait que

f^* est compatible aux limites inductives

f_* est compatible aux limites projectives.

Mais nous avons par surcroît

f^* est compatible aux limites projectives finies.

Pour le prouver, on peut voir qu'une limite projective finie d'espaces étalés sur un espace topologique X dans la catégorie des espaces topologiques au-dessus de X est déjà étalée sur X et s'identifie donc à la limite dans la catégorie des espaces étalés sur X. La construction de f^*, qui ne fait intervenir que le produit fibré d'espaces topologiques va donc commuter à la formation des limites projectives finies d'espaces étalés.

5) Propriétés de conservation.

Pour qu'un morphisme de faisceaux soit monomorphique (épimorphique, inversible) il faut et il suffit que les morphismes correspondants sur les fibres le soient aussi.

Pour qu'un morphisme de faisceaux soit un noyau (resp. conoyau) d'une paire de morphismes, il faut et il suffit que ce soit le cas pour les morphismes correspondants sur les fibres.

Pour qu'un diagramme de faisceaux soit un produit fini avec ses projection (une somme avec ses injections), il faut et il suffit que les diagrammes sur les fibres le soient aussi.

ATTENTION. Sauf si X est discret, une famille de morphismes sur les fibres ne provient pas en général d'un morphisme de faisceaux.

0.3. Faisceaux de groupes sur un espace topologique.

Un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X est un faisceau G sur X, muni d'un morphisme de faisceau de $G \times G$ dans G qui induit sur chaque ouvert U de X une opération faisant de $G(U)$ un groupe abélien.

Dans les espaces étalés, la notion correspondante est un espace étalé G sur X, muni d'une application continue de $G \times_X G$ dans G, qui induit sur chaque fibre une opération de groupe, telle que la section nulle soit continue et que la section opposée d'une section continue sur un ouvert U de X soit encore une section continue.

Les morphismes de faisceaux de groupes sur X sont bien entendu les morphismes de faisceaux compatibles aux opérations, qui se décrivent dans les espaces étalés comme les applications au-dessus de X continues et compatibles aux opérations sur les fibres.

On obtient ainsi une catégorie abélienne.

L'exactitude peut s'observer "fibre par fibre".

L'image directe, l'image réciproque d'un faisceau de groupespar une application continue sont de manière évidente des faisceaux de groupes. Ces structures naturelles font des foncteurs f_* et f^* des foncteurs additifs pour toute application continue f . On a encore les propriétés d'exactitude :

f_* compatible aux limites projectives

f^* compatible aux limites inductives et exact.

De même, on parlera de faisceaux d'anneaux, de modules sur un faisceau d'anneaux etc. cf. Godement, pages 123 et suite.

1. COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX.

Données.

C_X sera la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur l'espace topologique X . (Ab) sera la catégorie des groupes commutatifs.

$\Gamma : C_X \to (Ab)$ un foncteur additif exact à gauche donné une fois pour toutes.

Tous les foncteurs considérés seront additifs.

1.1. La catégorie des del-foncteurs.

Objets. On appelle del-foncteur (H,d) une suite de foncteurs $H^n : C_X \to (Ab)$ et la donnée pour toute suite exacte dans C_X : $S : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mu} F \xrightarrow{\chi} G \longrightarrow 0$ de morphismes $d^n S$ tels que

$$\cdots \to H^n(E) \xrightarrow{H^n(\mu)} H^n(F) \xrightarrow{H^n(\chi)} H^n(G) \xrightarrow{d^n S} H^{n+1}(E) \xrightarrow{H^{n+1}(\mu)} H^{n+1}(F) \xrightarrow{H^{n+1}(\chi)} H^{n+1}(G) \to \cdots$$

soit un complexe (la composée de deux flèches successives est nulle).

$$d^n S \circ H^n(\chi) = 0 = H^{n+1}(\mu) \circ d^n S$$

et de plus tels que $d^n S$ dépende fonctoriellement de la suite S , i.e. un morphisme de suite exacte

$$\begin{array}{lcccccccccl} S & : 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mu} & F & \xrightarrow{\chi} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S_1 & : 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\mu_1} & F_1 & \xrightarrow{\chi_1} & G_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramme commutatif

donne un morphisme de complexe

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to H^n(F) & \longrightarrow & H^n(G) & \xrightarrow{d^n S} & H^{n+1}(E) & \longrightarrow & H^{n+1}(F) \to \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots \to H^n(F_1) & \longrightarrow & H^n(G_1) & \xrightarrow{d^n S_1} & H^{n+1}(E_1) & \longrightarrow & H^{n+1}(F_1) \to \cdots \end{array}$$

diagramme commutatif

<u>Flèches</u>. On appelle morphisme de delfoncteurs $\Phi : (H,d) \to (K,\delta)$ une suite de morphismes de foncteurs $\Phi^n : H^n \to K^n$ telle que pour toute suite exacte S, dans le diagramme ci-dessous le carré I soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^n(E) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^n(E)"] & H^n(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^n(F)"] & H^n(G) \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\Phi^n(G)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & H^{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{n+1}(E)"] & H^{n+1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{n+1}(F)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & K^n(E) \arrow[r] & K^n(F) \arrow[r] & K^n(G) \arrow[r, "\delta^n"] & K^{n+1}(E) \arrow[r] & K^{n+1}(F) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

<u>Delfoncteur universel</u> : (H,d) est appelé delfoncteur universel si pour tout delfoncteur (K,δ) un morphisme $\Phi^o : H^o \to K^o$ se prolonge de façon unique en un morphisme de delfoncteurs.

1.2. <u>Delfoncteurs universels</u>.

1) <u>Lemme technique</u>. Soit un carré cocartésien de C_X. Si α_1 est un monomorphisme, β_2 aussi

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & E_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\
E_2 \arrow[r, "\beta_2"] & F
\end{tikzcd}$$

Les caractères d'exactitude (monomorphismes, sommes, conoyaux...) se voient fibre par fibre (Godement, p. 115 et 118). On est donc ramené au cas d'un carré de groupes commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\alpha_2"'] & & E_1 \arrow[dd, "\beta_1"] \arrow[dl, shift left, "\sigma_1"] \\
& E_1 \oplus E_2 \arrow[ur, shift left, "\pi_1"] \arrow[dl, shift left, "\pi_2"] \arrow[dr, "\chi"] & \\
x \in E_2 \arrow[ur, shift left, "\sigma_2"] \arrow[rr, "\beta_2"'] & & F
\end{tikzcd}$$

On a une construction de la somme amalgamée F. Soit $E_1 \oplus E_2$ une somme directe de E_1 et E_2 qui s'y injectent par σ_1 et σ_2. Alors $\chi : E_1 \oplus E_2 \to F$ est flèche conoyau de $\sigma_1\alpha - \sigma_2\alpha_2$ ..

Soit x dans le noyau de β_2 : $\beta_2(x) = 0$, soit $\chi\sigma_2(x) = 0$. C'est donc que

$$\sigma_2(x) = (\sigma_2\alpha_2 - \sigma_1\alpha_1)(y) \quad \text{pour un} \quad y \in E .$$

Composons à gauche par la projection $\pi_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$

$$\pi_1\sigma_2(x) = 0 = -\pi_1\sigma_1\alpha_1(y) = -\alpha_1(y)$$

α_1 étant un monomorphisme, $y = 0$ et donc, en composant par $\pi_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_2$

$$\pi_2\sigma_2(x) = x = \pi_2\alpha_2(0) = 0 .$$

<u>Corollaire</u>. Si μ_1 et μ_2 sont deux monomorphismes de même source, il existe un monomorphisme μ de même source tel que $\mu = \alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_2"'] \arrow[dr, "\mu"] & \cdot \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \cdot \arrow[r, "\alpha_2"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

On construit la somme amalgamée de (μ_1, μ_2) et la diagonale du carré convient. α_2 étant un monomorphisme, $\mu = \alpha_2\mu_2$ aussi.

2) <u>Théorème</u>. Soit (H,d) un del-foncteur vérifiant les deux propriétés supplémentaires

(i) Pour toute suite exacte de C_X, le complexe obtenu est acyclique

(ii) H^n est effaçable pour $n \geqslant 1$, i.e. pour tout $x \in H^n(E)$, il existe un monomorphisme $\mu : E \to F$ tel que l'image de x par $H^n(\mu) : H^n(E) \to H^n(F)$ soit nulle.

Alors (H,d) est universel.

On se donne un deuxième delfoncteur (K,δ) et $\varphi^o : H^o \to K^o$ un morphisme de degré 0. On construit $\varphi^{n+1} : H^{n+1} \to K^{n+1}$ par récurrence sur n et on montre :

- l'unicité de φ^{n+1}, et l'additivité de $\varphi^{n+1}(E)$
- que φ^n commute aux flèches d^nS et δ^nS
- que φ^n est un morphisme de foncteurs.

a) Donnons nous $x \in H^{n+1}(E)$. Il existe un monomorphisme μ effaçant x et avec $G = \operatorname{coker} \mu$, on construit la suite exacte :

$$S : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mu} F \xrightarrow{\chi} G \longrightarrow 0$$

Il s'ensuit

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^n(F) \arrow[r, "H^n(\chi)"] \arrow[d, "\varphi^n(F)"] & H^n(G) \arrow[r, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(G)"] & H^{n+1}(E) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] & H^{n+1}(F) \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & K^n(F) \arrow[r, "K^n(\chi)"] & K^n(a) \arrow[r, "\delta^nS"] & K^{n+1}(E) \arrow[r, "K^{n+1}(\mu)"] & K^{n+1}(F) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

exact

Cherchons l'image dans $K^{n+1}(E)$ de $x \in H^{n+1}(E)$.

$H^{n+1}(\mu).x = 0$ (μ efface x), donc

$\exists y \in H^n(G)$ $\quad x = d^nS.y$. exactitude du complexe des H^n .

On doit poser $x' = \delta^nS \circ \varphi^n(G).y$ pour rendre le carré commutatif, au moins sur y.

- x' ne dépend pas de y . En effet, si $x = d^nS.y'$, $d^nS(y'-y) = 0$ et donc $y'-y = H^n(\chi).z$ pour un $z \in H^n(F)$. Alors

$$\delta^nS \circ \varphi^n(G).(y'-y) = \delta^nS \circ \varphi^n(G) \circ H^n(\chi).z = \delta^nS \circ K^n(\chi)(\varphi^n(F).z) = 0 .$$

- x' ne dépend pas de μ : Si μ et μ' sont deux mono morphismes effaçant x , on sait qu'il existe un monomorphisme $\mu_1 = \alpha\mu = \beta\mu'$ qui efface aussi x . Il suffit de montrer que μ_1 et μ mènent à la même image x' de x

$$\begin{tikzcd}
S & 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
S_1 & 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mu_1"] & F_1 \arrow[r, "\chi_1"] & G_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad \chi_1 \text{ conoyau de } \mu_1$$

Il existe β rendant commutatif le diagramme. Par fonctorialité de d et δ, on a :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, "y"] & H^n(G) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddl, "H^n(\beta)"'] & & H^{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[ddl, "\mathrm{id}"'] & {} \\
 & {} \arrow[r] & K^n(G) \arrow[rr] \arrow[ddl, "K^n(\beta)"] & & K^{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[ddl, "\mathrm{id}"] & {} \\
{} \arrow[r, "y_1"] & H^n(G_1) \arrow[rr] \arrow[d] & & H^{n+1}(E) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu_1)"] & {} & \\
{} \arrow[r] & K^n(G_1) \arrow[rr, "\delta^n S_1"] & & K^{n+1}(E) \arrow[r] & {} &
\end{tikzcd}$$

Le carré du haut est commutatif par fonctorialité de d^n. On peut prendre

$y_1 = H^n(\beta).y$ comme image réciproque de $x \in H^{n+1}(E)$, car

$H^{n+1}(\mu_1) = H^{n+1}(\alpha)H^{n+1}(\mu)$ et $H^{n+1}(\mu).x = 0$. On est alors amené à poser

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \delta^n S_1 \circ \varphi^n(G_1).H^n(\beta).y \\
&= \delta^n S_1 \circ K^n(\beta).\varphi^n(G).y \\
&= \delta^n S \circ \varphi^n(G).y = x' .
\end{aligned}$$

En même temps que l'existence, on obtient ainsi l'unicité de x'.

Remarquons que $\varphi^{n+1}(E)$ ainsi construit est additif sur les x effacés par μ. Mais si μ efface x, et si μ' efface x', il existe $\mu'' = \alpha\mu = \alpha'\mu'$ effaçant x et x', donc aussi $x+x'$ par additivité de $H^{n+1}(\mu^n)$. $\varphi^{n+1}(E)(x+x') = \varphi^{n+1}(E)(x) + \varphi^{n+1}(E)(x')$ est alors vérifié.

b) Commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
H^n(G) \arrow[r, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(E)"] & H^{n+1}(E) \arrow[r, "H^{n+1}(\mu)"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(E)"] & {} \\
K^n(G) \arrow[r, "\delta^nS"] & K^{n+1}(E) &
\end{tikzcd}$$

Elle est évidente par construction car si $y \in H^n(G)$ alors $d^nS(y)$ est effacé par μ.

c) Fonctorialité de φ^n

$$\begin{tikzcd}
S : 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & F \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\beta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
S_1 : 0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r, "\mu_1"] & F_1 \arrow[r, "\chi_1"] & G_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soient $\alpha : E \to E_1$, x élément de $H^{n+1}(E)$, μ effaçant x, F_1 somme amalgamée de (μ, α) d'où μ, qui est un monomorphisme grâce au lemme technique, et χ et χ_1 des conoyaux de μ et μ_1. Il existe alors un unique γ fermant ce diagramme commutatif. Il s'ensuit un cube dont toutes les faces (sauf peut-être celle de droite) sont commutatives.

$$\begin{tikzcd}
 & y \in H^n(G) \arrow[rr, "d^nS"] \arrow[d, "\varphi^n(G)"] \arrow[ddl, "H^n(\gamma)"'] & & H^{n+1}(E)\ x \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(E)"] \arrow[ddl, "H^{n+1}(\alpha)"'] & \dots \\
 & K^n(G) \arrow[rr, "\delta^nS"] \arrow[ddl, "K^n(\gamma)"] & & K^{n+1}(E) \arrow[ddl, "K^{n+1}(\alpha)"] & \\
y_1 \in H^n(G_1) \arrow[rr, "d^nS_1"] \arrow[d, "\varphi^n(G_1)"] & & H^{n+1}(E_1) \arrow[rr] \arrow[d, "\varphi^{n+1}(E_1)"] & & \dots \\
K^n(G_1) \arrow[rr, "\delta^nS_1"] & & K^{n+1}(E_1) & &
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in H^{n+1}(E)$, y tel que $x = d^nS(y)$, $y_1 = H^n(\gamma).y$, $x_1 = H^{n+1}(\alpha).x$.

Il est clair que μ_1 efface x_1, et qu'on peut prendre y_1 pour construire $\varphi^{n+1}(E_1).x_1$.

Maintenant $\varphi^{n+1}(E_1).H^{n+1}(\alpha).x = \delta^n S_1.\varphi^n(G_1)y_1$ par construction

$= \delta^n S_1.K^n(\gamma) \circ \varphi^n(G)y$ fonctorialité de φ^n

$= K^{n+1}(\alpha).\delta^n S \circ \varphi^n(G)y$ fonctorialité de δ^n

$= K^{n+1}(\alpha) \circ \varphi^{n+1}(E).x$ par construction

c.q.f.d.

2. OBJETS INJECTIFS

2.1. Définition.

Un objet injectif dans une catégorie est un objet I tel que pour tout monomorphisme $m : A \to B$ de la catégorie et tout morphisme $a : A \to I$, il existe un morphisme $b : B \to I$ tel que $bm = a$.

On dit d'une catégorie qu'elle a suffisamment d'injectifs si pour tout objet de la catégorie il existe un monomorphisme de source l'objet et de but un objet injectif.

2.2. Proposition.

Si K est un foncteur effaçable d'une catégorie C dans (Ab), et si I est un objet injectif de C, alors $K(I) = 0$. Si C a suffisamment d'injectifs, cette propriété caractérise les foncteurs effaçables.

Soient I un injectif, K un foncteur effaçable et $x \in K(I)$. Il existe un monomorphisme $u : I \to J$ tel que $K(u)(x) = 0$. Comme I est injectif, le monomorphisme u admet une rétraction w (c'est-à-dire que wu est l'identité de I). On aura donc $x = K(wu)(x) = K(w)(K(u)(x)) = 0$.

Si C a suffisamment d'injectifs, le monomorphisme $u : E \to F$, où F est injectif, efface évidemment tout élément de $K(E)$.

2.3. Lemme.

Le groupe additif $T = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif dans la catégorie des groupes abéliens.

Soit G un groupe abélien, soit H un sous-groupe de G et soit h un morphisme de H vers T. On considère l'ensemble des couples (K,k) où K est un sous-groupe de G et k un morphisme de K vers T. On le munit de la relation $(K,k) \leq (K',k')$ définie par $K \subset K'$ et $k =$ restriction de k' à K. C'est visiblement une relation d'ordre inductif. Le lemme de Zorn montre qu'il y a un élément maximal de l'ensemble au-dessus de (H,h).

Si K est différent de G, soit $x \in G - K$ et soit K' le sous-groupe de G engendré par K et x. Si $K = 0$, on pourra prolonger k par $k'(x)$ arbitraire dans T. Sinon, n étant le plus petit entier positif non nul tel que $nx \in K$, on peut prolonger k par $k'(x) = p/n \pmod 1$, p étant pris de telle sorte que $p = k(nx) \pmod 1$.

Un élément maximal (K,k) est donc tel que $K = G$, donc h se prolonge sur tout G.

c.q.f.d.

2.4. Lemme.

La catégorie des groupes abéliens a suffisamment d'injectifs.

En fait, le résultat est même vrai pour la catégorie des modules sur un anneau. Démonstration : voir Godement pages 6 et 7.

2.5. Théorème.

La catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique a suffisamment d'injectifs.

Soit Y un espace topologique <u>discret</u>.

Pour un tel espace, le foncteur qui, à un faisceau F sur Y, associe la famille de groupes $(F(y))_{y\in Y}$ est une équivalence de catégories entre C_Y et la catégorie des familles de groupes indexées par Y.

Soit F un faisceau sur Y. Il est possible d'envoyer par une injection chaque groupe $F(y)$ dans un groupe abélien injectif $J(y)$. Ceci fournit un monomorphisme du faisceau F dans le faisceau sur Y défini par la famille $(J(y))$. On appelle J ce faisceau ; montrons qu'il est injectif.

Soit $A \xrightarrow{m} B$ un monomorphisme de faisceaux sur Y et $A \xrightarrow{a} J$ un morphisme. Pour chaque $y \in Y$, le morphisme $a(y) : A(y) \to J(y)$ se factorise par le monomorphisme sous la forme $a(y) = b(y)m(y)$, car $m(y)$ est un monomorphisme et $J(y)$ un injectif. La famille des $(b(y))_{y\in Y}$ détermine un morphisme $b : B \to J$, tel que $a = bm$.

Soient X un espace topologique, Y l'ensemble X muni de la topologie discrète et $f : Y \to X$ l'application identique, qui est continue.

Soit F un faisceau sur X et $u : f^*F \to J$ un monomorphisme de faisceaux sur Y, de but injectif.

Le faisceau f_*f^*F est défini par $f_*f^*F(U) = \prod_{x\in U} F_x$ pour tout ouvert U de X, avec les morphismes de restrictions évidentes. et le morphisme canonique $F \to f_*f^*F$ de faisceaux sur X fait correspondre à la section s de F sur l'ouvert U de X la famille $(s_x)_{x\in U}$. C'est un monomorphisme. D'autre part, le monomorphisme $u : f^*F \to J$ donne par image directe le monomorphisme $f_*u : f_*f^*F \to f_*J$. Par composition, l'on trouve un monomorphisme de F dans

f_*J . Il suffit de montrer que f_*J est injectif, ce qui résulte du lemme suivant :

2.6. Lemme.

L'image directe d'un faisceau injectif par une application continue est encore un injectif.

Soit $f : M \to N$ une application continue, soit L un faisceau injectif sur M , soient A et B deux faisceaux sur N , et soient un monomorphisme $m : A \to B$ et un morphisme $a : A \to f_*L$

Par adjonction il apparaît un morphisme $a' : f^*A \to L$. Comme le foncteur f^* est exact, f^*m est encore un monomorphisme. On en tire l'existence d'un morphisme $b' : f^*B \to L$ tel que $b'f^*m = a'$. Par adjonction, ceci donne un morphisme $b : B \to f_*J$ tel que $bm = a$.

Les explications nécessaires sur les faisceaux, images directes et images réciproques se trouvent dans le Guide (§0).

3. RESOLUTIONS

3.1. Définition.

Une résolution (E^*,e) de l'objet E est un complexe E^* :

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow$$

muni d'une augmentation $\epsilon : E \to E^0$ de telle sorte que la suite

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow$$

soit exacte.

Une résolution (E^*,e) est dite injective si l'objet E^n est injectif pour tout $n \geqslant 0$.

3.2. Proposition.

Si on se donne une résolution (E^*,e) de l'objet E, un complexe :

$$F \xrightarrow{f} F^0 \xrightarrow{b^0} F^1 \xrightarrow{b^1} F^2 \longrightarrow \quad \text{d'objets } F^i \text{ injectifs}$$

et un morphisme $m : E \to F$, il existe un morphisme de complexes m^* :

$m^* : E^* \to F^*$ compatible avec m, c'est-à-dire tel que :

$$m^0 e = fm \quad \text{et} \quad m^{i+1} d^i = b^i m^i \quad \text{pour tout } i \geqslant 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"] \arrow[dr] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] & \cdots \\
 & F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"] & F^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Puisque e est un monomorphisme, le morphisme fm de but injectif se prolonge en un morphisme $m^0 : E^0 \to F^0$ tel que $m^0 e = fm$. Comme $b^0 f$ est nul, on a $0 = b^0 fm = b^0 m^0 e$. Le morphisme $b^0 m^0$ se factorise donc à travers le conoyau de e, dont le but est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^1. Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge donc en un morphisme $m^1 : E^1 \to F^1$ tel que : $m^1 d^0 = b^0 m^0$.

En recommençant aux degrés suivants, on obtient de proche en proche le morphisme voulu.

3.3. Proposition.

Dans les conditions du 3 2), si m est nul, tout morphisme $m^* : E^* \to F^*$ compatible avec m est homotope à zéro, c'est-à-dire qu'il existe des flèches $h^i : E^{i+1} \to F^i$, $i \geqslant 0$, telles que :

$$m^0 = h^0 d^0 \quad \text{et} \quad m^{i+1} = h^{i+1} d^{i+1} + b^i h^i \qquad i \geqslant 0 .$$

En effet $m^0 e = fm = 0$, donc m^0 se factorise par le conoyau de e , qui est un sous-objet de E^1 à cause de l'exactitude en E^0 . Puisque F^0 est injectif, la factorisation se prolonge à E^1 . On obtient ainsi une flèche h^0 telle que $m^0 = h^0 d^0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m=0"'] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "m^0"'] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "m^1"] \arrow[dl, "h^0"] & E^2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h^1"] & \cdots \\
& F \arrow[r, "f"] & F^0 \arrow[r, "b^0"'] & F^1 \arrow[r, "b^1"'] & F^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La flèche $m^1 - b^0 h^0$ composée avec d^0 donne $(m^1 - b^0 h^0) d^0 = 0$. Donc elle se factorise par le conoyau de d^0 , dont le but est un sous-objet de E^2 à cause de l'exactitude en E^1 . Comme F^1 est injectif, cette factorisation se prolonge en une flèche h^1 , telle que $m^1 - b^0 h^0 = h^1 d^1$.

On voit comment continuer de proche en proche.

3.4. <u>Remarque</u>.

Dans une catégorie abélienne qui a suffisamment d'injectifs, tout objet a une résolution injective, que l'on peut construire comme suit. On part de l'objet E . Il existe un monomorphisme $e : E \to E^0$ où E^0 est injectif. On prend alors un conoyau de e , dont le but s'envoie par un monomorphisme dans un injectif E^1 . Le composé de ce monomorphisme et du conoyau utilisé est appelé d^0 . L'exactitude en E_0 est assurée. On voit comment poursuivre la construction de proche en proche.

4. HOMOLOGIE D'UN COMPLEXE.

4.1. Définition.

Si $0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$ est un complexe de groupes abéliens, noté E^*, on appelle $H^n(E^*)$ le groupe quotient du noyau de $d^n : E^n \to E^{n+1}$ par l'image de d^{n-1} pour tout $n \geqslant 0$, où l'on pose $E^{-1} = 0$ et $d^{-1} = 0$.

4.2. Fonctorialité.

Montrons comment un morphisme de complexes $m^* : E^* \to F^*$ induit une famille de morphismes $H^i(m^*) : H^i(E^*) \to H^i(F^*)$.

Si x est un élément de $H^i(E^*)$, c'est la classe d'un $y \in E^i$ tel que $d^i y = 0$. Alors $m^i y$ est un élément de F^i vérifiant $b^i m^i y = m^{i+1} d^i y = 0$. Si y' est un autre élément représentant de x, on aura $y' - y = d^{i-1} z$, avec z dans E^{i-1}. Donc $m^i y' = m^i y + m^i d^{i-1} z = m^i y + b^{i-1} m^{i-1} z$. La classe de y' est donc la même que celle de y. C'est cette classe qu'on prend comme $H^i(m^*)(x)$.

Il est clair que les applications $H^i(m^*)$ ainsi définies sont additives et que H^i est un foncteur additif de la catégorie des complexes de groupes abéliens dans celle des groupes abéliens pour tout $i \geqslant 0$.

4.3. Lemme.

Si m^* est homotope à zéro, $H^i(m^*)$ est nul pour tout $i \geqslant 0$.

On reprend les notations du (4.2).

Pour le degré 0, on a $m^0 y = h^0 d^0 y = 0$.

Pour le degré $i+1$, on a $m^{i+1} y = h^{i+1} d^{i+1} y + b^i h^i y = b^i h^i y$.

4.4. <u>Théorème de la suite exacte d'homologie.</u>

Si on a une suite exacte S de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow E^* \xrightarrow{u^*} F^* \xrightarrow{v^*} G^* \longrightarrow 0$$

on a des morphismes $d^iS : H^i(G^*) \to H^{i+1}(E^*)$ vérifiant les propriétés :

- fonctorialité en S

- exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow H^0(E^*) \xrightarrow{H^0(u^*)} H^0(F^*) \xrightarrow{H^0(v^*)} H^0(G^*) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^i(E^*) \xrightarrow{H^i(u^*)} H^i(F^*) \xrightarrow{H^i(v^*)} H^i(G^*) \xrightarrow{d^iS} H^{i+1}(E^*) \xrightarrow{H^{i+1}(u^*)} H^{i+1}(F^*) \longrightarrow \cdots$$

pour tout $i \geqslant 0$.

Pour simplifier, les différentielles des complexes seront notées d .

Voici la construction des <u>cobords</u> d^iS .

Soit t un élément de $H^i(G^*)$. Il est représenté par un élément $z \in G^i$ tel que $dz = 0$. Il existe un $y \in F^i$ tel que $v^iy = z$. On a $v^{i+1}dy = dv^iy = dz = 0$, donc il existe un unique élément $x \in E^{i+1}$ tel que $u^{i+1}x = dy$. On voit que $u^{i+2}dx = du^{i+1}x = ddy = 0$, donc $dx = 0$. On montre que la classe ξ de x ne dépend que de t et non des y et z intervenant dans la construction et on pose $(d^iS)(t) = \xi$.

5. COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème.

Soit X un espace topologique et soit C_X la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. Il existe un delfoncteur exact et effaçable, noté $(H^*(X,.),d)$ défini sur C_X à valeurs dans la catégorie (Ab) des groupes abéliens, et qui, en degré 0, est le foncteur $F \mapsto F(X)$.

Plus généralement, si T est un foncteur additif exact à gauche défini sur une catégorie abélienne qui a suffisamment d'injectifs, à valeurs dans (Ab), on va construire un delfoncteur exact et effaçable dont le terme de degré 0 soit isomorphe à T.

En vertu de la propriété universelle, un tel delfoncteur est unique à un isomorphisme unique près.

5.1. Lemme.

Soient (E^*,e), (F^*,f) et (G^*,g) des résolutions des objets E, F et G, telles que (G^*,g) soit injective. Soient

$$E \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} G$$

des morphismes. Si p^*, q^* et r^* sont des morphismes de complexes qui prolongent a, b et ba, alors $H^i(Tr^*) = H^i(Tq^*)H^i(Tp^*)$.

En effet r^* et q^*p^* prolongent ba. Leur différence prolonge 0 le morphisme nul de E dans G. C'est donc un morphisme homotope à zéro (3.3). Son transformé par T l'est aussi. On aura donc $H^i(T(r^* - q^*p^*)) = 0$, d'après (4.3). Par additivité des foncteurs H^i et T, on a le lemme.

5.2. <u>Construction des foncteurs</u> R^iT.

Soient (E^*, e) et (E_1^*, e_1^*) deux résolutions injectives de E. D'après (3.2) il existe des morphismes de complexes $u^* : E^* \to E_1^*$ et $u_1^* : E_1^* \to E^*$ prolongeant l'identité de E.

En appliquant le lemme (5.1) avec $p^* = u_1^*$, $q^* = u^*$ et $r^* = id$, puis $p^* = u^*$, $q^* = u_1^*$ et $r^* = id$, on voit que u^* et u_1^* définissent deux isomorphismes réciproques pour tout $i \geqslant 0$:

$$H^i(TE_1^*) \underset{(H^i(Tu^*)}{\overset{H^i(Tu_1^*)}{\rightleftarrows}} H^i(TE^*)$$

On voit que les groupes ne dépendent pas de la résolution choisie. Choisissons donc pour chaque objet une résolution injective. Si la résolution de E choisie est (E^*, e), posons $R^iT(E) = H^i(TE^*)$.

Pour chaque morphisme $a : E \to F$, il existe un morphisme unique à homotopie près $a^* : E^* \to F^*$ qui prolonge a, cf.(3.2) et (3.3). Ceci procure un morphisme $R^iT(a) : R^iT(E) \to R^iT(F)$.

En utilisant (5.1) on voit que R^iT est un foncteur, évidemment additif.

Le foncteur <u>exact à gauche</u> T transforme la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{e} E^0 \xrightarrow{d} E^1$$

en la suite exacte

$$0 \longrightarrow TE \xrightarrow{Te} TE^0 \xrightarrow{Td} TE^1 .$$

Ceci détermine l'isomorphisme entre les foncteurs T et R^0T.

5.3. Effaçabilité en degré $\geqslant 1$.

Il suffit de vérifier que si I est un objet injectif, alors $R^iT(I) = 0$ pour $i \geqslant 1$, d'après (2.2).

En effet, on obtient une résolution injective en augmentant le complexe I^* , défini par $I^0 = I$ et $I^n = 0$ pour $n > 0$, par l'identité de I .

Il est alors évident que $H^i(TI^*) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

5.4. Lemme.

Soient $0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0$ une suite exacte, (E^*,e) une résolution injective de E et (G^*,g) une résolution de G . Alors il existe une résolution (F^*,f) de F , telle que $F^i = E^i \times G^i$, et des morphismes de résolution prolongeant u et v :

$$E^* \xrightarrow{u^*} F^* \xrightarrow{v^*} G^*$$

où u^i est l'injection canonique, et v^i la projection canonique.

On remarque que la suite

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{gv} G^0 \xrightarrow{d} G^1$$

constitue une résolution de E . Il existe un morphisme de résolutions qui prolonge l'identité de E (3.2) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{gv} & G^0 & \xrightarrow{d} & G^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle k^0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle k^1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle k^2} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & E^2 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En appelant w^i la projection canonique $F^i \to E^i$, on définit la flèche f et la différentielle d de F^* comme suit :

$$f = (k^0, gv) : F \to E^0 \times G^0$$

$$d = (dw^i + (-1)^{i+1}\, k^{i+1} v^i,\ dv^i) : E^i \times G^i \to E^{i+1} \times G^{i+1} .$$

Reste à vérifier les relations de commutation et d'exactitude. On pourra se reporter à Cartan Eilenberg, ch.V,§2 pages 79 et 80, qui traite la situation duale dans les modules, de façon suffisamment générale.

5.5. <u>Construction du cobord.</u>

Si $0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0$ est une suite exacte, soient (E^*, e) et (G^*, g) les résolutions injectives choisies de E et G (5.2). Les objets $E^i \times G^i$ sont injectifs comme produits directs d'injectifs. La construction du (5.4) nous donne donc une résolution injective (F_1^*, f_1) de l'objet F et une suite exacte de résolutions :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle e} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \\
0 & \longrightarrow & E^* & \xrightarrow{u^*} & F_1^* & \xrightarrow{v^*} & G^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Les suites $0 \longrightarrow E^i \xrightarrow{u^i} F_1^i \xrightarrow{v^i} G^i \longrightarrow 0$ étant scindées restent exactes après transformation par le foncteur T . On obtient une suite exacte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow TE^* \xrightarrow{Tu^*} TF_1 \xrightarrow{Tv^*} TG^* \longrightarrow 0 .$$

La construction donnée au paragraphe (4.4) fournit alors des cobords.

Il faut s'assurer de la fonctorialité par rapport aux suites exactes et vérifier l'exactitude.

La construction est indiquée dans Cartan-Eilenberg, ch.V,§2, pages 80 à 82.

La fonctorialité du cobord décrit en (4.4) et celle de T donnent le résultat voulu.

Pour l'exactitude, on prend un morphisme de résolutions $(F^*,f) \xrightarrow{j^*} (F_1^*,f_1)$ qui prolonge l'identité de F .

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & H^i(TF_1^*) \arrow[dr, "H^i(Tv^*)"] & & & \\
R^{i-1}T(G) \arrow[r, "d^{i-1}"] & R^iT(E) \arrow[urr, "H^i(Tu^*)"] \arrow[drr, "R^iT(u)"'] & & & R^iT(G) \arrow[r, "d^i"] & R^{i+1}T(E) \\
 & & & R^iT(F) \arrow[uu, "H^i(Tj^*)"'] \arrow[ur, "R^iT(v)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

La suite du haut est exacte, grâce au théorème du (4.4) de la suite exacte d'homologie.

Celle du bas, qui nous intéresse, l'est aussi parce que $H^i(Tj^*)$ est un isomorphisme (5.2) et que les triangles commutent (5.1).

On est bien arrivé à un delfoncteur exact et effaçable prolongeant T .

5.6. <u>Fonctorialité par rapport à l'espace de base.</u>

On se propose de comparer les cohomologies des faisceaux de groupes abéliens sur Y et celles de leurs images réciproques par une application continue $f : X \to Y$.

Le morphisme d'adjonction de foncteurs de C_Y dans elle-même $id \to f_*f^*$ fournit un morphisme de foncteurs de C_Y dans la catégorie des groupes abéliens.

$$\Gamma(Y,.) \to \Gamma(Y,f_*f^*.) = \Gamma(X,f^*.).$$

Comme le foncteur f^* est exact, on obtient en le composant avec le delfoncteur $(H^*(X,.),d)$ un nouveau delfoncteur exact

$(H^*(X,f^*.),d\circ f^*)$ défini sur C_Y .

Comme le delfoncteur $(H^*(Y,.),d)$ est <u>universel</u>, le morphisme en degré 0 : $\Gamma(Y,.) \to \Gamma(X,f^*.)$ se prolonge de manière unique en un morphisme de delfoncteurs :

$$(H^*(Y,.),d) \longrightarrow (H^*(X,f^*.)\ ,\ d\circ f^*).$$

6. RESOLUTION D'UN FAISCEAU PAR DES FAISCEAUX DE COHOMOLOGIE NULLE.

Soit E un faisceau sur X . Une résolution de E par des faisceaux injectifs I^n permet de calculer les groupes $H^p(E) = H^p(\Gamma I^*)$ par définition. En fait, il suffit, pour connaître $H^p(E)$ d'avoir une résolution de E par des faisceaux F^n vérifiant seulement $H^i(F^n) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

<u>Le morphisme du cobord itéré.</u>

1) Soit $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F^o \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots$ une résolution quelconque de E .

Découpons cette résolution en petites suites exactes, en posant $C^n = \mathrm{Ker}(F^{n-1} \to F^n)$. On obtient, au rang n :

$$S_n : 0 \longrightarrow C^n \longrightarrow F^n \longrightarrow C^{n+1} \longrightarrow 0 .$$

Si (H,δ) est un delfoncteur quelconque, il résulte de S_n un complexe :

$$\dots \longrightarrow H^p(F^n) \longrightarrow H^p(C^{n+1}) \xrightarrow{\delta^p S_n} H^{p+1}(C^n) \longrightarrow H^{p+1}(F^n) \longrightarrow \dots$$

En itérant le cobord δ , on obtient un morphisme :

$$H^1(C^{n-1}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(C^{n-2}) \xrightarrow{\delta^2} \dots \longrightarrow H^{n-1}(C^1) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(E).$$

Supposons de plus que $H^o = \Gamma$ et regardons le début du complexe attaché à S_{n-1} :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma C^{n-1} \arrow[r] & \Gamma F^{n-1} \arrow[r] & \Gamma C^{n} \arrow[r, "\delta^{o}"] \arrow[dr, "\chi"'] & H^{1}(C^{n-1}) \arrow[r] & H^{1}(F^{n-1}) \arrow[r] & \dots \\
 & & & & \Gamma C^{n}/\mathrm{Im}\,\Gamma F^{n-1} \arrow[u, "!\theta"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & & H^{n}(\Gamma F^{*}) &
\end{tikzcd}$$

De par la propriété universelle du conoyau $H^{n}(\Gamma F^{*})$, il existe une unique flèche θ , rendant commutatif le triangle. En composant θ avec les morphismes trouvés plus haut, on obtient alors un morphisme "du cobord itéré" :

$$\varepsilon^{n}(F^{*}) : H^{n}(\Gamma F^{*}) \to H^{n}(E).$$

On laisse au lecteur le soin d'expliquer en quel sens ε^{n} est un morphisme fonctoriel en F^{*} .

2) Il existe ainsi un cobord itéré pour une résolution quelconque, et pour un delfoncteur (H,δ) quelconque, vérifiant seulement $H^{o} = \delta$. Si de plus (H,δ) est exact et si les faisceaux F^{n} ont une cohomologie nulle, on obtient le

Théorème 1.

Soit $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F^{o} \longrightarrow F^{1} \longrightarrow \dots$ une résolution de E par des faisceaux F^{n} vérifiant $H^{p}(F^{n}) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 0$.
Soit (H,δ) un delfoncteur exact. Alors le cobord itéré $\varepsilon^{n}F^{*}$ est un isomorphisme : $H^{n}(\Gamma F^{*}) \xrightarrow{\sim} H^{n}(E)$.

En effet, la suite exacte de cohomologie attachée à S_{n} s'écrit alors :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{p}(C^{n+1}) \xrightarrow{\delta^{p}} H^{p+1}(C^{n}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \quad \text{exacte}$$

et $\delta^{p}S_{n}$ est donc un isomorphisme. De plus, au début de la suite de cohomologie de S_{n-1} , $H^{1}(F^{n-1})$ est nul et $H^{1}(C^{n-1})$ apparaît alors comme un conoyau de la flèche

$$\Gamma F^{n-1} \to \Gamma C^{n} \quad \text{au même titre que} \quad H^{n}(\Gamma F^{*}) ,$$

et θ est donc aussi un isomorphisme, d'où le théorème.

Un autre morphisme.

Si $0 \to E \to F^{0} \to F^{1} \to \ldots$ est une résolution de E , on peut définir d'autres morphismes

$$a^{n} : H^{n}(\Gamma F^{*}) \to H^{n}(E)$$

de la manière suivante. On rappelle qu'on a choisi une résolution injective (I^{*},i) de E , et posé par définition :

$$H^{n}(E) = H^{n}(\Gamma I^{*}).$$

Mais il existe un morphisme de résolutions $\alpha^{*} : F^{*} \to I^{*}$ prolongeant l'identité $E \to E$ (cf plus haut). Alors a^{n} est induit par α^{*} :

$$a^{n} = H^{n}(\Gamma\alpha^{*}).$$

On montre alors (voir Cartan-Eilenberg p. 91-92) que :

$$\boxed{\varepsilon^{n}{}_{F^{*}} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a^{n}}$$

7. RESOLUTIONS FLASQUES.

7.1. Lemme.

Soit D une sous-catégorie d'une catégorie abélienne C qui a suffisamment d'injectifs et soit T un foncteur exact à gauche défini sur C à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

a) Tout injectif est dans D.

b) Si un objet E de C est dans D, toute suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$ dans C est transformée par T en suite exacte.

c) Tout quotient d'objets de D est dans D.

Alors pour tout objet E de D, on a $R^iT(E) = 0$ pour $i > 0$.

Si E est un objet de D on peut en construire une résolution injective : $0 \to E \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \dots$.

Le quotient F^1 de E^0 par E est dans D grâce à a) et c). De proche en proche on voit que les quotients F^{i+1} de E^i par F^i sont dans D. Les petites suites exactes $0 \to F^i \to E^i \to F^{i+1} \to 0$ sont transformées par T en suites exactes $0 \to TF^i \to TE^i \to TF^{i+1} \to 0$ grâce à b). Or $R^{i+1}T(E)$ est justement le quotient de TF^{i+1} par l'image de TE^i $i \geqslant 0$ et ce quotient est nul.

7.2. Définition.

Un faisceau est dit flasque si les morphismes de restriction sont des épimorphismes.

7.3. <u>Résolution canonique.</u>

On peut envoyer tout faisceau dans un faisceau flasque de la manière suivante. Si X est l'espace de base, on définit $Y \xrightarrow{f} X$ comme en 2.5. Ceci donne lieu au morphisme canonique d'adjonction $E \to f_*f^*E$ de faisceaux sur X. C'est un monomorphisme, parce que f est surjective.

De plus, tout faisceau sur un espace discret est évidemment flasque, et l'image directe d'un faisceau flasque par une application continue est flasque ; le faisceau f_*f^*E est donc flasque.

On obtiènt ainsi une résolution

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \longrightarrow \cdots$$

où les E^i sont flasques en prenant $E^0 = f_*f^*E$, $E^1 = f_*f^*(E^0/E)$ et $E^{i+1} = f_*f^*(E^i/\mathrm{Im}\ d^{i-1})$ avec les morphismes évidents.

La construction est visiblement fonctorielle.

7.4. Montrons que les faisceaux flasques sur un espace X forment une catégorie du type signalé au lemme 7.1, relativement au foncteur $\Gamma(X,.)$

a) Soit I un faisceau injectif sur X. On peut l'envoyer dans le faisceau flasque f_*f^*I par un monomorphisme, qui admet une rétraction r puisque I est injectif. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_*f^*I(X) \arrow[r, "r(X)"'] \arrow[d] & I(X) \arrow[d] \\ f_*f^*I(U) \arrow[r, "r(U)"'] & I(U) \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont des rétractions, donc des épimorphismes. La flèche de gauche est un épimorphisme, donc celle de droite aussi. I est flasque.

b) et c) Godement, pages 148 et 149.

7.5. La cohomologie pourra se calculer à l'aide des résolutions flasques, comme on a vu au §6 du guide.

La résolution canonique présente le double avantage d'être fonctorielle, donc de fournir les images des morphismes par le delfoncteur universel $(H^*(X,.),d)$ et d'éviter le choix de résolutions injectives.

8. LE THEOREME DE RHAM.

<u>Situation et énoncé.</u>

Soit V une variété différentiable C^∞ para compacte (c'est-à-dire une variété dont les composantes connexes sont dénombrables à l'infini).

On considère sur V le faisceau constant $\mathbb{R}_V$ (faisceau associé au pré-faisceau constant $U \to \mathbb{R}$), et les faisceaux $(\Omega^i)_{i\geqslant 0}$, Ω^i étant le faisceau des germes de formes différentielles C^∞ de degré i.

On a un complexe (Ω^*) :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_V \xrightarrow{d_o} \Omega^o \xrightarrow{d_1} \Omega^1 \ldots \longrightarrow \Omega^i \xrightarrow{d_i} \Omega^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

d_o envoyant $\mathbb{R}_V$ sur les germes d'applications localement constantes, et d_i pour $i \geqslant 1$ étant la différentielle extérieure.

Ω^* est une résolution de $\mathbb{R}_V$ d'après le lemme de Poincaré (voir H. Cartan Formes différentielles (Hermann) p.39, ch.II, th. 2.12.1).

D'après (§6) on a des morphismes de cobord itéré :

$$H^n(\Gamma(V,\Omega^*)) \to H^n(V,\mathbb{R}_V).$$

Le théorème de Rham affirme que ce sont des isomorphismes.

D'après le paragraphe 6, il suffit de montrer que :

$$\forall i > 0 \quad \forall j \geqslant 0 \qquad H^i(V,\Omega^j) = 0 .$$

Cela résulte de la :

<u>Proposition</u> 1. Soit V une variété C^∞ paracompacte, et F un faisceau de Ω^o-modules. On a :

$$\forall i > 0 \qquad H^i(V,F) = 0 .$$

La proposition 1 se déduira des propositions 2 et 3. Auparavant, dégageons deux lemmes, et une définition

<u>Définition</u>. Soient X un espace topologique et Z un sytème cofinal de recouvrements de X, enfin F un faisceau de groupes abéliens sur X. On dit que F vérifie $P(Z)$ lorsque :

$\forall (U_i)_{i\in I} \in Z$, $\forall (f_{ij}) \in \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \cap U_j)$ vérifiant pour tous i, j et k $f_{ij} + f_{jk} + f_{kj} = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, il existe $(\lambda_i) \in \prod_{i\in I} F(U_i)$ tel que pour tous i et j, $f_{ij} = \lambda_j - \lambda_i$ sur $U_i \cap U_j$.

<u>Lemme</u> 1. Si $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux où F vérifie $P(Z)$, alors la suite $0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{\alpha(X)} G(X) \xrightarrow{\beta(X)} K(X) \longrightarrow 0$ est exacte.

Soit en effet $k \in K(X)$. Comme β est localement surjective, il existe un recouvrement (U_i) de X qu'on peut supposer appartenir à Z, et une famille $(g_i) \in \prod_{i\in I} G(U_i)$ telle que $k_{|U_i} = \beta(U_i)g_i$. Alors

$$\beta(U_i \cap U_j)(g_{i|U_i\cap U_j} - g_{j|U_i\cap U_j}) = 0 .$$

Donc il existe une famille $f_{ij} \in F(U_i \cap U_j)$ telle que $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$. Et α étant injective, comme $\alpha(f_{ij}+f_{jk}+f_{ki}) = 0$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$; alors $f_{ij}+f_{jk}+f_{ki} = 0$ sur le ...page 35...

même ouvert, quels que soient i, j et k. De $(P(Z))$ on déduit qu'il existe une famille $\lambda_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que : $f_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Posant $g'_i = g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i) \in G(U_i)$, on observe que les g'_i se recollent en $g' \in G(X)$, et on vérifie que : $\beta(g') = k$ car :

$$\forall i \in I \quad \beta(U_i)(g'|_{U_i}) = \beta(U_i)(g'_i) = \beta(U_i)(g_i - \alpha(U_i)(\lambda_i)) = \beta(U_i)(g_i) = k|U_i$$

puisque $\beta(U_i) \circ \alpha(U_i) = 0$.

<u>Lemme</u> 2. Sous les hypothèses du lemme 1, $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

En effet soit $0 \to \mathcal{F} \to G \to K \to 0$ une suite exacte avec G injectif. Alors la suite :

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to G(X) \to K(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

est exacte et d'après le lemme 1, ceci entraîne que $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

<u>Proposition</u> 2. Soit X un espace topologique. Z une famille cofinale de recouvrements de X.

Soit $\mathbf{A}$ une classe de faisceaux sur X vérifiant les propriétés suivantes :

1) $P(Z)$

2) (Q) $\forall H \in \mathbf{A} \quad \exists\, 0 \to H \to K \to L \to 0$ exacte avec K injectif et $K, L \in \mathbf{A}$.

Alors $\forall F \in \mathbf{A} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad H^n(X,F) = 0$.

On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$.

D'après le lemme 2, $H^1(X,F) = 0$.

Supposons que pour $n \leqslant p$ $H^n(X,F) = 0$, quel que soit $F \in \mathbf{A}$.

Soit alors $0 \to F \to G \to K \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathbf{A}$ telle que G soit injectif, suite dont (Q) garantit l'existence.

On a la suite exacte :

$$H^p(X,K) \to H^{p+1}(X,F) \to H^{p+1}(X,G)$$

dont les deux extrémités sont nulles, $H^p(X,K)$ d'après l'hypothèse de récurrence, $H^{p+1}(X,G)$ parce-que G est injectif. Donc : $H^{p+1}(X,F) = 0$.

Proposition 3. Soit V une variété paracompacte. Z la classe des recouvrements de V tels qu'un ouvert de ce recouvrement n'en rencontre qu'un nombre fini d'autres. Soit A la classe des faisceaux de modules sur Ω^o . Alors :

Z est un ensemble cofinal de recouvrements de V .

A vérifie $P(Z)$ et (Q).

Le premier point est :

1) A vérifie (Q). Cela provient de ce que la construction classique du plongement d'un faisceau dans un faisceau injectif ne fait pas sortir de la catégorie des modules sur un faisceau d'anneaux si on y est déjà, et que le quotient d'un faisceau de modules par un autre est encore un faisceau de modules.

2) A vérifie $P(Z)$. Soit M un Ω_o-module.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de V appartenant à Z, et soit $m \in \prod_{(i,j)\in I^2} M(U_i \cap U_j)$ tel que $\forall (i,j,k) \in I^3$ on ait : $m_{ij} + m_{jk} = m_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. Il existe alors une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ (G. de Rham, Variétés différentiables, ch.I, §2, th.1, p.4, Hermann) c'est-à-dire qu'il existe :

1) des fermés $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \subset U_i$

2) des fonctions C^∞ $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$ à support contenu dans V_i

et telles que : $\forall x \in V \quad \sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$.

La somme $n_j = \sum_{i \in I} \varphi_i \, m_{ji}$ est définie sur U_j (et même sur V) et sur $U_i \cap U_j$, on a :

$$n_i - n_j = \sum_{k \in I} \varphi_k (m_{ki} - m_{kj}) = \sum_{k \in I} \varphi_k \, m_{ji} = m_{ji} \, .$$

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE d'ORSAY

Année 1969/70

Tirage provisoire

Exposé I : Facteurs représentables

d'après un exposé de MBOGLE-TCHEK

1.- Catégories de foncteurs

A toute (petite) catégorie C, on associe une catégorie $\hat{C}$ ainsi définie :

a) les objets de $\hat{C}$ sont les foncteurs contravariants de C dans la catégorie Ens des (petits) ensembles,

b) les morphismes de l'objet X de $\hat{C}$ dans l'objet Y de $\hat{C}$ sont les morphismes fonctoriels de X dans Y, que l'on compose de manière évidente.

Soit X un objet fixé de C . Pour tout objet T de C (resp. toute flèche $\phi : T \longrightarrow T'$ de C), on pose

$$X(T) = \mathrm{Hom}_C(T,X)$$
$$X(\phi) = (\psi \longrightarrow \psi\circ\phi) : \mathrm{Hom}_C(T',X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(T,X).$$

Alors $(T \longrightarrow X(T),\ f \longrightarrow X(f))$ est un élement de $\hat{C}^C$, que l'on note h_X (et que l'on notera simplement X dès qu'on aura justifié cet abus).

Si $f:X \longrightarrow Y$ est une flèche de C , on note h_f le morphisme fonctoriel de h_X dans h_Y défini de la manière suivante : pour tout $T\in C$, $h_f(T)$ envoie l'élément ψ de $X(T)=\mathrm{Hom}_C(T,X)$ dans l'élément $f\circ\psi$ de $Y(T)=\mathrm{Hom}_C(T,Y)$. On a ainsi défini un foncteur covariant

$$h : C \longrightarrow \hat{C} .$$

Lemme de Yoneda. Si $X\in C$ et $F\in\hat{C}$ l'application : $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X,F) — F(X)$ telle que $\gamma(u)=u(X)(\mathrm{Id}_X)$ est bijective.

En effet, définissons une application $\delta:F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X,F)$; si $\xi\in F(X)$, alors $\delta(\xi)$ est le morphisme fonctoriel qui associe à chaque $T\in C$ l'application $\psi \longrightarrow F(\psi)\ (\xi)$ de X(T) dans F(T).

Il est clair que $\gamma(\delta(\xi)) = F(\mathrm{id}_X)(\xi)=\mathrm{id}_{F(X)}(\xi)=\xi$, donc $\gamma\circ\delta=\mathrm{id}$;

inversement , si $u:h_X \longrightarrow F$ est un morphisme fonctoriel, si $T\in C$ et si $\psi\in X(T)$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X(X)=\mathrm{Hom}_C(X,X) \arrow[r, "u(X)"] \arrow[d, "X(\psi)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\psi)"] \\ X(T)=\mathrm{Hom}_C(T,X) \arrow[r, "u(T)"] & F(T) \end{tikzcd}$$

montre que $\delta[\gamma(u)](T)(\psi)=F(\psi)[\gamma(u)]=F(\psi)[u(X)(id_X)]=$ $u(T)[X(\psi)(id_X)]=u(T)(id_X o\psi)=u(T)(\psi)$, donc $\delta o\gamma=id$.

En particulier, prenons $F=h_Y$, où $Y\in C$; si $\xi\in F(X) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ et $\psi\in X(T)$, on a $\delta(\xi)(\psi)=F(\psi)(\xi)=\xi o\psi=h_\xi(\psi)$, donc $\delta(\xi)=h_\xi$. On en conclut :

<u>Proposition</u>. <u>Le foncteur</u> $h:C \longrightarrow \hat{C}$ <u>est pleinement fidèle</u> : <u>si</u> $X,Y\in C$, <u>l'application canonique</u> $f \longrightarrow h_f$ <u>de</u> $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X,h_Y)$ <u>est bijective</u>.

2.- <u>Foncteurs au-dessus d'un objet</u>.

Dans ce n°, on fixe un foncteur $F\in\hat{C}$. On note $C_{/F}$ la catégorie suivante :

a) les objets de $C_{/F}$ sont les couples (X,α) où $X\in C$ et $\alpha\in F(X)$,

b) les morphismes de l'objet (X,α) dans l'objet (Y,β) sont les éléments ϕ de $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ tels que $F(\phi)(\alpha)=\beta$,

c) la composition des morphismes de $C_{/F}$ est induite par la composition des morphismes de C .

On note i_F le foncteur $C_{/F} \longrightarrow C$ qui associe X à (X,α) et ϕ à ϕ avec les notations précédentes.

<u>Exemples</u> 1) Supposons que F soit un <u>foncteur final</u>, c'est-à-dire que Card $F(X)=1$ pour tout $X\in C$. Alors $i_F:C_{/F} \longrightarrow C$ <u>est un isomorphisme de catégories</u>.

2) Supposons plus généralement que Card $F(X)\leq 1$ pour $X\in C$; alors $i_F:C_{/F} \longrightarrow C$ induit un isomorphisme de $C_{/F}$ sur la sous-catégorie pleine C' de C formée des $S\in C$ tels que $F(S) \neq \emptyset$.

3) Si $F=h_S$, où $S\in C$, la catégorie $C_{/F}$ que l'on note aussi $C_{/S}$ est la catégorie des <u>objets de</u> C <u>au-dessus de</u> S , dont les objets sont les flèches de C de but S et les morphismes les triangles commutatifs.

Soit $f:G \longrightarrow F$ un morphisme de $\hat{C}$, i.e. un élément de $\hat{C}_{/F}$.
On note $\alpha_F(f)$ l'élément de $\widehat{C_{/F}}$ tel que

$$\alpha_F(f)(X,\alpha) = f(X)^{-1}(\alpha) \subset G(X)$$

pour $(X,\alpha) \in C_{/F}$ et que $\alpha_F(f)(\phi)$ soit induit par $f(\phi)$ pour toute flèche ϕ de $C_{/F}$. De même, pour tout morphisme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & G' \arrow[dl, "f'"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

de $\hat{C}_{/F}$, on note $\alpha_F(h)$ le morphisme fonctoriel $\alpha_F(f) \longrightarrow \alpha_F(f')$ tel que $\alpha_F(h)(X,\alpha)$ soit induit par $h(X)$ pour tout $X \in C$.

Proposition : Le foncteur $\alpha_F : \hat{C}_{/F} \longrightarrow \widehat{C_{/F}}$ est une équivalence de catégories.

En effet, on construit un foncteur quasi-inverse $\beta_F : D_{/F} \longrightarrow \hat{C}_{/F}$ en associant à tout foncteur $A \in \widehat{C_{/F}}$ la flèche $f:G \longrightarrow F$ de $\hat{C}$ telle que pour $X \in C$, $G(X)$ soit la somme disjointe des $A(X,\xi)$ pour ξ parcourant $F(X)$ et $f(X): G(X) \longrightarrow F(X)$ la projection évidente.

Exemple. Soit $f:G \longrightarrow F$ comme ci-dessus, et doit $h:F' \longrightarrow F$ un morphisme de $\hat{C}$. Posons $G' = G \times_F F'$; pour $X \in C$, on a donc

$$G'(X) = \{(u,v)\ G(X) \times F'(X) \mid f(X)(u) = h(X)(v)\}.$$

Calculons $\alpha_{F'}(f')$ où $f':G' \longrightarrow F'$ est la projection canonique. Si $(X,\alpha')\ C_{/F'}$, on a

$$\alpha_{F'}(f')(X\alpha') = f'(X)^{-1}(\alpha') = f(X)^{-1}[h(X)(\alpha')] = {}_F(f)(X,\alpha)$$

où $\alpha = h(X)(\alpha')\ F(X)$. On a donc

$$\alpha_{F'}(f') = \alpha_F(f) \circ i$$

où $i: C_{/F'} \longrightarrow C_{/F}$ est le foncteur $(X,\alpha') \longrightarrow (X,\alpha)$

3.- Foncteurs représentables.

A partir de maintenant, on identifie C à une sous-catégorie de $\hat{C}$ grâce à h. On note donc X le foncteur h_X. De même on identifie $F(X)$ et $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(X,F)$ grâce au lemme de Yoneda.

Remarquons que les foncteur α_F sont compatibles avec les identifications $C_{/F} \subset \hat{C}_{/F}$ et $C_{/F} \subset \widehat{C_{/F}}$.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous restreindrons l'étude des catégories $C_{/H}$ au cas où $H\in C$. Le cas général $H\in\hat{C}$ est identique, modulo les modifications d'écriture évidentes.

Soit donc $S\in C$. On dit qu'un foncteur $F\in\widehat{C_{/S}}$ est <u>représentable</u> s'il est isomorphe à un objet de $C_{/S}\subset\widehat{C_{/S}}$. Plus précisément, <u>un représentant de</u> F est un couple $(X \to S,\xi)$, où $X \to S$ est un objet de $C_{/S}$ et où $\xi\in F(X)$, (on écrit $F(X)$ pour $F(X \to S)$) tel que le morphisme fonctoriel $u:h_{X \to S} \longrightarrow F$ tel que $\gamma(u)=\xi$ (lemme de Yoneda) soit un isomorphisme, c'est-à-dire que la condition suivante soit satisfaite :

(U) <u>Pour tout objet</u> $T \to S$ <u>de</u> $C_{/S}$ <u>et tout</u> $\alpha\in F(T)$, <u>il existe un</u> S- <u>morphisme</u> $f:T \to T$ <u>unique tel que</u> $\alpha = F(f)(\xi)$.

Si $(X \to S,\xi)$ et $(X' \to S, \xi')$ sont deux représentants de F, il résulte de (U) qu'il existe un unique S-morphisme $\phi:X — X'$ tel que $F(\phi)(\xi')= \xi$ et que ϕ est un isomorphisme.

Plus généralement, si $(X \to S,\xi)$ représente le foncteur F et $(Y \to S,\eta)$ le foncteur G, et si $u:F \to G$ est un morphisme de foncteurs ; il existe un unique S-morphisme $\phi:X \to Y$ tel que $G(\phi)(\eta) = u(X)(\xi)$; pour tout objet $T \to S$ de $C_{/S}$, et tout $\alpha \in F(T)$, les S-morphismes uniques $f:T \to X$ et $g:T \to Y$ tels que $\alpha=F(f)(\xi)$ et $u(T)(\alpha) = G(g)(\eta)$ sont tels que $g=\phi\circ f$. On dit alors que ϕ <u>représente</u> le morphisme u.

<u>Exemples</u> 1. Prenons C la catégorie opposée à celle des anneaux, pour S un anneau A, pour F le foncteur $B \to \mathrm{Hom}_{A\text{-modules}}(M,B)$ où M est un A-module. Ce foncteur est représentable : il existe un anneau $S_A(M)$, un homomorphisme $A \to S_A(M)$ et une application A-linéaire $\xi:M \to S_A(M)$ tels que : pour tout anneau B, $f \to f\circ\xi$ est une bijective de $\mathrm{Hom}_{A\text{-algèbres}}(S_A(M),B)$ sur $\mathrm{Hom}_{A\text{-modules}}(M,B)$. On dit que la A-algèbre $S_A(M)$(muni de ξ) est l'<u>algèbre symétrique</u> de M.

<u>Exemple</u> 2. Prenons pour C la catégorie des schémas. Soit $S\in C$ et soit E un O_S-module quasi-cohérent. on définit $F:\mathrm{Sch}_{/S} \to \mathrm{Ens}$ par

$$F(p:T \to S)=\mathrm{Hom}_{O_T}(E\otimes_{O_S} O_T, O_T) \simeq \mathrm{Hom}_{O_S}(E,p_*(O_T)).$$

Ce foncteur est représentable : il existe un S-schéma $X=\mathbb{V}(E)$ et un O_X-homorphisme $\xi : E\otimes_{O_S} O_X \longrightarrow O_X$ telsque, pour tout S-schéma T et tout $\phi : E\otimes_{O_S} O_T \longrightarrow O_T \longrightarrow O_T$, il existe un S-morphisme $f:T \longrightarrow \mathbb{V}(E)$, unique, tel que ϕ provienne de ξ grace à f . On appelle $\mathbb{V}(E)$ le <u>fibré vectoriel</u> associé à E .

Par exemple, si S=Spec A et $E=\tilde{M}$, on peut prendre X=Spec $S_A(M)$.

<u>Exemple</u> 3. Soient S et E comme ci-dessus. On définit un foncteur G par

$$G(T \longrightarrow S) = \{\text{sous-}O_T\text{-modules } F \text{ de } E\otimes_{O_S} O_T \text{ tels que } (E\otimes_{O_S} O_T)/F \text{ soit inversible}\}.$$

Alors G est représentable par un couple $(\mathbb{P}(E), F_o)$ où $\mathbb{P}(E)$ est un S-schéma et $F_o\in G(\mathbb{P}(E))$. On appelle $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif associé à E. On pose $O_{P(E)}(1) = (E\otimes_{O_S} O_{P(E)})/F_o$ et on a un épimorphisme canonique

$$E\otimes_{O_S} O_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}(1) .$$

Soit E' un autre O_S-module quasi-cohérent, posons $E'' = E\otimes E'$, et soient G' et G" les foncteurs définis par E' et E" . On a un morphisme canonique de $\hat{C}_{/S}$

$$u:G\times G' \longrightarrow G'' :$$

pour chaque $T \longrightarrow S$, u(T) est le morphisme

$$G(T)\times G'(T) \longrightarrow G''(T)$$

qui associe à $F\subset E\otimes_{O_S} O_T$ et $F'\subset E'\otimes_{O_S} O_T$ le sous-module

$F''=(E\otimes_{O_S} O_T)\otimes_{O_T} F' + F\otimes_{O_T}(E'\otimes_{O_S} O_T))\subset E''\otimes_{O_S} O_T$. Ce morphisme est représenté par le <u>morphisme de Segre</u>

$$\mathbb{P}(E) \times_S \mathbb{P}(E') \longrightarrow \mathbb{P}(E\otimes E') ,$$

qui est une immersion fermée).

Exemple 4. Soit P une "propriété éventuelle" d'un objet de $C_{/S}$ telle que

$(*)$ si $\mathrm{Hom}_S(T',T) \neq \emptyset$, alors $P(T) \Longrightarrow P(T')$.

On définit un foncteur $H \in \widehat{C_{/S}}$ par

$H(T) = \emptyset$ si $P(T)$ est faux,

$H(T) = \{\emptyset\}$ si $P(T)$ est vrai ;

si $f \in \mathrm{Hom}_S(T',T)$, $H(f)$ est l'unique application de $H(T)$ dans $H(T')$. Dire que le foncteur H est représentable revient à dire : il existe un objet $X \longrightarrow S$ de $C_{/S}$ tel que $P(X)$ soit vrai et que

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{Hom}_S(T,X) = 0 \Longleftrightarrow P(T) \text{ est faux}$$

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{Hom}_S(T,X) = 1 \Longleftrightarrow P(T) \text{ est vrai.}$$

Autrement dit, $X \longrightarrow S$ est un monomorphisme, et $P(T)$ est vrai si et seulement si $T \longrightarrow S$ se factorise par X. On dit parfois que H est le <u>foncteur qui rend la propriété vraie</u>, ou que X est <u>l'objet de $C_{/S}$ qui rend la propriété</u> P <u>vraie</u>.

Donnons un exemple. On prend $C = \mathrm{Sch}$ et pour P la propriété "$Z \times_S T$ est plat sur T" où Z est un S-schéma fixé ; on verra dans la suite que le foncteur correspondant est bien représentable, pourvu que Z soit propre et de présentation finie sur S .

4.- Morphismes représentables

Soit d'abord $S \in C$ et soit $u: F \longrightarrow S$ un objet de $\hat{C}_{/S}$. Il revient au même de dire que F est représentable (comme foncteur sur $C = C_{/\mathrm{final}}$) ou que $\alpha_F(f) \in C_{/S}$ l'est.

Prenons plus généralement un morphisme $u: F \longrightarrow G$ de $\hat{C}$. On dit que u est <u>représentable</u> s'il satisfait aux conditions <u>équivalentes</u> suivantes :

(i) Pour tout objet S de C et tout morphisme $S \longrightarrow G$ le produit fibré $F \times_G S$ est représentable.

(ii) Pour tout objet S de C et tout $\eta \in G(S)$ le foncteur $\longrightarrow \{(x,\alpha) \mid x \in F(T), \alpha: T \longrightarrow S,\ F(\alpha)(\eta) = u(T)(x)\}$ sur C est représentable.

(iii) Pour tout objet S de C et tout $\eta \in G(S)$, le foncteur $F_\eta : (\alpha : T \longrightarrow S) \longrightarrow \{x \in F(T) \mid F(\alpha)(\eta) = u(T)(x)\}$ sur $C_{/S}$ est représentable.

On a trivalement :

<u>Proposition. Supposons que la catégorie</u> C <u>possède des produits fibrés et que</u> G <u>soit représentable. Pour que</u> $u : F \longrightarrow G$ <u>soit représentable, il faut et il suffit que</u> F <u>le soit.</u>

Soit M un ensemble de morphisme de C tel que pour tout carré cartésien
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & S \arrow[d, "u"] \\ T' \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$
de C où $u \in M$, alors $u' \in M$.

On dit que le morphisme $u : F \longrightarrow G$ de $\hat{C}$ est <u>représentable par éléments de</u> M s'il est représentable et si, dans la situation de (iii), le morphisme $X \longrightarrow S$ qui représente F est un élément de M. Si u est un morphisme de C, il est clair qu'il est représentable par éléments de M si et seulement si il appartient à M.

Comme exemple, prenons $C = Sch_{/S}$, soient E et F deux O_S-modules quasi-cohérents, et considérons les deux foncteurs F et G tels que
$$F(T) = Hom_{O_T}(E \otimes_{O_S} OT, F \otimes_{O_S} OT)$$
et que $G(T)$ soit le sous-ensemble de $F(T)$ formé des épimorphismes. Alors l'injection canonique $G \longrightarrow F$ est représentable par <u>immersions ouvertes</u> : pour tout $T \longrightarrow S$ et tout $\eta \in F(T) = Hom_{O_T}(E \otimes_{O_S} T, F \otimes_{O_S} OT)$, le foncteur $F_\eta : (Sch_{/T})^\circ \longrightarrow Ens$ est défini par la propriété P suivante : on a $P(U)$ si et seulement si $\eta_T \times id_U$ est un épimorphisme. Il résulte alors facilement du lemme de Nakayama que F_η est un sous-schéma ouvert de T.

Exposés II et III
Présentation finie

Exposés oraux de J.C. SAUT et P. BILLOT
rédigés par M. BLONDEAU

I. ALGEBRES DE PRESENTATION FINIE
MORPHISMES DE PRESENTATION FINIE.

1.1 Définition : Une A-algèbre B est dite de présentation finie si elle est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes $A[X_1,\dots,X_n]$ par un idéal de type fini de $A[X_1,\dots,X_n]$.

1.2 Remarques : Si l'anneau A est néothérien une A-algèbre B est de présentation finie si et seulement si elle est de type fini.

- Si $f\in A$, la A-algèbre A_f est de présentation finie puisque

$A_f \cong A[T]/(fT-1)$

1.3 Transitivité : Si B est une A-algèbre de présentation finie et si C est une B algèbre de présentation finie, alors C est une A-algèbre de présentation finie.

1.4 Lemme : Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in L}$ un système inductif filtrant d'anneaux, de limite inductive A. Si B est une A-algèbre de présentation finie, il existe un indice α et une A_α-algèbre de présentation finie B_α telle que B soit isomorphe à $A\otimes_{A_\alpha}B_\alpha$

Preuve : Par définition, B est isomorphe à un quotient $A[X_1,\dots,X_n]/I$, où I est de type fini. Soit $P_1,\dots,P_r$ un système de générateurs de I. L étant filtrant, il existe un α tel que l'image de A_α par l'application canonique $A_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} A$ contienne tous les coefficients des P_i. Il existe donc des polynômes $Q_1,\dots,Q_r$ de $A_\alpha[X_1,\dots,X_n]$ tels que $\varphi_\alpha(Q_i) = P_i$, $1\leqslant i\leqslant r$. Soit I_α l'idéal de $A_\alpha[X_1,\dots,X_n]$ engendré par les Q_i. Alors I est l'image de $I_\alpha\otimes_{A_\alpha}A$ dans $A[X_1,\dots,X_n] = A\otimes_{A_\alpha}A_\alpha[X_1,\dots,X_n]$.

Il suffit de poser $B = A[X_1,\dots,X_n]/I$.

1.5 Exemple : Soit A un anneau. A est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux de type fini, c'est-à-dire de ses sous-Z algèbres de type fini. On voit donc que B est de présentation finie sur A si et seulement s'il existe un sous anneau A_o de type fini de A et une A_o-algèbre de type fini B_o telle que $B \simeq A \otimes_{A_o} B_o$.

1.6 Lemme : Si $\varphi : B \longrightarrow C$ est un homomorphisme surjectif de A-Algèbres de présentation finie, alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un idéal de type fini de B .

Preuve : D'après 1.5 il existe un sous-anneau de type fini A_o de A et une A_o-algèbre de type fini C_o telle que $C = A \otimes_{A_o} C_o$. Soit p la projection canonique de $A[X_1,\dots,X_n]$ sur $B = A[X_1,\dots,X_n]/I$. On peut choisir A_o assez grand pour qu'il existe des $\xi_i \in C_o$ tels que $1 \otimes_{A_o} \xi_i = \varphi(p(X_i))$. Soit $\eta_1,\dots,\eta_s$ un système de générateurs de C_o sur A_o . On a alors des relations polynomiales $1 \otimes_{A_o} \eta_i = Q_j(1 \otimes_{A_o} \xi_i,\dots,1 \otimes_{A_o} \xi_n)$ à coefficients dans A , et on peut encore prendre A_o assez grand pour que $\eta_j = Q_j(\xi_1,\dots,\xi_n)$ de sorte que les ξ_i engendront C_o. De même, si $P_1,\dots,P_r$ engendront l'idéal I , on a $P_j(\xi_1,\dots,\xi_n) = 0$ pour A_o assez grand.

L'homomorphisme de $A_o[X_1,\dots,X_n]$ dans C_o qui envoie X_i sur ξ_i se factorise alors à travers un homomorphisme φ_o de $B_o = A_o[X_1,\dots,X_n]/(P_1,\dots,P_n)$ sur C_o. On a alors $\varphi = 1_A \otimes_{A_o} \varphi_o$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est l'image de $A \otimes_{A_o} \mathrm{Ker}\,\varphi_o$ dans B donc est de type fini.

1.7 Lemme : Soit B une A -algèbre et (fi) une famille d'éléments de B tels que la famille $(D(fi))$ recouvre $\mathrm{Spec}\, B$ (de sorte que $1 = \Sigma\, x_i f_i, x_i \in B$). Si B_{fi} est une A-algèbre de présentation finie sur A pour tout i, alors B est de présentation finie sur A .

Preuve : Faisons parcourir à B_o les sous A-algèbres de type fini de B contenant les f_i et les x_i .

On a donc $B = \varinjlim B_o$ et $B_{fi} =$ et on peut remarquer que pour B_o assez grand on a $B_{o_{fi}} = B_{fi}$; les B_{fi} étant de type fini sur A . D'où :

$$\prod_i B_{o_{fi}} = \prod_i B_{fi} = \prod_\iota (B \otimes_{B_o} B_{o_{fi}}) = B \otimes_{B_o} (\prod B_{o_{fi}})$$

Puisque $\prod B_{o_{fi}}$ est fidèlement plat sur B_o (BhKi Alg com II §5 n° 1), on en déduit que $B = B_o$; B est donc de la forme $A[X_1,\dots,X_n]/I$.

Soient Q_i , P_i des représentants de $\;_i$, f_i dans $A[X_1,\dots,X_n]$ et soit I' l'idéal de $A[X_1,\dots,X_n]$ engendré par $1 - \Sigma\, Q_i P_i$. Alors $(A[X_1,\dots,X_n]/I')_{P_i}$ est de présentation finie sur A . D'après (1.6), le noyau $(I/I')_{P_i}$ de l'application $(A[X_1,\dots,X_n]/I')_{P_i} \longrightarrow B_{f_i}$ est de type fini. Donc I/I' est de type fini (BhKi Alg. com II § 5. n°1) ainsi que I .

1.8 <u>Définition</u> . Un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ est dit localement de présentation finie si, pour tout $x \in X$, il existe des ouverts affines U de X et V de Y tels que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subset V$ et que $\Gamma(U, O_X)$ soit une $\Gamma(V, O_Y)$-algèbre de présentation finie.

1.8.1 <u>Rappels</u> : Un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ est dit <u>quasi-compact</u> si l'image réciproque $f^{-1}(U)$ d'un ouvert quasi-compact de Y est quasi-compacte.

Un morphisme de schémas $\;: X \longrightarrow Y$ est dit <u>quasi-séparé</u> si le morphisme diagonal $\Delta_g : X \longrightarrow X \times_Y X$ est quasi compact.

Les deux notions ci-dessus sont stables par changement de base.

Un schéma X est dit quasi séparé si le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est quasi séparé. Il revient au même de dire que l'intersection de deux ouverts quasi compacts de X est quasi compacte. (il suffit d'ailleurs de vérifier cette propriété pour un recouvrement de X formé d'ouverts quasi compacts).

Si X est quasi séparé, tout morphisme $X \longrightarrow Y$ est quasi séparé car la propriété de quasi séparation est stable par composition et que si $g \circ f$ est quasi séparé alors f est quasi séparé.

1.9 <u>Définition</u> : Un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ est dit de présentation finie s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé.

1.10 <u>Proposition</u> : Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B est une A-algèbre de présentation finie.

(ii) Le morphisme $f = \mathrm{Spec}\,\varphi : \mathrm{Spec}\,B \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$ est localement de présentation finie.

(iii) $\mathrm{Spec}\,\varphi$ est de présentation finie.

<u>Preuve</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) puisque $\mathrm{Spec}\,\varphi$ est quasi compact et quasi séparé puisque Spec B est un schéma quasi-séparé

(ii) $\Rightarrow$ (i) Posons $X = \mathrm{Spec}\,B$, $Y = \mathrm{Spec}\,A$. Si $x \in X$ il existe des ouverts affines $U = \mathrm{Spec}\,B'$, $V = \mathrm{Spec}\,A'$ de X et Y tels que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subset V$ et B' soit une A'-algèbre de présentation finie. Il existe $t \in A$ tel que $f(x) \in Y_t \subset V$.

On a alors $\Gamma(f^{-1}(Y_t) \cap U, O_X) = \Gamma(U_{\varphi(t)}, O_X) = \Gamma(U, O_X)_{\varphi(t)} = B'_{\varphi(t)}$.

$\Gamma(U_{\varphi(t)}, O_X)$ est donc de présentation finie sur $\Gamma(V, O_Y)_t = A_t$, donc aussi sur A. Quitte à remplacer U par $U_{f(t)}$, on peut donc supposer que $V = Y$. Dans ce cas il existe $s \in B$ tel que $x \in X_s \subset U$; on a alors $\Gamma(X_s, O_X) = \Gamma(U, O_X)_s = B_s$ et B_s est une A-algèbre de présentation finie

En recouvrant X par un nombre fini de tels X_s on conclut avec le lemme (1.7).

1.11 <u>Corollaire</u> : Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas localement de présentation finie, U' et V' des ouverts affines de X et Y tels que $f(U') \subset V'$

Alors $\Gamma(U', O_X)$ est une $\Gamma(V', O_Y)$-algèbre de présentation finie.

<u>Preuve</u> : D'après 1.10, il suffit de montrer que le morphisme $f' : U' \longrightarrow V'$ induit par f est localement de présentation fini. Soit $x \in U'$ et soient U et V choisis comme dans 1.8. Il existe $t \in \Gamma(V, O_Y)$ tel que

$f(x) \in V_t \subset V \cap V'$. $\Gamma(f^{-1}(V_t) \cap U, O_X) = \Gamma(U, O_X)_t$ est donc de présentation finie sur $\Gamma(V_t, O_Y)$.

Il existe $s \in \Gamma(U, O_X)$ tel que $x \in U_s \subset f^{-1}(V_t) \cap U \cap U'$

Puisque $\Gamma(U_s, O_X) = \Gamma(U, O_X)_{ts'}$, $\Gamma(U_s, O_X)$ est de présentation finie sur $\Gamma(V_t, O_Y)$ et on a bien $f(x) \subset V_t \subset V'$ et $f(U_s) \subset V_t$.

1.12 <u>Corollaire</u> : Un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ est de présentation finie si et seulement si Y et X peuvent être recouverts par des ouverts affines Y_i, X_{ij} tels que :

a) Pour i fixé, les X_{ij} soient en nombre fini et recouvrent $f^{-1}(Y_i)$

b) Pour tout triplet (i,j,l), $X_{ij} \cap X_{il}$ soit quasi-compact

c) Pour tout couple (i,j), $\Gamma(X_{i,j}, O_X)$ soit une $\Gamma(Y_i, O_Y)$-algèbre de présentation finie.

<u>Preuve</u> : Cela résulte de 1.11 et des définitions.

1.13 <u>Proposition</u> : Soient X, Y deux schémas, $j : X \longrightarrow Y$ une immersion, U un ouvert de Y tel que $j(X)$ soit fermé dans U . J l'idéal quasi-cohérent de O_U définit pour le sous schéma fermé de Y associé à j .
Pour que j soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que J soit un O_U-module de type fini.

<u>Preuve</u> : Résulte de 1.6

1.14 <u>Proposition</u> : a) Le composé de deux morphismes localement de présentation finie (resp. présentation finie) est localement de présentation finie (resp. présentation finie).

b) Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \times_Y Y' \arrow[l] \arrow[d, "f_{Y'}"] \\ Y & Y' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Si f est localement de présentation finie (resp de présentation finie) alors $f_{Y'}$ est localement de présentation finie (resp de présentation finie)

c) Si gof et g sont localement de présentation finie (resp si gof est de présentation finie et si g est quasi-séparé et localement de présentation finie) alors f est localement de présentation finie (resp de présentation finie).

Preuve : résulte des définitions 1.8 et 1.9 et de ce que les notions de morphismes quasi-compacts et quasi-séparés sont stables par changement de base

a) résulte de 1.11 et de la stabilité des morphismes quasi compacts et quasi séparés par composition.

c) Montrons par exemple le cas des morphismes de présentation finie.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$. f est le composé des morphismes $X \xrightarrow[\gamma]{} X \times_Z Y \xrightarrow[(gf)_Y]{} Y$ où γ est le morphisme graphe des composantes id_X et f et où $(gf)_Y$ est de présentation finie d'après b)

Il suffit donc, d'après a), de montrer que γ est de présentation finie.

Or γ se déduit de $\Delta_{Y/Z} : Y \longrightarrow Y \times_Z Y$ par le changement de base $f \times_Z idY : X \times_Z Y \longrightarrow Y \times_Z Y$

Comme $\Delta_{Y/Z}$ est quasi séparé (puisque c'est un monomorphisme), et quasi-compact, il reste à voir que $\Delta_{Y/Z}$ est localement de présentation finie

On se ramène pour cela au cas affine. Il s'agit alors de montrer que le noyau de l'application canonique de $\Gamma(Y,O_Y) \otimes_{\Gamma(Z,O_Z)} \Gamma(Y,O_Y)$ dans $\Gamma(Y,O_Y)$ est de type fini. C'est vrai, car si $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système de générateurs de $\Gamma(Y,O_Y)$ sur $\Gamma(Z,O_Z)$, ce noyau est engendré par les $g_i \otimes 1 - 1 \otimes g_i$.

II. PASSAGE A LA LIMITE INDUCTIVE
DANS LES ANNEAUX

2.1. <u>Introduction</u> : On se donne un ensemble I , préordonné filtrant croissant, possédant un plus petit élément α ; $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})_{\lambda\in I}$ un système inductif d'anneaux de limite inductive A , et un A_α-schéma X_α .

Posons pour tout $\lambda\in I$, $X_\lambda = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda$ et $X = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$

Il est clair que les schémas X_λ forment un système projectif et on verra que X est une limite projective de ce système dans la catégorie des schémas.

On cherche des conditions sur les A_λ et sur X_α pour obtenir des énoncés du genre : Pour que X possède une propriété P il faut et il suffit qu'il existe $\lambda\in I$ tel que pour tout $\mu\geqslant\lambda$, X_μ ait la propriété P .

<u>2.1.1. Exemples</u> :

2.1.1.1 Soit $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ un morphisme de schémas ; soit $y\in \operatorname{Spec} A$. Supposons que $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_y) = Z$ ait une certaine propriété P . On sait que $A_y = \varinjlim A_t$, $t\in A-p$ et on verra que sur les spectres ceci correspond à l'isomorphisme $\operatorname{Spec} A_y \simeq \varprojlim U_\alpha$, U_α parcourant l'ensemble des voisinnages ouverts de y . On pose $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Il est clair que $Z = \varprojlim X_\alpha$ et que les X_α forment un système projectif du type décrit plus haut.

Si Z vérifie P on pourra trouver un voisinnage $f^{-1}(U_\alpha)$ de la fibre de y qui vérifie P .

Si par exemple on prend $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $y = 0$, chaque U_λ peut s'interpréter comme le complémentaire d'un ensemble fini de nombres premiers. Si on connait une propirété de la fibre generique (i-e d'un $\mathbb{Q}$-schéma) on pourra en déduire la même propriété pour les fibres sur presque tous les nombres premiers P .

2.1.1.2 Si on part d'une situation géométrique au-dessus d'un corps K , on
on considère K comme extension d'un corps k
considère K' (par exemple son corps premier) et on écrit $K = \varinjlim k_i$, k_i parcourant l'ensemble des sous K-extension de type fini de k . On peut ainsi se

ramener au cas d'un corps, extension de type fini de k.

2.1.1.3. Si $Y = \operatorname{Spec} A$, on considérera A comme limite inductive de ses sous-anneaux, qui sont des $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini, et on pourra ainsi se ramener à des situations au-dessus du spectre d'une telle algèbre (et éliminer les hypothèses nœthériennes dans des théorèmes du type "propriétés topologiques des morphismes plats").

2.2. Systèmes inductifs d'anneaux

Soit $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})_{\lambda \in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux. On se propose d'étudier $\operatorname{Spec} \varinjlim A_\lambda$ on pose $\varinjlim A_\lambda = A$.

2.2.1 Proposition : Si $\mu \geqslant \lambda$ notons $u_{\lambda\mu}$ le morphisme $\operatorname{Spec} A_\mu \to \operatorname{Spec} A_\lambda$ correspondant à $\varphi_{\mu\lambda}$, alors $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ forme un système projectif dont la limite, dans la catégorie des schémas et dans la catégorie des espaces topologiques s'identifie à $\operatorname{Spec} A$.

Preuve : Montrons d'abord que $\operatorname{Spec} A$ est une limite projective pour le système $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans Sch. Il suffit, par définition d'une limite projective, de montrer que, pour tout schéma Y, il a une bijection entre $\mathrm{m}(Y, \operatorname{Spec}(\lim A_\lambda))$ et $\varprojlim \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A_\lambda)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Mais } \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec}(\varinjlim A_\lambda)) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\varinjlim A_\lambda, \Gamma(Y, O_Y)) \\
&\simeq \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A_\lambda, \Gamma(Y, O_Y)) \\
&\simeq \varprojlim \operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Spec} A_\lambda)
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que $\operatorname{Spec} A$ est une limite projective de $(\operatorname{Spec} A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans Top.

On voit que les morphismes $u_\lambda : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A_\lambda$, qui correspondent aux φ_λ forment un système projectif de morphismes, d'où un morphisme $\operatorname{Spec} A \xrightarrow{u} \varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda$

Nous allons voir que u est un homeomorphisme.

u est injectif car, si $p, q \in \operatorname{Spec} A$ avec $p \neq q$, on sait que $p = \varinjlim \varphi_\lambda^{-1}(p)$ $q = \varinjlim \varphi_\lambda^{-1}(q)$. Donc il existe un μ tel que $\varphi_\mu^{-1}(p) \neq \varphi_\mu^{-1}(q)$.

. u est surjectif ; en effet soit $(p_\lambda)_{\lambda\in I}$ un élément de $\varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda$; on a alors $\varphi^{-1}_{\mu\lambda}(p_\mu) = p_\lambda$ pour tout couple λ,μ tel que $\mu \geq \lambda$, et on vérifie aisément que $(p_\lambda)_{\lambda\in I}$ est l'image par u de l'idéal $p = \varinjlim \varphi_\lambda(p_\lambda)$ de A.

. u^{-1} est continue : En effet, notant P^r_α la projection canonique $\varprojlim \operatorname{Spec} A_\lambda \to \operatorname{Spec} A_\alpha$, on voit que, si $f \in A$, $f = \varphi_\alpha(f_\alpha)$, P appartient à $D(f)$ si et seulement si P appartient à $P^{r\,-1}_\alpha(D(f_\alpha))$

2.3 Généralisation
Systèmes projectifs de schémas à morphismes de transition affines.

Rappelons (EGA II §1) qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est dit affine s'il existe un recouvrement (Y_α) de Y par des ouverts affines tels que pour tout α, le schéma induit par X sur l'ouvert $f^{-1}(Y_\alpha)$ soit affine On montre qu'alors pour tout ouvert affine U de Y, le schéma induit par X sur $f^{-1}(U)$ est affine.

La notion de morphisme affine est stable par composition et par changement de base.

Considérons un système projectif filtrant $(S_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda\in I}$ de schémas tel que les $v_{\lambda\mu}$ soient des morphismes affines. Nous supposons que I possède un plus petit élément α.

2.3.1 Proposition : Le système $(S_\lambda, v_{\lambda\mu})$ admet une limite projective dans la catégorie des schémas.

Preuve : On procède par recollement, compte tenu de (2.2)

Recouvrons S_α par des ouverts affines $U_{i\alpha}$. Le système des $v^{-1}_{\alpha\lambda}(U_{i\alpha})$ est projectif et les morphismes $v_{\alpha\lambda}$ étant affines c'est un système projectif de schémas affines. Il admet donc une limite projective U_i qui est un schéma affine. On vérifie que l'on peut recoller les U_i en un schéma S.

Soit T un schéma et (h_λ) un système projectif de morphismes de T dans les S_λ. Les $h_\lambda|_{h_\lambda^{-1}(v^{-1}_{\alpha\lambda}(u_{i\alpha}))}$ forment alors un système projectif de morphismes de $h_i : h^{-1}_\alpha(U_{i\alpha})$ dans les $v^{-1}_{\alpha\lambda}(U_{i\alpha})$, d'où monomorphisme

$h_i : h_\alpha^{-1}(U_{i\alpha}) \longrightarrow U_i$. On vérifie encore que l'on peut recoller les h_i en un morphisme $h : T \to S$ satisfaisant les conditions requises.

Remarque : les morphismes canoniques $S \xrightarrow{v_\lambda} S_\lambda$ sont affines ; il suffit de tester sur un recouvrement affine de S_λ .

2.3.2 __Lemme__ : Reprenons les notations de (2.3.1). Si U est un ouvert quasi compact de S , il existe un indice λ et un ouvert quasi compact U_λ de S_λ tel que $U = U_\lambda \times_{S_\lambda} S$

__Preuve__ : U est en effet réunion finie d'ouverts affines de la forme $v_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ par définition de la topologie de la limite projective et puisque les v_λ sont affines. Mais alors il existe un λ et des ouverts affines $V_{i\lambda}$ en nombre fini de S_λ tels que $V = \bigcup_i V_{i\lambda} \times_{S_\lambda} S$

2.3.3 __Lemme__ : Pour tout sous-schéma quasi compact Z_λ de S_λ tel que $Z_\lambda \times_{S_\lambda} S = \emptyset$, il existe un $\lambda \geqslant \lambda$ tel que $Z_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu = \emptyset$

__Preuve__ : Recouvrons Z_λ par des ouverts affines $U_{i\lambda}$ en nombre fini. On a par hypothèse $U_{i\lambda} \times_{S_\lambda} S = \emptyset$; si on prouve le lemme pour les $U_{i\lambda}$, le résultat général se déduira en prenant le sup des $\mu(i)$. On est donc ramené au cas où Z_λ est affine. Soit $Z_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda$. Les $v_{\lambda\mu}^{-1}(Z_\lambda)$ forment un système projectif de spectres (puisque les $v_{\lambda\mu}$ sont affines) associé au système inductif des anneaux A_λ . On a donc $\operatorname{Spec}(\varinjlim A_\lambda) = \emptyset$ i.e $\varinjlim A_\lambda = 0$ donc $A_\mu = 0$ pour un $\mu \geqslant \lambda$ et $\operatorname{Spec} A_\mu = \emptyset$.

On considère donc maintenant la situation suivante : on se donne un S_α schéma X_α , et on pose pour tout λ

$X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$ et $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$. Notons que les $u_{\lambda\mu} = 1_{X_\alpha} \times v_{\lambda\mu}$ de X_μ dans X_λ , pour $\mu \geqslant \lambda$ sont encore affines puisqu'ils sont obtenus par changement de base à partir de morphismes affines.

2.3.4 Proposition : $(X_\lambda, u_{\lambda\mu})$ forme un système projectif filtrant de schémas donc la limite projective de ce système (qui existe d'après (2.3.1) et ci-dessus) s'identifie à $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$.

Preuve : On veut montrer que pour tout schéma T ,

$$\mathrm{Hom}(T , \varprojlim X_\lambda) = \varprojlim \mathrm{Hom}(T,X_\lambda)$$

Mais par définition des produits fibrés $X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$, on a le diagramme exact :

$$\mathrm{Hom}(T , X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda) \to \mathrm{Hom}(T , X_\alpha) \times \mathrm{Hom}(T , S_\lambda) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(T , S_\alpha)$$

et en passant à la limite projective - le foncteur $\varprojlim$ étant exact à gauche - on obtient

$$\varprojlim_\lambda \mathrm{Hom}(T , X \times_{S_\alpha} S_\lambda) \to \varprojlim_\lambda(\mathrm{Hom}(T,X_\alpha) \times \mathrm{Hom}(T,S_\lambda)) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(T , S_\alpha)$$

i.e, puis que $\varprojlim$ commutte aux produits et puisque $S = \varprojlim_\lambda S_\lambda$,

$$\varprojlim_\lambda \mathrm{Hom}(T,X_\alpha \times_S S_\lambda) \to \mathrm{Hom}(T,X_\alpha) \times \mathrm{Hom}(T,S) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(T,S_\alpha)$$

Ce qui définit $\varprojlim \mathrm{Hom}(T,X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda)$ comme produit fibré de X_α et S au ~~dessus de~~ S_α .

III. FONCTEURS LOCALEMENT DE PRESENTATION FINIE. COMPORTEMENT DES PROPRIETES PAR PASSAGE A LA LIMITE PROJECTIVE

3.0 Présentation finie et limites projectives de schémas.

3.0.1 Soit $(S_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres de limite projective S, X_α un schéma sur S_α, $X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$ pour $\lambda \geqslant \alpha$.

On a vu que $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$ était la limite projective des $(X_\lambda, f_{\lambda\mu})$ et $\underline{X}$ la limite des $\underline{X}_\lambda$.

Soit U un ouvert quasi compact de $\underline{X}$, alors il existe λ et U_λ ouvert quasi-compact de $\underline{X}_\lambda$, tel que

$= f_\lambda^{-1}(U_\lambda) = U_\lambda \times_{S_\lambda} S$ puisque $\varprojlim \underline{X}_\lambda = \underline{X}$.

3.0.2 Avec les mêmes notations que dans (3.0.1) soit Z_α un sous schéma quasi compact de X_α tel que $Z_\alpha \times_{S_\alpha} S = \emptyset$.

Alors il existe un λ tel que $Z_\lambda = Z_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda = \emptyset$.

La propriété étant locale ou peut supposer X_α affine et Z_α fermé dans X_α ; soit A_α l'anneau de X_α et $\mathfrak{J}_\alpha$ l'idéal définissant Z_α. On a par hypothèse :

$$A_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha \otimes_{S_\alpha} S = \varinjlim_{\lambda \geqslant \alpha} A_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha \otimes_{S_\alpha} S_\lambda = 0$$

(en désignant l'anneau de S_α par S_α).

On a donc de manière évidente un λ tel que

$$A_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha \otimes_{S_\alpha} S_\lambda = 0$$

donc $Z_\lambda = \emptyset$

3.0.3 Corollaire : Pour toute partie localement fermée quasi compacte Y_α de X_α telle que $f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) = \emptyset$ il existe Y tel que $f_{\alpha\lambda}^{-1}(Y_\alpha) = \emptyset$

3.1 Foncteurs localement de présentation finie. Passage à la limite projective.

3.1.1 Définition : Soit F un foncteur de $(Sch/_S)°$ dans Ens. F est dit loca-

que
de présentation si, étant donné un système projectif de spectres S_α

de limite S on a :

$$F\ (\varprojlim S_\alpha) = \varinjlim F\ (S_\alpha)$$

3.1.2 Schémas de présentation finie sur une limite projective de schémas (i.e de spectres)

3.1.2.1 Théorème : Soit S un schéma, X et Y deux S schémas tels que $X \xrightarrow{g} S$ soit quasi compact et quasi séparé et Y de présentation finie sur S. On considère le foncteur $F : (Sch_{/S})^\circ \longrightarrow Ens$ défini par :

$$F(T) = Hom_T(X \times_S T\ ,\ Y \times_S T)$$

=> F est localement de présentation finie.

Preuve : $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres de limite T. On doit montrer que :

$$Hom_T(X \times_S T, Y \times_S T) = \varinjlim_\alpha Hom_{T_\alpha}(X \times_S T_\alpha, Y \times_S T_\alpha)$$

Remarquons d'abord que l'on peut supposer S affine en faisant le changement de base $T_\alpha \to S$ pour un α quelconque. On aura alors X quasi compact et quasi séparé.

Démontrons le théorème dans le cas où $X = S$. On doit donc avoir :

$$Hom_T(T, Y \times_S T) = \varinjlim_\alpha Hom_{T_\alpha}(T_\alpha, Y \times_S T_\alpha)$$

donc on doit avoir :

$$Hom_S(T,Y) = \varinjlim Hom_S(T_\alpha, Y)$$

On doit donc démontrer que le foncteur $T \to Y(T)$ est lui même de présentation finie.

Supposons Y affine : Soient A = Spec S, B = Spec Y C_α = Spec T_α et C = Spec $T = \varinjlim C_\alpha$. Nous devons donc montrer que :

$$Hom_{A.alg}(B, \varinjlim C_\alpha) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_\alpha Hom_{A.alg}(B, C_\alpha)$$

Sachant que B est de présentation finie. Nous montrons que l'application est injective. Soient f_α et f'_α deux systèmes inductifs d'applications de même limite f. Soient x_i les générateurs de B (en nombre fini) ; il existe α tel que :

$f(x_i) = \varphi_\alpha(f_\alpha(x_i)) = \varphi_\alpha(f'_\alpha(x_i)$ pour tout i mais alors il existe $\mu \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_{\mu\alpha}(f_\alpha(x_i)) = \varphi_{\mu\alpha}(f'_\alpha(x_i))$ d'où $f_\mu(x_i) = f'_\mu(x_i)$ pour tout i et $f\mu = f'_\mu$

Montrons maintenant la surjectivité.

Nous avons $B = A[X_1,\dots,X_n]/_J$ avec J de type fini engendré par les P_j ; on pose toujours $x_i = \overline{X}_i$.

Soit f un homomorphisme de A-algèbre de B dans C et $y_i = f(x_i)$. Il existe alors α et des éléments $y_{i\alpha}$ de C_α tels que $y_i = \varphi_\alpha(y_{i\alpha})$; d'autre part nous avons $P_j((y_i)) = 0$ et par conséquent il existe $\mu > \alpha$ tel que $P_j(\varphi_{\mu\alpha}(y_{i\alpha})) = 0$

On définit f_μ par $f_\mu(x_i) = \varphi_{\mu\alpha}(y_{i\alpha})$; on obtient bien ainsi un morphisme de A-algèbres et l'on en déduit un système inductif en posant $f_\lambda = \varphi_{\lambda\mu} \circ f_\mu$ et f est bien la limite de ce système.

Dans le cas général remarquons d'abord que l'on peut supposer Y quasi compact ; en effet Y est réunion filtrante de ses sous schémas ouverts quasi compacts et si X est quasi-compact :

$$\mathrm{Hom}_S(X,Y) = \varinjlim \mathrm{Hom}_S(X,Y_i)$$

Y étant maintenant supposé quasi compact et $f : T \to Y$ étant donnée, il existe un recouvrement ouvert affine fini U_i de Y et un recouvrement ouvert affine fini V_{ij} de I tels que $V_{ij} = \varphi_\alpha^{-1}({}^iV_{ij\alpha})$. Il existe λ tel que sur chaque $V_{ij\lambda}$ on puisse trouver d'après les résultats précédents, un morphisme $f_\lambda : V_{ij\lambda} \to U_i$ donnant f sur V_{ij}, permettant de construire un morphisme $X_\alpha \to Y$ pour α assez grand. Il faut vérifier les conditions de recollement, c'est-à-dire la coïncidence sur les $U_{ij\alpha} \cap U_{i'j\alpha}$. Mais ces ouverts sont quasi compacts et recouverts par un nombre fini d'ouverts affines. L'existence d'un α assez grand provient alors de l'unicité du relèvement vérifié au début de la preuve.

Dans le cas où X est quasi compact et quasi séparé on se ramène au cas affine en prenant un recouvrement affine fini et en utilisant le fait que l'intersection de deux ouverts affines est quasi compacte.

<u>3.1.2.2 Corollaire</u> : Supposons X et Y de présentation finie. Pour que $X \times_S T$ et $Y \times_S T$ soient T isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que X_λ et Y_λ soient T_λ isomorphes.

<u>Preuve</u> : La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire : Soit $f : X \times_S T \xrightarrow{\sim} Y \times_S T$ un isomorphisme. On sait que f provient de $f_\mu : X \times_S T_\mu \to Y \times_S T_\mu$ pour un μ assez grand ; d'autre part f ayant un inverse g, g provient de $g_\beta : Y \times_S T_\beta \to X \times_S T_\beta$. Si $\alpha > \mu, \beta$ on peut considérer $g_\alpha o f_\alpha$ et $f_\alpha o g_\alpha$ qui donnent l'identité à la limite donc déjà l'identité pour un λ assez grand. Ce corollaire peut aussi s'enonçer

$$T \longrightarrow \mathrm{Isom}(X \times_S T, Y \times_S T) \text{ est de présentation fini}$$

<u>3.1.2.3 Théorème</u> : Soit $(T_\alpha \varphi_{\alpha\mu})$ un système projectif de spectres de limite T et X un schéma de présentation finie sur T. Alors il existe un schéma de présentation finie X_α sur T_α pour α assez grand tel que $X = X_\alpha \times_{T_\alpha} T$

<u>Preuve</u> : Dans le cas où X est affine on connait déjà le résultat. On se ramène au cas affine en recouvrant X par un nombre fini d'ouverts affines U_i i. pour chacun d'eux il existe β et un schéma de présentation finie $Z_{\beta i}$ sur T_β tels que $U_i = Z_{\beta i} \times_{T_\beta} T$ (on peut prendre un même β pour tous les i). Si β a été choisi assez grand pour chaque i il existe un ouvert $Z_{\beta ij}$ quasi-compact tel que $Z_{\beta ij} \times_{T_\beta} T = U_i \cap U_j$ et l'identité de $U_i \cap U_j$ induit un morphisme $Z_{\beta ij} \dashrightarrow Z_{\beta ji}$. Si on choisit β assez grand ce morphisme est un isomorphisme. [illegible] pouvoir recoller il faut vérifier les conditions de transivité ; elles se [illegible] en remarquant que les $Z_{\beta ij}$ sont quasi séparés et en utilisant le [illegible] (3.1.2.1).

<u>3.1.2.4 Théorème</u> : Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) f est localement de présentation finie.

(ii) le foncteur $T \to h_X(T) = \mathrm{Hom}_S(T,X)$ est de présentation finie.

(iii) le foncteur $T \to h_X(T)$ vérifie la condition précédente dans le cas où le système T_α est un système de U-schémas, avec U ouvert affine de S.

(i) $\Rightarrow$ (ii) démontré au cours de la preuve de (3.1.2.3)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) immédiat.

(iii) $\Rightarrow$ (i) la question étant locale on suppose S affine.

Supposons X affine d'anneau B, les T_α ayant pour anneaux les C_α et S ayant pour anneau A. On doit montrer que :

$$\varinjlim_\lambda \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,\varinjlim C_\lambda)$$

est une bijection, ce qui est équivalent à ce que B soit une A-algèbre de présentation finie.

Considérons le système (C_λ) des sous A-algèbres de type fini de B, $B = \varinjlim C_\lambda$, le morphisme identique de B se factorise donc à travers un C_λ et par conséquent $B = C_\lambda$ est une A-algèbre de type fini.

Posons $B = C/_J$ ou $C = A[T_1,\dots,T_n]$, J est alors limite inductive de ses sous idéaux de type fini J_λ et par conséquent $B = \varinjlim C_\lambda$.

Il existe donc un indice α tel que le composé

$$\begin{tikzcd} C/_J \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & C/_{J_\alpha} \arrow[r, "P_\alpha"] & C/_J \end{tikzcd}$$

soit le morphisme identique de $C/_J$. Si $q_\lambda : C \to C/_{J_\lambda}$ est la projection canonique et $q : C \to C/_J$ aussi, nous avons :

$$P_\alpha \circ (q_\alpha(T_i)) = P_\alpha(u(q(T_i))$$

il existe donc un indice β tel que J_{β/J_λ} contienne les $(q_\lambda(T_i) - u(q(T_i)))$;

on a donc un diagramme :

$$\begin{tikzcd} C/_J \arrow[r, "u"] & C/_{J_\beta} \arrow[r, "p_\beta"] & C/_J \\ & C \arrow[ul, "q"] \arrow[u, "q_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

où $u(q(T_i)) = q_\beta(T_i)$ pour tout i et donc $q_\beta = u \circ q$ ce qui implique $J_\beta = J$.

Si X est quelconque, il suffit de démontrer que tout ouvert affine U de X est de présentation finie sur S , c'est-à-dire que :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(T_\alpha, U) \to \mathrm{Hom}_S(T, U)$$

est une bijection pour tout système T_α .

L'injectivité se vérifie immédiatement en remarquant que l'on a un système inductif d'applications dans X .

Montrons la surjectivité : soit $f : T \to U$; il existe un indice λ et un morphisme $f_\lambda : T_\lambda \to X$ vérifiant $f = f_\lambda \times_{T_\alpha} \mathrm{id}T$. Il faut montrer que pour α assez grand f_α se factorise par U . Posons $U_\alpha = \varphi_{\alpha\lambda}^{-1}(f_\lambda^{-1}(U))$, alors le complémentaire de U_α est une partie fermée donc quasi compacte, vide à la limite ; elle est donc déjà vide pour α assez grand.

IV. MODULES DE PRESENTATION FINIE SUR UNE LIMITE PROJECTIVE

On se donne un schéma S. Soient $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres du dessus de S de limite T, X un S-schéma quasi compact et quasi séparé, $\mathcal{M}$ un O_X-module quasi cohérent de présentation finie, $\mathcal{N}$ un O_X-module quasi-cohérent

<u>4.1 Théorème</u> : Considérons le foncteur F de $(Sch/_S)^o$ dans Ens défini par :

$$F(T) = \mathrm{Hom}_{X \times_S T}(f^*(\mathcal{M}), f^*(\mathcal{N}))$$

où $f : X \times_S T \longrightarrow X$.

Alors F est un foncteur de présentation finie.

<u>Preuve</u> : Soit $(T_\alpha, f_{\alpha\lambda})$ notre système projectif ; on peut supposer que S est égal à un des T_λ T'_α sans rien changer à la généralité. On obtient alors :

$$F(T_\lambda) = \mathrm{Hom}_{X \times_{T_\alpha} T_\lambda}(f^*_\lambda(\mathcal{M}), f^*_\lambda(\mathcal{N}))$$

où $f_\lambda : X \times_{T_\alpha} T_\lambda \longrightarrow X$. On posera $X \times_{T_\alpha} T_\lambda = X_\lambda$. On doit montrer que :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{X_\lambda}(f^*_\lambda(\mathcal{M}), f^*_\lambda(\mathcal{N})) = \mathrm{Hom}_{X \times_S T}(f^*(\mathcal{M}), f^*(\mathcal{N}))$$

Nous allons donner une démonstration du théorème dans le cas affine ; il se généralise en utilisant le fait que X est quasi compact et quasi séparé.

Soit A l'anneau associé à X et B_λ celui associé à T_λ. M et N les X_α modules. On doit donc montrer que :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A \otimes_{B\alpha} B_\lambda}(M \otimes_{B_\alpha} B_\lambda, N \otimes_{B_\alpha} B_\lambda) = \mathrm{Hom}_{A \otimes_{B\alpha} B}(M \otimes_{B_\alpha} B, N \otimes_{B_\alpha} B)$$

[illegible] qui peut s'écrire :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_{B_\alpha} B_\lambda) = \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_{B_\alpha} B)$$

[illegible] clair que cette égalité est vérifiée si M est libre fini. Puisque M [illegible] présentation finie on a une suite exacte $A^p \to A^q \to M \to 0$ et puisque [illegible] foncteur exact à gauche en M l'égalité reste vraie.

<u>4.2 Théorème</u> : Si $\mathcal{M}$ est une $X \times_S T$-module de présentation finie, il existe un λ et $\mathcal{M}_\lambda$ de présentation finie sur $X \times_S T_\lambda$ tel que :

$$\mathcal{M} = (1 \times_S \varphi_\lambda)^* \mathcal{M}_\lambda$$

Avant de passer à la démonstration nous allons donner le corollaire suivant :

<u>4.3. Corollaire</u> : Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont tous les deux de présentation finie pour que $\mathcal{M} \times_S T$ et $\mathcal{N} \times_S T$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que $\mathcal{M} \times_S T_\lambda$ et $\mathcal{N} \times_S T_\lambda$ soient isomorphes.

<u>Preuve de (4.2)</u> : Supposons X affine et reprenons les mêmes notations que précedemment. On doit montrer qu'étant donné M de présentation finie sur $A \otimes_{B_\alpha} B$ il existe M_λ de présentation finie sur $A \otimes_{B_\alpha} B_\lambda$ tel que $M = M_\lambda \otimes_{B_\lambda} B$.

Cela se fait en considérant la suite exacte

$$(A \otimes_{B_\alpha} B)^p \xrightarrow{\alpha} (A \otimes_{B_\alpha} B)^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et en remarquant que les coefficients de la matrice α sont déjà dans $A \otimes_{B_\alpha} B_\lambda$ pour λ assez grand.

Pour le cas général on recolle en sachant que X est quasi compact et quasi séparé

<u>4.4 Proposition</u> : On garde les hypothèses des théorèmes (4.1) et (4.2). $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ sont des modules quasi cohérents de présentation finie sur X . Supposons que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ soient des quotients de $\mathcal{M}$ et que $f^*(\mathcal{N}')$ soit un quotient de $f^*(\mathcal{N})(f : X \times_S T \to X)$. Alors il existe λ tel que $f^*_\lambda(\mathcal{N}')$ soit un quotient de $f^*_\lambda(\mathcal{N})$

<u>Preuve</u> : On a la suite d'applications suivante :

$$f^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{u} f^*(\mathcal{N}) \xrightarrow{p} f^*(\mathcal{N}')$$

p étant surjective. Il existe $p_\lambda : f^*_\lambda(\mathcal{N}) \longrightarrow f^*_\lambda(\mathcal{N}')$ donnant p . Il faut démontrer que p_λ est surjective pour α assez grand. Si $Q_\lambda = \operatorname{Coker}(p_\lambda)$ $f^*_\lambda(Q_\lambda)$ et $f^*(0)$ donnent le même module et par conséquent $Q_\lambda \simeq 0$ pour α assez grand après le théorème (4.1)

V. CARACTERISATION DES PROPRIETES DE PERMANENCE PAR DES FONCTEURS DE PRESENTATION FINIE

5.1 Théorème : Soient S un schéma, $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ un système projectif de spectres au-dessus de S de limite T et X un S-schéma de présentation finie. Alors les foncteurs suivants sont de présentation finie.

(5.1.1) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des sous-schémas ouverts de présentation finie de $X \times_S T$.

(5.1.2) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des sous-schémas fermés de présentation finie de $X \times_S T$.

(5.1.3) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des sous-schémas de présentation finie de $X \times_S T$.

Par exemple nous allons prouver (5.1.2) :

Un sous-schéma Z de $X \times_S T$ de présentation finie est défini par un idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}$ de type fini. On doit donc montrer que $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ étant donné :

$$\varinjlim F(T_\alpha) = F(T)$$

Montrons l'injectivité : Soient $Z_{1\alpha}$ et $Z_{2\alpha}$ deux sous-schémas fermés de présensation finie donnant Z. On est dans les conditions de la proposition (4.4) avec

$$X = X \times_S T_\alpha,\ \mathcal{M} = \mathcal{O}_{X \times_S T_\alpha},\ \mathcal{N} = \mathcal{O}_{Z_{1,\alpha}},\ \mathcal{W}' = \mathcal{O}_{Z_{2,\alpha}}$$

Alors il existe λ tel que $Z_{1\alpha}$ majore $Z_{2\alpha}$ et réciproquement d'où l'égallité.

Montrons la surjectivité : Z étant donné sur $X \times_S T$, il est défini un O_Z où O_Z est un module quasi cohérent de présentation finie. On peut donc trouver λ et $\mathcal{M}_\lambda$ tel que O_Z provienne de $\mathcal{M}_\lambda$. De plus il existe $\beta > \lambda$ tel que $X \times_S T_\beta \to \mathcal{M}_\beta$ donne à la limite la projection canonique et si on choisit β assez grand l'application est surjective et il suffit de considérer le schéma fini associé à $\mathcal{M}_\beta$.

5.2. Quelques foncteurs de présentation finie

Supposons que X et Y soient deux schémas sur S de présentation finie. Alors les foncteurs suivants sont de présentation finie.

(5.2.1) $T \longmapsto F(T) = \mathrm{Hom}_T(X \times_S T, Y \times_S T)$.

(5.2.2) $T \longmapsto F(T) = \mathrm{Isom}_T(X \times_S T, Y \times_S T)$.

(5.2.3) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes séparés de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.4) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes surjectifs de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.5) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes radiciels de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.6) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes affines de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.7) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes finis de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$

(5.2.8) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes quasi finis de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.9) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes propres de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.10) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes projectifs de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.11) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-morphismes plats de $X \times_S T$ dans $Y \times_S T$.

(5.2.12) $T \longmapsto F(T)$ = ensemble des T-monomorphismes de $X \times_S T$ dans $T \times_S T$

Preuve de 5.2.12 : Considérons le système $(T_\alpha, \varphi_{\alpha\lambda})$ de limite T . On doit montrer que tout système de morphismes $f_\alpha : X \times_S T_\alpha \longrightarrow Y \times_S T_\alpha$ donnant à la limite un monomorphisme est déjà un système de monomorphismes à partir d'un certain rang. Ceci est équivalent à ce que $\Delta_f : X \times_S T \longrightarrow X \times_S T$ soit un isomorphisme. Sachant que le foncteur $T \to \mathrm{Isom}(X +_S T, X \times_Y X \times_S T)$ est un foncteur de présentation finie on peut conclure.

VI. APPLICATIONS

6.1 Elimination des hypothèses nœthériennes

Soit le théorème

6.1.1 Théorème : Soit Y un schéma localement noethérien ; soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et localement de type fini. Alors f est universellement ouvert.

Nous nous proposons d'éliminer l'hypothèse noethérienne qui n'est pas stable par changement de base et de prouver :

6.1.2 Théorème : Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie ; alors f est universellement ouvert.

Preuve : Les hypothèses et la conclusion étant locales, on se ramène à $X = \mathrm{Spec}\, B$ et $Y = \mathrm{Spec}\, A$, B étant une A-algèbre de présentation finie. Mais A est limite inductive filtrante de ses sous $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_λ qui sont des anneaux noethériens, et on sait que $B \simeq B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$ pour un λ assez grand, B_λ étant une A_λ-algèbre de type fini et plate. Le morphisme $X_\lambda = \mathrm{Spec}\, B_\lambda \longrightarrow Y_\lambda = \mathrm{Spec}\, A_\lambda$ satisfait aux conditions de (5.1.1) d'où le théorème.

6.2 Endomorphismes d'un S-schéma de présentation finie

On a le :

6.2.1 Théorème : Soit S un schéma ; X un S schéma de présentation finie. Tout S-endomorphisme de X qui est un monomorphisme est un automorphisme de X.

On va d'abord prouver la

6.2.2 Proposition : Soient S un schéma, X un S-schéma de type fini. Tout S endomorphisme de X qui est radiciel est surjectif (donc bijectif).

Preuve : Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est dit radiciel s'il est universellement injectif, ou, ce qui revient au même, s'il est injectif et si pour tout $x \in X$, $k(x)$ est une extension radicielle de $k(f(x))$

Rappelons qu'un schéma X est dit de Jacobson si toute partie fermée de X est l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés. Il revient au même de dire que toute partie localement fermée, ou constructible, non vide de X contient un point fermé.

Par exemple, Spec A où A est un corps, ou $\mathbb{Z}$, ou une algèbre de type fini sur un corps ou sur $\mathbb{Z}$.

Si Y est un schéma de Jacobson et $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini, alors X est un schéma de Jacobson et l'image par f de tout point fermé est un point fermé (EGA IV.10.4.7)

Noton enfin que tout monomorphisme $f : X \to Y$ est radiciel car on voit immédiatement que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est, soit vide, soit $k(y)$-isomorphe à Spec $k(y)$.

Ceci dit passons à la preuve de (6.2.2)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] & X_s \arrow[rr, "g_s"] \arrow[dr] & & X_s \arrow[dl] \\
& S & & & \mathrm{Spec}\, k(s) \arrow[lll] &
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que g est surjectif il suffit de montrer que g_s l'est pour tout $s \in S$. On se ramène donc au cas $S = \mathrm{Spec}\, k$, k étant un corps. Mais alors f est de présentation finie puis que k est noethérien.

D'après ce qui précède il suffit de considérer le cas où $S = \mathrm{Spec}\, A$, A étant une sous $\mathbb{Z}$ algèbre de type fini de k.

Mais X est alors un schéma de Jacobson et puisque $g(X)$ est constructible (théorème de Chevalley), il suffira de montrer que $g(X)$ contient tous les points fermés de X ; en effet si $g(X) \neq X$, $X - g(X)$ qui est constructible comme complémentaire d'une partie constructible devrait contenir un point fermé.

On est donc amené à étudier les points fermés de X.

<u>6.2.3 Lemme</u> : Soit Y un $\mathbb{Z}$-schéma de type fini.

(i) Pour un point $y \in Y$ soit fermé, il faut et il suffit que $k(y)$ soit un corps fini.

(ii) Pour tout nombre premier P et tout entier $d \geqslant 1$, l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $k(y)$ soit une extension de F_p de degré divisant d est fini.

<u>Preuve</u> : (i) D'après ce qui précède l'image d'un point fermé y de Y dans Spec Z est un point fermé, i.e un nombre premier P. L'assertion résulte alors de ce que, si $X \to \operatorname{Spec} k$ est un morphisme de type fini, pour qu'un point $x \in X$ soit fermé il faut et il suffit que $k(y)$ soit une extension finie de k.

(ii) Y étant réunion finie d'ouverts affines de type fini sur $\mathbb{Z}$, on se borne au cas $Y = \operatorname{Spec} C$, C étant une Z algèbre de type fini. Les points y considérés correspondent bijectivement aux homomorphismes $C \to F_p d$. Mais C étant detype fini et $F_p d$ fini, il n'y a qu'un nombre fini de tels homomorphismes.

<u>Preuve de (6.2.2)</u> : X est un $\mathbb{Z}$-schéma de type fini.

Soit $T_{p,d}$ l'ensemble-fini d'après ce qui précède - des points fermés z de X tels que $k(z)$ soit une extension de F_p de degré divisant d. D'après (6.2.5) l'ensemble des points fermés de X est réunion des $T_{p,d}$. Or $T_{p,d}$ est stable par g car si $x \in T_{p,d}$, $k(g(x))$ est un sous-corps de $k(x)$; g étant injectif par hypothèse sa restriction à $T_{p,d}$ est bijective puisque $T_{p,d}$ est fini.

Ce qui prouve la proposition (6.2.2).

<u>Preuve de 6.2.1)</u> :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

La question étant locale sur S, on se ramène à S affine d'anneau A. On se ramène par un raisonnement standard au cas où A est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, les monomorphismes "se comportant bien !" par passage à la limite projective. X est donc un $\mathbb{Z}$-schéma de type fini. De plus g est bijectif.

Il suffit donc de montrer que g est une immersion ouverte, et même que g est

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

plat d'après le lemme suivant.

<u>6.2.4 : Lemme</u> : Tout monomorphisme plat de présentation finie est une immersion ouverte.

<u>Preuve</u> : Soit f un tel monomorphisme.

Le morphisme diagonal $\Delta : X \hookrightarrow X \times_S X$ est alors un isomorphisme, ainsi que les projections $X \times_S X \overset{p^1}{\underset{p^2}{\rightrightarrows}} X$.

f étant de présentation finie et plat, $f(X)$ est ouvert dans S (6.1.1). On est donc amené à prouver que $\bar{f}$ est un isomorphisme sur son image.

$$\begin{tikzcd} X & X \times_S X \arrow[l] \arrow[d, "p^2"', "\wr"] \\ S \arrow[u, leftarrow, "f"'] & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Cela se voit par descente fidèlement plate, puisque $X \longrightarrow f(X)$ est plat et surjectif.

Mais, l'ensemble des points où g est plat étant ouvert et X étant un schéma de Jacobson, il suffit de montrer que g est plat en tout point fermé de X.

Maintenant, en reprenant les notations introduites plus haut, soit $x \in T_{p,d}$.

On a déjà vu que $T_{p,d}$ est un ensemble fini, stable sous g.

Posant $x_1 = g(x)$, ... on a une suite finie de morphismes locaux.

$$O_x \xrightarrow{f_1} O_{x_1} \xrightarrow{f_2} \cdots \to O_x . \qquad (*)$$

D'où, en passant aux corps résiduels une suite d'isomorphismes

$$k(x) \xrightarrow{\overline{f_1}} k(x_1) \xrightarrow{\overline{f_2}} \cdots \to k(x) \;, \quad k(x) \text{ étant un corps fini.}$$

D'ou une suite d'homomorphismes surjectifs d'anneaux noethériens :

$$\begin{tikzcd} O_x/m_x^2 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & O_{x_1}/m_{x_1}^2 \arrow[r, "f_2'"] & \cdots \arrow[r] & O_x/m_x^2 \end{tikzcd}$$

et φ est bijectif comme endomorphisme surjectif d'anneaux noethériens.

Tous les f_i' sont donc des isomorphismes ; en réitérant le procédé pour tous les $O_{x_i}/m_{x_i}^n$, on voit finalement que la suite déduite de (*) sur les complétés est une suite d'isomorphismes $\hat{O}_x \xrightarrow[\simeq]{\hat{f}_1} \hat{O}_{x_1} \xrightarrow[\simeq]{\hat{f}_2} \cdots \xrightarrow[\simeq]{} \hat{O}_x$,

et par descente fidèlement plate, tous les f_i sont des isomorphismes.

On a donc prouvé que pour tout point fermé x de X , le morphisme $O_{X,f(x)} \longrightarrow O_x$ est un isomorphisme - donc est plat. C.Q.F.D.

EMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE d'ORSAY

nnée 1969/70

Exposé n° 4 : Topologie, faisceaux, descente

par M. P.GALLOU

TOPOLOGIE ET FAISCEAUX

BIBLIOGRAPHIE

ARTIN - Grothendieck topologies - Harvard.

GIRAUD - Analysis situs. Séminaire Bourbaki - 1963

GODEMENT - Topologie algébrique et théorie des faisceaux.

J.L. VERDIER - S.G.A.IV. exposés I à IV.

<u>TOPOLOGIES ET FAISCEAUX</u>

I. GENERALITES

I.1. Préfaisceaux

Définition I.1.1. : Soient C et E deux catégories ; un préfaisceau sur C à valeurs dans E est un foncteur covariant de C^o dans E .

I.2. Topologies

I.2.1. Cribles

Définition I.2.1.1. On appelle crible d'une catégorie $\underline{C}$, toute sous-catégorie (pleine) R de C , telle que toute flèche de C ayant son but dans R , a sa source dans R .

On appelle cribles de $X \in Ob(C)$, les cribles de C/X , c'est-à-dire les sous-foncteurs du foncteur représenté par X .

Si $f : Y \to X$ est une flèche de C et R un crible de X , alors $R \times_{\underline{X}} Y$ est un crible de Y ; c'est l'ensemble des (Z,z) tels que fz soit dans $R(Z)$

I.2.2. Topologies et prétopologies

Définition I.2.2.1. Une topologie sur une catégorie $\underline{C}$, est la donnée pour tout [illegible] de $Ob(C)$ d'un ensemble $J(X)$ de cribles de X , tel que :

[illegible] Pour tout R dans $J(X)$ et tout $f : Y \to X$, le crible de $\underline{Y}$, $R \times_X Y$ est dans $J(Y)$.

[illegible] Si R et R' sont deux cribles de X tels que R soit dans $J(X)$ et que [illegible]tout $Y \to R$ on ait $R' \times_X Y$ dans $J(Y)$, alors R' est dans $J(X)$.

[illegible] X est dans $J(X)$.

[illegible] $J(X)$ sont dits couvrants X

[illegible] est stable par intersection finie. Tout crible contenant un crible de $J(X)$

[illegible] $J(X)$; un crible d'un objet X de C , est dit couvrant s'il appartient à $J(X)$

Définition I.2.2.2. Une famille $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ est dite couvrante pour une topologie si le crible de X qu'elle engendre est couvrant.

La donnée pour tout $X \in Ob(C)$ de familles de morphismes de but X permet de définir une topologie sur C, la moins fine pour laquelle ces familles soient couvrantes ; les cribles couvrants pour cette topologie sont malaisés à déterminer, toutefois :

Définition I.2.2.3. Une prétopologie sur une catégorie C est la donnée pour tout $X \in Ob(C)$ d'un ensemble $Cov(X)$ de familles de morphismes de but X, tel que :

P T 0 . Les morphismes de $CoV(X)$ sont quarrables

P T 1 . Si $(X_\alpha \to X)$ est dans $CoV(X)$, alors pour tout $Y \to X$, $(X_\alpha \times_X Y \to Y)$ est dans $CoV(Y)$.

P T 2 . Si $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ est dans $CoV(X)$ et si pour chaque $\alpha \in A$, $(X_{\beta\alpha} \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} X_\alpha)_{\beta \in B_\alpha}$ est dans $CoV(X_\alpha)$, alors $(X_{\beta\alpha} \xrightarrow{f_\alpha g_{\beta\alpha}} X)_{\alpha \in A, \beta \in B_\alpha}$ est dans $Cov(X)$.

Les cribles couvrants pour la topologie engendrée par une prétopologie sont ceux qui contiennent un crible associé à un élément de $Cov(X)$.

I.3. Faisceaux

I.3.1. Généralités

Définition I.3.1.1. On appelle site une catégorie munie d'une topologie.

Définition I.3.1.2. Soit C un site. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ de $\hat{C}$ est dit séparé (resp. un faisceau) si pour tout X de $Ob(C)$ et tout R de $J(X)$, l'application :

$$Hom(X, \mathcal{F}') \longrightarrow Hom(R, \mathcal{F}')$$

est injective, (resp. bijective)

Les faisceaux sur C forment une sous-catégorie pleine $\tilde{C}$ de $\hat{C}$.

Proposition 1.3.1.3. Si la topologie est définie par une prétopologie, $\mathcal{F}$ est séparé si et seulement si pour tout X de $Ob(C)$ et tout $(X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ de $Cov(X)$, l'application :

$$\mathcal{F}(X) \to \prod_{\alpha \in A} \mathcal{F}(X_\alpha) \quad \text{est injective.}$$

$\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si les diagrammes :

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(X_\alpha \times_X Y_\beta)$$

sont exacts.

I.3.2. Quelques topologies.

.3.2.1. Si X est un espace topologique, la catégorie est celle des ouverts de avec pour morphismes les inclusions, et on prend pour familles courantes, les recouvrements ouverts des ouverts de X .

$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement d'un ouvert U de X , le crible associé à

$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est l'ensemble des ouverts de X qui sont contenus dans l'un des U_α

re que deux recouvrements de U , $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ et $(V_\beta)_{\beta\in J}$ définissent le même ible de U signifie que (U_α) et (V_β) sont deux recouvrements équivalents U (i.e. chacun est plus fin que l'autre).

cribles de U s'interprètent donc naturellement comme classes de recouvrements ivalents.

.2.2. La topologie f.p.q.c. La catégorie est celle des schémas ; une famille $\xrightarrow{f_\alpha}$ X) est courrante si $X = \bigcup_\alpha f_\alpha(X_\alpha)$ et si chaque f_α est plat et quasi compact.

verra plus tard que tout préfaisceau représentable est un faisceau f.p.q.c.

.2.3. La topologie étale. La catégorie est celle des schémas ; une famille $\xrightarrow{f_\alpha}$ X) est couvrante si $X = \bigcup_\alpha f_\alpha(X_\alpha)$ et les f_α étales.

.2.4. - Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur C et pour chaque X de Ob(C) soit J(X) semble des cribles de X tels que pour tout $Y \to X$ on ait une bijection :

$$\mathrm{Hom}\ (Y,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (R \times_X Y, \mathcal{F})$$

les J(X) forment une topologie sur C, la plus fine pour laquelle $\mathcal{F}$ est sceau.

il est clair que si on a une topologie c'est bien la plus fine pour $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Les axiomes T 1 et T 3 sont évidemment vérifiés ; vérifions T 2 ; montrons d'abord que $J(X)$ est stable par intersection : soient R et S dans $J(X)$; pour tout $Z \to X$, il faut qu'on ait une bijection :

$$\mathrm{Hom}(Z,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R \times_X S \times_X Z,\mathcal{F})$$

mais on a : $S = \varinjlim_{(Y,f)\in C/S} Y$, d'où

$$R \times_X S \times_X Z = \varinjlim_{(Y,f)\in C/S} (R \times_X Y) \times_Y (Y \times_X Z)$$

d'où : $\varprojlim_{(Y,f)\in C/S} \mathrm{Hom}(R \times_X Y \times_X Z,\mathcal{F}) \simeq \varprojlim_{(Y,f)\in C/S} \mathrm{Hom}(Y \times_X Z,\mathcal{F})$

$$\simeq \mathrm{Hom}(S \times_X Z,\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}(Z,\mathcal{F}).$$

Maintenant remarquons que si R est dans $J(X)$ et si R' est un crible de X tel que pour tout $Y \to R$, $R' \times_X Y$ est dans $J(Y)$ il en est de même de $R' \times_X R$. On est ramené à vérifier T 2 dans les cas $R' \subset R$ et $R \subset R'$; la vérification est identique à celle de $R \times_X S \in J(X)$.

Définition I.3.2.5. - <u>On appelle topologie canonique sur une catégorie C , la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux représentables sur C, sont les faisceaux.</u>

I.4. Calculs sur les préfaisceaux

I.4.1. Limite de préfaisceaux.

Les limites inductives et projectives sont représentables dans $\hat{C}$; les foncteurs $X \mapsto \mathcal{F}(X)$ commutent aux limites. Autrement dit les limites se calculent en chaque X.

I.4.2. Préfaisceaux abéliens.

La catégorie des préfaisceaux sur C à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens est une catégorie abélienne.

II. FAISCEAU ASSOCIE.

Soit C un site, $\hat{C}$ et $\tilde{C}$, les catégories des préfaisceaux et des faisceaux sur C et $i : \tilde{C} \to \hat{C}$, le foncteur canonique.

II.1 - Le foncteur L .

On va définir un foncteur $L : \hat{C} \to \hat{C}$ et un morphisme $l : id_{\hat{C}} \to L$.

.1.1. Le préfaisceau $L(\mathcal{F})$.

finition II.1.1.1. Pour X dans $Ob(C)$, on pose :

$$\underline{L(\mathcal{F})(X)} = \varinjlim_{R \in J(X)} \underline{Hom(R,\mathcal{F})}$$

notera $\underline{i^{\mathcal{F}}_X(R)}$ le morphisme canonique de $Hom(R,\mathcal{F})$ dans $L(\mathcal{F})(X)$; ns $L(\mathcal{F})(X)$; si $r : R \hookrightarrow R'$, on a donc :

$$i^{\mathcal{F}}_X(R') = i^{\mathcal{F}}_X(R) \circ Hom(r,\mathcal{F})$$

it $\lambda : X \to X'$ un morphisme. Il existe un morphisme unique $\underline{L(\mathcal{F})(\lambda)}$ de $\mathcal{F})(X')$ dans $L(\mathcal{F})(X)$, tel que pour tout R' dans $J(X')$, on ait un diagramme mmutatif :

$$\begin{tikzcd}
L(\mathcal{F})(X') \arrow[r, "L(\mathcal{F})(\lambda)"] & L(\mathcal{F})(X) \\
Hom(R',\mathcal{F}) \arrow[u, "i^{\mathcal{F}}_{X'}(R')"] \arrow[r] & Hom(R' \times_{X'} X,\mathcal{F}) \arrow[u, "i^{\mathcal{F}}_X(R' \times_{X'} X)"']
\end{tikzcd}$$

$L(\mathcal{F})(1_X) = 1_{L(\mathcal{F})(X)}$ et si $\lambda' : X' \to X''$ est un morphisme,

$(\lambda'\lambda) = L(\mathcal{F})(\lambda)\, L(\mathcal{F})(\lambda')$.

donc construit un préfaisceau $L(\mathcal{F})$.

2. Le foncteur L.

ition II.1.2.1. Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morphisme de préfaisceaux.

tout X dans $Ob(C)$, il existe un morphisme unique $L(f)(X)$ de $L(\mathcal{F})(X)$ $\mathcal{F}')(X)$, tel que pour tout R dans $J(X)$ on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L(\mathcal{F})(X) \arrow[r, "L(f)(X)"] & L(\mathcal{F}')(X) \\
Hom(R,\mathcal{F}) \arrow[u, "i^{\mathcal{F}}_X(R)"] \arrow[r] & Hom(R,\mathcal{F}') \arrow[u, "i^{\mathcal{F}'}_X(R)"']
\end{tikzcd}$$

II.2.1.1

$x \to y$

$\mathcal{F}$, $L(f)(X) = 1_{L(\mathcal{F})(X)}$.

II.1.3. Le morphisme $l(\mathcal{F})$.

Comme X est dans $J(X)$, on a un morphisme :

$$l(\mathcal{F})(X) : \quad (X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_X^{\mathcal{F}}(X)} L(\mathcal{F})(X)$$

Proposition II.1.3.1. $l(\mathcal{F})$ est un morphisme fonctoriel de $\mathcal{F}$ dans $L(\mathcal{F})$.

Preuve : il faut vérifier que pour tout $\lambda : X \to X'$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "i_X^{\mathcal{F}}(X)"] & L(\mathcal{F})(X) \\
\mathcal{F}(X') \arrow[u, "\mathcal{F}(\lambda)"] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X',\mathcal{F}) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "i_{X'}^{\mathcal{F}}(X')"] & L(\mathcal{F})(X') \arrow[u, "L(\mathcal{F})(\lambda)"']
\end{tikzcd}$$

est évident avec $- - - \to$

II.1.4. Le morphisme l .

Proposition II.1.4.1. l est un morphisme fonctoriel de $id_{\hat{C}}$ dans L

Preuve . Il faut vérifier que pour tout morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ dans $\hat{C}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "l(\mathcal{F})"] \arrow[d, "f"'] & L(\mathcal{F}) \arrow[d, "L(f)"] \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "l(\mathcal{F}')"] & L(\mathcal{F}')
\end{tikzcd}$$

Formule se vérifie en tout X et c'est alors évident par définition de $L(f)(X)$

II.2.- Propriétés du couple (L,l)

Morphisme couvrants

Définition II.2.1.1. Un morphisme de préfaisceaux $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est couvrant, si le ... $Im(u) = I \to \mathcal{G}$, a la propriété suivante :

... tout objet X de C et toute flèche $X \to \mathcal{G}$ le sous-objet de X ,

... est dans $J(X)$.

Le morphisme u est bicouvrant s'il est couvrant et si le morphisme diagonal

$\mathcal{F} \to \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ est couvrant.

Les morphismes couvrants (resp. bicouvrants) sont ceux qui par passage au faisceau associé donnent un épimorphisme, (resp. un isomorphisme) (exercice)

Proposition II.2.1.2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) u est couvrant.

ii) pour tout X dans $Ob(C)$ et tout morphisme $X \to \mathcal{G}$, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[r, "u"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{H} \arrow[ur] \arrow[r] & R \arrow[r] & X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où R est dans $J(X)$ et $\mathcal{H} \to R$ un épimorphisme.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) u est bicouvrant.

ii) u est couvrant et pour tout diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[r, shift right, "w"'] & \mathcal{F} \arrow[r, "u"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

tel que $uv = uw$, le noyau de (v,w) est dans $J(X)$

L'ensemble des morphismes couvrants est stable par changement de base et composition ; les isomorphismes sont couvrants.

Soit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "w"] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[d, "v"] \\
 & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

[illegible] bicouvrants, w est bicouvrant.

Proposition II.2.1.3. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau ; les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{F}$ est un préfaisceau séparé, (resp. un faisceau).

ii) pour tout morphisme couvrant, (resp. bicouvrant), u : $\quad \to \quad$, l'application

$$\mathrm{Hom}(u, \mathcal{F}) \;:\; \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

est injective, (rep. bijective)

II.2.2. Les morphisme Z_R .

Définition II.2.2.1. Pour X dans Ob(C) et R ~~dans~~ J(X) , on ~~défini~~t :

$$Z_R : \mathrm{Hom}(R,\mathcal{F}) \xrightarrow{\;i_X^{\mathcal{F}}(R)\;} L(\mathcal{F})(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,L(\mathcal{F}))$$

Proposition II.2.2.2. i) pour tout u : $R \to \mathcal{F}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "l(\mathcal{F})"] & L(\mathcal{F}) \\ R \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \end{tikzcd}$$

ii) pour tout $v : X \to L(\mathcal{F})$, il existe R dans J(X) et $u : R \to \mathcal{F}$ tel que $v = Z_R(u)$.

iii) pour tout Y dans Ob(C) et tout couple de flèches $(u,v) : Y \to \mathcal{F}$ tel que $l(\mathcal{F})\, u = l(\mathcal{F})\, v$, le noyau de (u,v) est dans J(Y).

iv) Si R et R' dans J(X) et $u : R \to \mathcal{F}$, $u' : R' \to \mathcal{F}$, $Z_R(u)$ et $Z_{R'}(u')$ sont égaux si et seulement si, il existe R" dans J(X) contenu dans $R' \cap R$, tel que $u|R" = u'|R"$.

Preuve. i) Il faut montrer que pour tout morphisme $g : Y \to R$,

$l(\mathcal{F})\, u g = Z_R(u)\, i_R\, g$.

Soit $i_R\, g : Y \to X$; on a un carré fibré :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "i_R"] & & X \\
R \times_X Y \arrow[u, "g'"] \arrow[rr, "i'"] & & Y \arrow[u, "f"'] \arrow[ull, "g"']
\end{tikzcd}$$

a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(R,\mathcal{F}) \arrow[r, "Z_R"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g'\mathcal{F})"'] & \mathrm{Hom}(X,L(\mathcal{F})) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f,L(\mathcal{F}))"] \\
\mathrm{Hom}(R \times_X Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "Z_{R \times_X Y}"] & \mathrm{Hom}(Y,L(\mathcal{F}))
\end{tikzcd}$$

où : $Z_R(u)\, f = Z_{R \times_X Y}(ug')$.

aussi un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(R \times_X Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "i_Y^{\mathcal{F}}(R \times_X Y)"] & L(\mathcal{F})(Y) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}(Y,\mathcal{F}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(i',\mathcal{F})"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}(Y,l(\mathcal{F}))"] & \mathrm{Hom}(Y.L(\mathcal{F}))
\end{tikzcd}$$

[redacted] $Z_{R \times_X Y}(ug') = l(\mathcal{F})ug$. cqfd.

[redacted] évident.

[redacted] i) u et v ont même image dans $L(\mathcal{F})(Y)$, donc il existe R dans

[redacted] u et v coïncident sur R ; le noyau de (u, v) qui contient R

[redacted]

[redacted] iii).

II.2.3. Propriétés de (L,l)

Proposition II.2.3.1. - i) le morphisme $l(\mathcal{F})$ est bicouvrant

ii) le foncteur L est exact à gauche

iii) le préfaisceau $L(\mathcal{F})$ est séparé.

iv) le préfaisceau $\mathcal{F}$ est séparé si et seulement si $l(\mathcal{F})$ est un monomorphisme $L(\mathcal{F})$ est alors un faisceau.

v) les propriétés suivantes sont équivalentes :

α) $l(\mathcal{F})$ est isomorphisme.

β) $\mathcal{F}$ est un faisceau.

preuve : i) il est clair que $l(\mathcal{F})$ est couvrant (II.2.1.2. ii) et (II.2.22. i) soit Y dans $Ob(C)$ et $(u,v) : Y \to \mathcal{F}$, tel que $l(\mathcal{F})\,u = l(\mathcal{F})\,v$; d'après le iii) proposition II.2.2.2., le noyau de (u,v) est dans $J(Y)$.

ii) Il suffit de vérifier que les applications canoniques :

$$L(\varprojlim \mathcal{F}_i)(X) \longrightarrow \varprojlim L(\mathcal{F}_i)(X)$$

sont bijectives ; cela vient du fait que le foncteur $\mathcal{F} \mapsto Hom(R, \mathcal{F})$ commute aux limites projectives et que le foncteur $\varinjlim_{J(X)}$ commute aux limites projectives finies.

iii) soient f et g deux morphismes de X dans $L(\mathcal{F})$ tels que $f\, i_R = g\, i_R$, montrons que $f = g$; il existe R' dans $J(X)$ contenu dans R, tel que $Z_{R'}(u)$, $g = Z_{R'}(v)$ où u et v sont des morphismes de R' dans ; on a donc $l(\mathcal{F})\,u = l(\mathcal{F})\,v$; le lecteur achèvera la démonstration.

iv) pour montrer que $l(\mathcal{F})$ est un monomorphisme, il suffit de voir que pour X dans $Ob(C)$, $l(\mathcal{F})(X)$, donc $Hom(X,l(\mathcal{F}))$ est injective, ce qui est évident quand séparé.

v) [illegible] est un faisceau, i.e. pour tout R dans $J(X)$ et tout u de R dans [illegible] se factorise par X ; posons $R' = \mathcal{F} \times_{L(\mathcal{F})} R$ et soient $p_1 : R' \to \mathcal{F}$, [illegible] $v = Z_{R'}(p_1)$; R' est dans $J(X)$ et on a $u\, p_2 = v\, i_R\, p_2$, mais [illegible] couvrant, cela entraîne $u = v\, i_R$ [illegible]

Si $l(\mathcal{F})$ est un monomorphisme, $\mathcal{F}$ est séparé comme sous-objet d'un objet séparé

v) $\alpha) \Rightarrow \beta)$ est évident

$\beta) \Rightarrow \alpha)$ il faut voir que pour tout X de $Ob(C)$, $l(\mathcal{F})(X)$ donc $i^{\mathcal{F}}_{X}(X)$ est surjectif, ce qui est évident $\mathcal{F}$ étant un faisceau.

II.3. - Le faisceau associé

Proposition II.3.1. - Le foncteur $i : \tilde{C} \to \hat{C}$ admet un adjoint à gauche a, qui est exact à gauche.

preuve. On peut prendre $a = L \circ L$, avec pour morphisme d'ajonction

$(L(\mathcal{F}))\, l(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \to a(\mathcal{F})$.

est exact à gauche, donc a aussi.

Définition II.3.2. - Le faisceau $a(\mathcal{F})$ est appelé faisceau associé à $\mathcal{F}$.

On a donc des bijections fonctionnelle en $\mathcal{F} \in \hat{C}$ et $\mathcal{F}' \in \tilde{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(a(\mathcal{F}),\mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathcal{F},\mathcal{F}').$$

II.4. - Limites de faisceaux ; faisceaux abéliens.

[illegible]4.1. Limites dans $\tilde{C}$.

[illegible]oposition II.4.1.1. - Une limite projective dans $\hat{C}$ de faisceaux est un faisceau [illegible] une limite dans $\tilde{C}$.

[illegible]limites inductives existent dans $\tilde{C}$; si $G : I \to \tilde{C}$ est un foncteur on a :

[illegible] $G = a(\varinjlim_{I} {}_{\hat{C}}\, G)$.

[illegible]

[illegible]2. - Faisceaux abéliens

[illegible] II.4.2.1. - les faisceaux abéliens sur C forment un catégorie abélienne.

[illegible] $\to \mathcal{F}$ un morphisme ; le noyau de u est le faisceau $X \mapsto \mathrm{Ker}\, u(X)$.

[illegible] est le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Im}\, u(X)$.

[illegible] II.4.2.2. - La suite $\mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ dans $\tilde{C}$ est exacte

[illegible] si pour $X \in Ob(C)$ et tout [illegible], il existe $R \in J(X)$ et

$\eta : R \to I$ tel que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta(\xi)"] & N \\ R \arrow[u, "i_R"] \arrow[r, "\eta"] & I \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

où I est l'image de u et N le noyau de v dans $\hat{C}$

Preuve : en effet, on a des bijections :

$$\varinjlim_{R\in J(X)} \mathrm{Hom}(R,I) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{R\in J(X)} \mathrm{Hom}(R,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,N) \xrightarrow{\sim} N(X)$$

La suite est triviale.

Supposons la topologie définie par une prétopologie, alors :

Proposition II.4.2.3. La suite $\mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$ exacte, si pour tout X de $Ob(C)$ et tout ξ de $N(X)$, il existe une famille couvrante $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)$, des sections $\xi'_\alpha \in \Gamma(X_\alpha, \mathcal{F}')$, tel que $u(\xi'_\alpha) = \mathcal{F}(f_\alpha)(\xi)$.

Preuve : d'après la proposition précédente, il existe R dans $J(X)$ qu'on peut supposer associé à une famille couvrante $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)$, et $\eta = R \to I$, tel que $\beta(\xi)\, i_R = j\,\eta$; il suffit de choisir ξ'_α tel que $u(\xi'_\alpha) = \eta(X_\alpha)(f_\alpha)$.

Réciproquement à partir de la famille $(u(\xi'_\alpha))$ on retrouve un morphisme $\eta : R \to I$, tel que $\beta(\xi)\, i_R = j\,\eta$, R étant le crible associé à $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)$; pour $y : Y \to X$ dans R, il suffit de poser $\eta(Y)(y) = \mathcal{F}(y)(\xi)$ qui est dans $I(Y)$.

En particulier v est un épimorphisme si pour tout X de $Ob(C)$ et tout ξ'' de $\mathcal{F}''(X)$, il existe une famille couvrante $(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha})$ et des ξ_α dans $\mathcal{F}(X_\alpha)$, tels que $v(\xi_\alpha) = \xi''|(X_\alpha, f_\alpha)$.

II.4.3. Exemples de faisceaux abéliens.

Le faisceau des fonctions morphiques sur une variété.

Le faisceau des sections d'un fibré vectoriel.

Le faisceau structural sur Spec(A).

II.4.4. Exemples de suites exactes.

II.4.4.1. Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions morphiques sur X et $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau des unités de $\mathcal{O}_X$.

alors :

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$$

est un épimorphisme de faisceaux tel que pour U ouvert de X les fonctions $\exp(U)$ ne soient pas toutes surjectives. (i.e. exp n'est pas un épimorphisme de préfaisceaux

Par exemple si $X = \mathbf{C}$ et $z \in \Gamma(X-\{o\}, \mathcal{O}_X^*)$ on sait que z ne se relève pas ;

toutefois toute fonction $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$ se relève localement, i.e. on peut définir $\log(g)$ au voisinnage de chaque point.

a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

$\mathcal{N}$ est le faisceau qui au-dessus de chaque composante connexe U_α d'un ouvert de X est égale à $2 i \Pi \mathbf{Z}$; c'est aussi le faisceau associé au préfaisceau stant $\mathbf{Z}$.

4.4.2. Dans la catégorie des schémas, le préfaisceau :

$$\mu \ : \ S \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_S^*)$$

représentable pas $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T,T^{-1}])$. En effet, on a des bijections fonctorielles

S :

$$(S, \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T,T^{-1}])) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Ann}(\mathbf{Z}[T,T^{-1}], \Gamma(\mathcal{O}_S))$$

dernier ensemble s'identifie à $\Gamma(\mathcal{O}_S^*)$ par $u \longmapsto u(T)$.

un faisceau pour les topologies étale, et f.p.q.c.

out entier $n \geqslant 1$, on définit un morphisme :

$$\longrightarrow \mu \ ; \ \xi \longmapsto \xi^n$$

n est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie f.p.q.c.

Soit S un schéma et soit $n_S : \mu_S \to \mu_S$ la"restriction"de $n : \mu \to \mu$ à la catégorie des schémas au-dessus de S. Pour que n_S soit un épimorphisme pour la topologie étale, il faut et il suffit que n soit premier aux caractéristiques résiduelles de S.

On va fabrique une famille couvrante $(S'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} S)_{\alpha\in I}$ telle que pour $\xi\in\Gamma(\mathcal{O}_S^*)$, il existe $\xi'_\alpha\in\Gamma(\mathcal{O}_{S'_\alpha}^*)$ tels que $\xi \mid S_\alpha = f'_\alpha(\xi'_\alpha)^n$.

Pour cela soit d'abord $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement de S par des ouverts affines et soit $i_\alpha : S_\alpha \to S$ le morphisme canonique ; i_α est un morphisme plat, étale, quasi-compact ;

posons $S'_\alpha = \mathrm{Spec}(\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi|S_\alpha))$

soit $f_\alpha : S'_\alpha \to S_\alpha$ le morphisme associé au morphisme d'anneaux :

$\varphi_\alpha : \Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S) \to \Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi|U_\alpha)$

soit $f'_\alpha = i_\alpha f_\alpha$; si ξ'_α est l'élement de $\Gamma(\mathcal{O}_{S'_\alpha}^*)$ correspondant à $\varphi_\alpha(\xi|S_\alpha)$, on a bien $\xi|S_\alpha = f'_\alpha(\xi'_\alpha)^n$; d'autre part φ_α est fidèlement plat donc f_α est fidèlement plat donc f_α est plat et surjectif, donc (f'_α) est plate surjective et aussi quasi-compacte.

D'autre part si n est premier aux caractéristiques résiduelles de S, φ_α fait de $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)[T]/(T^n - \xi|U_\alpha)$ une $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)$-algèbre formellement étale. c.q.f.d.

On a suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mu_n \to \mu \xrightarrow{n} \mu \to 0$$

où μ_n est le faisceau qui à tout schéma S associe le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

4.5. Cas des espaces topologiques

4.5.1. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X ; on construit $a(\mathcal{F})$ de la façon suivante : pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U,a(\mathcal{F}))$ est l'ensemble des familles $(s_x)_{x\in U}$ où $s_x\in\mathcal{F}_x$ telles que pour tout $x \in U$, il existe un voisinnage ouvert $V \subset U$ de x et $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ tels que pour tout $z \in V$, on ait $s_z = t_z$.

Pour qu'une suite de faisceaux abéliens :

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$$

soit exacte il faute et il suffit que pour tout $x \in X$, la suite :

$$\text{(ii)} \quad \mathcal{F}'_x \xrightarrow{u_x} \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}''_x$$

soit exacte.

On sait que si la suite (i) est exacte les suites (ii) le sont.

Inversement il faut montrer que pour tout ouvert U de X et tout $\xi \in \mathcal{F}(U)$ tel que $v(\xi) = 0$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de U et des sections $\xi'_\alpha \in \mathcal{F}'(U_\alpha)$ telles que

$$\xi | U_\alpha = u(\xi'_\alpha)$$

en effet pour tout $x \in U$ on a $v(\xi)_x = v_x(\xi_x) = 0$, donc il existe un voisinage ouvert V_x de x et une section $\xi' \in \mathcal{F}'(V_x)$ tel que :

$$\xi_x = u_x\ (\xi'_x) = u(\xi')_x$$

on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert U_x de x contenu dans V_x tel que

$$\xi | U_x = u(\xi' | U_x)$$

La famille $(U_x, \xi' | U_x)_{x \in U}$ répond à la question.

I.4.5.2. Exemple de préfaisceau séparé qui n'est pas un faisceau :

Soit, $\mathcal{C}^b$ le pr"faisceau des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^b$ n'est pas un faisceau car les injections canoniques $j_n : [-n,n] \to \mathbb{R}$ ne relèvent pas en une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; le faisceau associé $a\mathcal{C}^b$ s'identifie au faisceau des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En effet, soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; un élément de $\Gamma(U, a(\mathcal{F}))$ est une famille de germes $(f^x)_{x \in U}$ qui se "recollent" ; mais f^x provient d'une fonction g^x définie continue bornée sur un voisinage de x contenu dans U. La condition de recollement des germes signifie que deux fonctions g^x , g^y coïncident où elles sont toutes deux définies ; donc g^x et g^y définissent un élément de $\mathcal{C}(U,R)$. Le résultat énoncé est alors évident. On peut d'ailleurs obtenir ce résultat par un calcul direct.

III. IMAGE DIRECTE ET RECIPROQUE DE PREFAISCEAUX

Soient C, D, E trois catégories et $U : D \to C$ un foncteur.

III.1. Image directe.

Définition III.1.1. <u>On appelle image directe du préfaisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Hom}(C^o,E)$, le préfaisceau $\mathcal{F} u \in \mathrm{Hom}(D^o,E)$ et on le note $u.(\mathcal{F})$.</u>

[illegible] <u>$f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est un morphisme, $u.(f) = f$ est un morphisme de $u.(\mathcal{F})$ dans [illegible]$(\mathcal{F}')$.</u>

[illegible] <u>qui est un foncteur de $\mathrm{Hom}(C^o,4)$ dans $\mathrm{Hom}(D^o,E)$ est appelé foncteur image</u> [illegible]<u>recte</u>.

III.2. Image réciproque

[illegible]position III.2.0.1. <u>On suppose que E a des limites inductives. Alors $u.$ a</u> [illegible] <u>adjoint $u^\bullet$ à gauche, i.e. on a des bijections fonctorielles en</u> [illegible] <u>$\mathrm{Hom}(C^o,E)$ et $\mathcal{G} \in \mathrm{Hom}(D^o,E)$</u>.

$$\underline{\mathrm{Hom}(u^\bullet(\mathcal{G}),\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{G},u.(\mathcal{F}))}$$

[illegible] qu'il faut et qu'il suffit pour tout $\mathcal{G} \in \mathrm{Hom}(D^o,E)$ de trouver $u^\bullet(\mathcal{G})$ [illegible] bijections fonctorielles en $\mathcal{F}$.

<u>III.2.1. Le préfaisceau $u^{\bullet}(\mathcal{G})$.</u>

Pour tout X de $Ob(C)$, soit I_u^X la catégorie suivante : un objet de I_u^X est un couple (Y,m) où $Y \in Ob(D)$ et m est une flèche de X dans $u(Y)$; un morphisme de (Y,m) dans (Y',m') est un morphisme ξ de Y dans Y' tel que $u(\xi)\, m = m'$.

On a un foncteur évident pr_X de I_u^X dans D .

Si $\lambda : X \to X'$ est un morphisme, on a un foncteur évident I_u^{λ} de $I_u^{X'}$ dans I_u^X ; on a : $pr_{X'} = pr_X\, I_u^{\lambda}$.

<u>Définition III.2.1.1. Pour X dans $Ob(C)$, on pose</u> :

$$\underline{u^{\bullet}(\mathcal{G})(X) = \varinjlim_{I_u^X} \mathcal{G}\, pr_X}$$

On notera $i_X(Y,m)$ le morphisme canonique de $\mathcal{G}(Y)$ dans $u^{\bullet}(\mathcal{G})(X)$; si $\xi : (Y,m) \to (Y',m')$, on a donc :

$$i_X(Y,m) \quad (\xi) = i_X(Y',m')$$

Soit $\lambda : X \to X'$ un morphisme ; il existe un morphisme unique $u^{\bullet}(\mathcal{G})(\lambda)$ de $(\mathcal{G})(X')$ dans $u^{\bullet}(\mathcal{G})(X)$ tel que pour tout (Y,m) dans $I_u^{X'}$, on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
u^{\bullet}(\mathcal{G})(X') \arrow[rr, "u^{\bullet}(\mathcal{G})(\lambda)"] & & u^{\bullet}(\mathcal{G})(X) \\
& \mathcal{G}(Y) \arrow[ul, "i_{X'}(Y,m)"] \arrow[ur, "i_X(Y,m\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

a : $u^{\bullet}(\mathcal{G})(1_X) = 1_{u^{\bullet}(\mathcal{G})(X)}$ et si $\lambda' : X' \to X''$ est un morphisme,

$(\mathcal{G})(\lambda'\lambda) = u^{\bullet}(\mathcal{G})(\lambda)\, u^{\bullet}(\mathcal{G})(\lambda')$.

donc construit un préfaisceau $u^{\bullet}(\mathcal{G})$.

III.2.2. Le morphisme α .

Définition III.2.2.1. On pose pour tout Y de $Ob(D)$.

$$\alpha(Y) = i_{u(Y)}(Y, 1_{u(Y)}) \ : \ \mathcal{G}(Y) \longrightarrow u^{\cdot}(\mathcal{G})(Y)$$

Proposition III.2.2.2. : α est un morphisme fonctoriel de $\mathcal{G}$ dans $u_{\circ}(u^{\cdot}(\mathcal{G}))$

preuve : en effet pour tout $\mu : Y \to Y'$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(Y') \arrow[r, "\alpha(Y')"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mu)"'] & u^{\circ}(\mathcal{G})(u(Y')) \arrow[d, "u^{\circ}(\mathcal{G})(u(\mu))"] \\
\mathcal{G}(Y) \arrow[r, "\alpha(Y)"] & u^{\circ}(\mathcal{G})(u(Y))
\end{tikzcd}$$

Proposition III.2.2.3. Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ de $Hom(C^{\circ}, E)$, l'application,

ξ : $f \longmapsto u_{\circ}(f)\alpha$ de $Hom(u^{\circ}(\mathcal{G}), \mathcal{F})$ dans $Hom(\mathcal{G}, u_{\circ}(\mathcal{F}))$ est bijective.

On va fabrique l'application réciproque η de ξ .

III.2.3. Construction de η .

Proposition III.2.3.1. - i) pour tout $g : \mathcal{G} \to u_{\circ}(\mathcal{F})$ et tout X de $Ob(C)$ il existe un morphisme $\eta(g)(X)$ unique de $u^{\cdot}(\mathcal{G})(X)$ dans $\mathcal{F}(X)$ tel que pour tout (Y,m) de I_u^X , on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
u^{\cdot}(\mathcal{G})(X) \arrow[r, "\eta(g)(X)"] & \mathcal{F}(X) \\
\mathcal{G}(Y) \arrow[r, "g(Y)"] \arrow[u, "i_X(Y,m)"] & \mathcal{F}(u(Y)) \arrow[u, "\mathcal{F}(m)"']
\end{tikzcd}$$

ii) $\eta(g)$ est un morphisme de $u^{\cdot}(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{F}$.

[illegible]

[illegible] i) est évident ; prouvons ii) : il faut vérifier que si λ est un

[illegible]

[illegible]sme de X dans X' , on a :

$$\eta(g)(X)\, u^{\cdot}(\mathcal{G})(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)\, \eta(g)(X')$$

i.e. que pour tout $(\underline{Y},m)$ dans $I\underline{u}^{X'}$, on a :

$$\mathcal{F}(\lambda)\ \eta(g)(X')\ i_{X'}(Y,m) = \eta(g)(X)\ u^\circ(\mathcal{G})(\lambda)\ i_{X'}(Y,m)$$

Mais on a : $\quad \eta(g)(X')\ i_{X'}(Y,m) = \quad (m)\ g(Y)$

et $\quad u^\circ(\mathcal{G})(\lambda)\ \ i_{X'}(Y,m) = i_X(Y,m)$.

Il faut vérifier que $\eta(g)(X)\ i_X(Y,m\lambda) = \mathcal{F}(m\lambda)\ g(Y)$

ce qui est un cas particulier de $(*)$.

<u>Proposition III.2.3.2. i) on a $\eta(\xi)(f)) = f$</u> .

<u>ii) on a $\xi(\eta(g)) = g$</u> .

Preuve. i) il faut vérifier que le diagramme $(*)$ où $g(Y)$ est remplacé par $\xi(f)(Y)$ et $\eta(g)(X)$ par $f(X)$ est commutatif, i.e. que le diagramme,

$$\begin{tikzcd}
 & u^\circ(\mathcal{G})(X) \arrow[r] & \mathcal{F}(X) \\
\mathcal{G}(Y) \arrow[ur, "i_X(Y{,}m)"] \arrow[dr, "i_{u(Y)}(Y{,}1_{u(Y)})"'] \arrow[drr, "\xi(f)(Y)"] & & \\
 & u^\circ(\ )(u(Y)) \arrow[r] \arrow[uu, dashed] & \mathcal{F}(u(Y)) \arrow[uu, "\mathcal{F}(m)"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif ; c'est évident avec $\dashrightarrow\ = u^\circ(\mathcal{G})(m)$

ii) Remarquons d'abord que pour $f : u^\circ(\mathcal{G}) \to \mathcal{F}$ et Y de $Ob(D)$ on a la formule :

$$\xi(f)(Y) : \mathcal{G}(Y) \xrightarrow{i_{u(Y)}(Y,1_{u(Y)})} u^\circ(\mathcal{G})(u(Y)) \xrightarrow{f(u(Y))} \mathcal{F}(u(Y))$$

Il faut vérifier que si dans cette formule on remplace f par $\eta(g)$ on trouve $g(Y)$, mais c'est justement ce que donne $(*)$ où on fait $X = u(Y)$, $m = 1_{u(Y)}$

<u>IV. IMAGE DIRECTE ET RECIPROQUE DE FAISCEAUX ; TOPOS.</u>

<u>IV.1. - Image réciproque de faisceaux.</u>

[illegible] deux sites C et D et un foncteur $u : D \to C$. On suppose que l'image [illegible] tout faisceau sur C , est un faisceau sur D ; alors :

<u>[illegible] le foncteur u_* : $\tilde{C} \to \tilde{D}$, (restriction à $\tilde{C}$ de u_*) admet un</u>

preuve : le foncteur u* restriction à $\tilde{D}$ de a u• répond à la question.

Le foncteur u* n'est intéressant que s'il est exact à gauche, d'où :

Définition IV.1.2. Soient C et D deux sites. On appelle morphisme de sites de C dans D, un foncteur u de D dans C, tel que :

i) pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur C, u.($\mathcal{F}$) est un faisceau.

ii) u* est exact à gauche.

Le composé de deux morphismes de sites est un morphisme de sites.

Proposition IV.1.3. Soient C et D deux sites et u : D → C un foncteur. On suppose :

i) les limites projectives finies de D sont représentables.

ii) u commute aux limites projectives finies.

iii) l'image par u de toute famille couvrante de D est une famille couvrante de C.

Alors u définit un morphisme de sites de C dans D.

IV.2. Catégories de faisceaux. topos

Soient C et D deux sites et u : D → C un morphisme de sites de C dans D ; alors u* définit un morphisme de sites de $\tilde{C}$ dans $\tilde{D}$ pour les topologies canoniques.

Proposition IV.2.1. Soit E une U catégorie; (U est un univers).

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un site C ∈ U, tel que les limites projectives dans C soient représentables et que la topologie de C soit moins fine que la topologie canonique, tel que E soit équivalent à la catégorie $\tilde{C}$ des U-faisceaux d'ensembles sur C.

ii) a) le limites projectives finies de E sont représentables.

b) les sommes directes indexées par un élément de U sont représentables ; elles sont disjointes et universelles.

c) Les relations d'équivalences dans E sont effectives universelles.

d) E admet une famille génératrice indexée par un élement de U .

iii) Il existe un site C ∈ U tel que E est équivalente à la catégorie des U-faisceaux d'ensembles sur C et que C admette une U-famille de réné- [illegible] topologiques.

iV) Les $\underline{U}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique sont représentables et E possède une petite famille génératrice.

Définition IV.2.2. Un objet E possédant les propriétés équivalentes i), ii), iii), iV) de la proposition est appelé un $\underline{U}$-topos.

Voir S.G.A.IV nouvelle édition (à paraître)

SEMINAIRE DE GEOMETRIE-ALGEBRIQUE D'ORSAY
Année 1969/70
Tirage provisoire

Exposé V : Descente fidèlement plate quasi-compacte
par Melle MARTIN

§ 1. Théorème fondamental

Soit S_0 un schéma, et Sch/S_0 la catégorie des schémas au-dessus de S_0, X_0 et Y_0 deux objets de cette catégorie. Tout changement de base $S \longrightarrow S_0$ leur fait correspondre deux schémas au-dessus de S $X_0 \times_{S_0} S$ et $Y_0 \times_{S_0} S$ (notés aussi X_S et Y_S)

Théorème.

Le préfaisceau sur la catégorie $Sch/_{S_0}$ à valeurs dans Ens défini par :

$$\begin{cases} S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S) \\ \Big(u : S' \to S\Big) \longrightarrow \Big(\overline{u} : \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X_{S'}, Y_S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S'}(X_{S'}, Y_{S'})\Big) \end{cases}$$

est un faisceau pour la topologie f.p.q.c.

Rappel.

Un préfaisceau P est un faisceau si pour tout crible C couvrant S

$$\mathrm{Hom}(S,P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C,P) \quad \text{est une bijection}$$

La topologie f.p.q.c. étant engendrée par les familles couvrantes du type :

$\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\}$ chaque flèche f_α étant plate et quasi-compacte et la famille surjective, il suffit de vérifier que pour toute famille de ce type,

$$P(S) \longmapsto \prod P(S_\alpha) \rightrightarrows \prod P(S_\alpha \times_S S_\beta) \quad \text{est exacte.}$$

<u>Corollaire. Cas où So=Xo</u>

Le théorème donne les résultats suivants :

Le préfaisceau des sections de Y_S : $S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S, Y_S)$ est un faisceau f.p.q.c.

Le préfaisceau $S \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(S, Y_o)$ qui est isomorphe au précédent, est un faisceau f.p.q.c.

Réciproquement, supposons démontré le résultat précédent.

Soit $(S_\alpha \longrightarrow S)$ une famille couvrant S

$(X_{S_\alpha} \longrightarrow X_S)$ déduite par changement de base, couvre X_S

donc la suite $\mathrm{Hom}_{S_o}(X_S, Y_o) \longrightarrow \prod_\alpha \mathrm{Hom}_{S_o}(X_{S_\alpha}, Y_o)$

$$\rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathrm{Hom}(X_{S_\alpha} \times_{X_S} X_{S_\beta}, Y_o) \text{ est exacte}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S) \longrightarrow \prod_\alpha \mathrm{Hom}_{S_\alpha}(X_{S_\alpha}, Y_{S_\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha\beta} \mathrm{Hom}_{S_\alpha \times_S S_\beta}(X_{S_\alpha \times_S S_\beta}, Y_{S_\alpha \times_S S_\beta})$$

est exacte.

(le dernier isomorphisme provient de $X_{S_\alpha \times_S S_\beta} = X_S \times_S (S_\alpha \times_S S_\beta)$

$$X_{S_\alpha} \times_{X_S} X_{S_\beta} = X_{S_\alpha} \times_{X_S} (X_S \times_S S_\beta) = (X_S \times_S S_\alpha) \times_S S_\beta$$

donc le préfaisceau $S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S)$ est un faisceau

D'où les 3 énoncés équivalents suivants

$S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S, Y_S)$	faisceau f.p.q.c.
$S \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(S, Y_o)$	" "
$S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X_S, Y_S)$	" "

Nous allons démontrer le 2ème énoncé dans la catégorie (Sch/Spec Z) = (Sch).

Il s'en déduira dans le cas général.

<u>Dans la catégorie Sch, tout préfaisceau représentable est un faisceau f.p.q.c.</u>

Exemple : Foncteur "groupe multiplicatif".

C'est le préfaisceau défini de la manière suivante :

$P(S) = O_S(S)^*$ (groupe multiplicatif des éléments inversibles de $O_S(S)$)

$u : S' \longrightarrow S$ $P(u) = P(S) \longrightarrow P(S')$ induit par $O_S(S) \longrightarrow O_{S'}(S')$

Pour tout anneau A , l'application :

$$\mathrm{Hom}_{Ann}(Z[T,T^{-1}],A) \longrightarrow A$$
$$u \longmapsto u(T)$$ est une bijection.

Donc l'application

$$\mathrm{Hom}_{Sch}(S,\mathrm{Spec}\ Z[T,T^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ann}(Z[T,T^{-1}],O_S(S)) \longrightarrow P(S)$$
$$(f,\psi) \longmapsto \psi(\mathrm{Spec} Z[T,T^{-1}])(T)$$

est une bijection et on vérifie qu'elle définit un isomorphisme de foncteurs.

Donc le préfaisceau "groupe multiplicatif" est un faisceau fpqc.

§ 2. Problème analogue en algèbre commutative

Soit A un anneau, A' une A-algèbre fidèlement plate, $A'' = A' \times_A A'$

$$A \xrightarrow{f} A' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A'' \qquad p_1 f = p_2 f = h$$

a) Théorème

Soit N un A-module $N' = f^*(N)$ $N'' = h^*(N) = p_1{}^*(N') = p_2{}^*(N')$ déduits de N par changement d'anneaux

Alors la suite de A-modules (1) $\boxed{N \longrightarrow N' \rightrightarrows N'' \text{ est exacte}}$

- $N \longrightarrow N'$ est injectif puisque A' est fidèlement plat sur A
- pour montrer que la suite (1) est exacte, il suffit de montrer que la suite obtenue en tensorisant à droite par A' est exacte.

Traçons le diagramme avec les spectres d'anneaux correspondants (par abus de notation p_1 et p_2 sont encore les flèches de spectres)

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "f"'] & X'' \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[l, shift left, "p"] \\ X' \arrow[u, "f"] & X'' \arrow[u, "p_1"] \arrow[l, "p_2"] & X''' \arrow[u, "r_{12}"'] \arrow[l, shift right, "r_{13}"'] \arrow[l, shift left, "r_{23}"] \arrow[ll, bend left, "q"] \end{tikzcd}$$

La suite obtenue est donc la même, après remplacement de A par A' et de N par N'

Dans ce cas, l'homomorphisme $A' \longrightarrow A''$ admet une section $m : A'' \longrightarrow A'$

On peut donc se contenter de démontrer que la suite est exacte dans le cas où $f: A \longrightarrow A'$ admet une section $\sigma : A' \longrightarrow A$.

Soit $x' \in N \otimes_A A'$ $\quad x' = \Sigma x_i \otimes a'_i$

$$p_1(x') = p_2(x') \Longleftrightarrow \Sigma x_i \otimes a'_i \otimes 1 = \Sigma x_i \otimes 1 \otimes a'_i$$

Appliquons leur/la flèche $1 \otimes \sigma \otimes 1$: $N \otimes_A A' \otimes_A A' \longrightarrow N \otimes_A A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} N \otimes_A A'$

$$x_i \otimes 1 \otimes a'_i \longrightarrow x_i \otimes 1 \otimes a'_i \longrightarrow x_i \otimes a'_i$$

$$x_i \otimes a'_i \otimes 1 \longrightarrow x_i \otimes \sigma(a'_i) \otimes 1 \longrightarrow \sigma(a'_i) x_i \otimes 1$$

donc $\Sigma x_i \otimes a'_i = x' = \Sigma \sigma(a'_i) x_i \otimes 1$

donc N' est dans l'image de N.

Descente de morphismes de A-modules.

Soient M et N deux A-modules. Mêmes notations qu'au a)

Alors la suite de A-modules

$$\boxed{\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M',N') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_A(M'',N'') \text{ est exacte}}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & N \arrow[d, "j"] \\ M' \arrow[r, "u'"] & N' \end{tikzcd}$$

i, j injectives

donc si $u'_1 i = u'_2$

$$u'_1 i = u'_2 i \Rightarrow j u_1 = j u_2 \Rightarrow u_1 = u_2$$

donc la première flèche est une injection.

- soit u' tel que $P_1^*(u')=P_2^*(u')$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r] \arrow[d, shift right, "P_1"'] \arrow[d, shift left, "P_2"] & N' \arrow[d, shift right, "P_1"'] \arrow[d, shift left, "P_2"] \\ M'' \arrow[r] & N'' \end{tikzcd}$$

montrons que l'image de $u'_{/M}$ est incluse dans N

$m \in M \quad P_1^*(u') o P_1 o i(m) = P_1^*(u') o P_2 o i(m) = P_2^*(u') o P\ o i(m)$

$\Longrightarrow P_1 o u' o i(m) = P_2 o u' o i(m)$

$\Longrightarrow u' o i(m) \in N$ -

Soit u la restriction de u' à M

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "u'"] & M'' \arrow[d] \\ N \arrow[r, dash] & N' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N'' \end{tikzcd}$$

u' et $f^*(u)$ sont solutions du même problème universel, donc sont égales.

c) <u>Généralisation aux schémas</u>

Soient F_o, G_o deux faisceaux quasi-cohérents de modules sur un shéma S_o.

Alors le préfaisceau $S \longmapsto Hom_s(F_s, G_s)$ de la catégorie Sch/S_o à valeurs dans <u>Ens</u>, est un faisceau f.p.q.c.

<u>Lemme. Caractérisation des faisceaux fpqc $(Sch)^o \longrightarrow$ Ens</u>

Pour qu'un préfaisceau P soit un faisceau fpqc, il faut et il suffit que la suite $P(S) \longrightarrow \prod_\alpha P(S_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} P(S_\alpha \times_S S_\beta)$

soit exacte dans les 2 cas suivants :

1°) la famille $\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\}$ est une famille surjective d'immersions ouvertes

2°) il y a une seule flèche $S' \longrightarrow S$ fidèlement plate, S et S' sont affines.

La topologie fpqc peut être définie de 2 manières :

1°) la moins fine qui rende couvrantes les familles:

a) $(S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S)$ famille surjective d'immersions ouvertes

$(S' \xrightarrow{f} S)$ S et S' affines, f fidèlement plat

(ii) la moins fine qui rende couvrantes les familles :

$(S \xrightarrow{f_\alpha} S)$ famille surjective, où chaque f_α est plat et quasi-compact.

(ii) plus fine que (i) :

$\{S' \xrightarrow{f} S\}$ où S et S' sont affines, f fidèlement plat, est bien couvrante au sens de (ii). D'autre part, en recouvrant tous les ouverts de chaque S par des ouverts affines, on obtient une famille $\{U_\lambda \longrightarrow S\}$ couvrante pour (ii), et tel que le crible engendré soit inclus dans le cible engendré par les $\left\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\right\}$, donc ce dernier est couvrant.

(i) est plus fine que (ii)

Soit $\left\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\right\}$ un famille surjective, où chaque f_α est plat et quasi-compact.
Recouvrons S par des ouverts affines U_i assez petits pour que chaque U_i soit contenu dans l'image d'un f_α (c'est possible parce que f_α est <u>ouvert</u>) soit f_{α_i}

$$\begin{tikzcd} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \arrow[r, "f_{\alpha_i}"] \arrow[d] & U_i \arrow[d] \\ S_{\alpha_i} \arrow[r, "f_{\alpha_i}"] & S \end{tikzcd}$$

$f_{\alpha_i}|f_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ est plate, quasi-compacte et surjective, donc fidèlement plate.

La famille $(U_i \longrightarrow S)$ est couvrante pour (i). Si on montre que la famille $(f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i)$ est couvrante pour chaque i, alors la famille composée l'est aussi. Or elle appartient au crible [illegible]endré par $\left\{S_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} S\right\}$. Donc ce crible contiendra un crible [illegible]rant donc sera couvrant.
[illegible] à montrer que $S' \xrightarrow{f} S$ est couvrante si S est affine, [illegible] est f.p.q.c.

Donc $S' = \bigcup_{\text{finie}} S'_i$ où chaque S'_i est affine.

Alors $S_1 = \bigcup S'_i$ est affine et $S_1 \longrightarrow S' \longrightarrow S$ est f.p.q.c. donc couvrant, donc le cible engendré par $\{S' \longrightarrow S\}$ est couvrant.

- La topologie la plus fine qui fasse de P un faisceau a pour cribles couvrant X les cribles R de X tels que $P(X) \xrightarrow{\sim} P(R)$ et ceci universellement. Soit $\mathcal{C}_p$ cette topologie. Montrons donc que si les propriétés énoncées dans le lemme sont vérifiées, la topologie $\mathcal{C}_p$ est plus fine que la topologie fpqc., c'est-à-dire que les familles qui engendrent la topologie fpqc sont couvrantes pour la topologie $\mathcal{C}_p$.

- seul le "universellement" est à vérifier*.

soit $\{X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X\}$ un recouvrement ouvert de X. Soit R le crible engendré $P(R) \xrightarrow{\simeq} P(X)$

$\{Y_\alpha \longrightarrow Y\}$

Alors $\{Y_\alpha \longrightarrow Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y, donc le crible engendré, R' satisfait aussi à $P(Y) \xrightarrow{\sim} P(R')$

soit $X' \xrightarrow{f} X$ un morphisme f.p.q.c. de schémas affines. R le crible engendré $P(X) \xrightarrow{\sim} P(R)$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f"] & X \\
Y' \arrow[u] \arrow[r, "f'"] & Y \arrow[u] \\
Y'_i \arrow[u] \arrow[r, "f'_i"'] & Y_i \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Recouvrons Y par des ouverts affines Y_i. Alors Y' est recouvert par les ouverts $Y'_i = Y' \times_Y Y'_i \xrightarrow{\sim} X' \times_X Y_i$ qui sont affines

et $Y' \times_Y Y'$ est recouvert par les $Y'_i \times_{Y_i} Y'_i$

alors :

$$P(Y) = \varprojlim P(Y_i)$$

$$P(Y') = \varprojlim P(Y'_i)$$

$$P(Y' \times_Y Y') = \varprojlim P(Y'_i \times_{Y_i} Y'_i)$$

$$P(Y_i) \longleftarrow P(Y'_i) \rightrightarrows P(Y'_i \times_Y Y'_i) \quad \text{est exacte}$$

$$P(Y) \longleftarrow P(Y') \rightrightarrows P(Y' \times_Y Y') \quad \text{est eaxaete}$$

- Bien entendu si P est un faisceau, les deux familles décrites étant couvrantes pour la topologie fpqc, les suites correspondantes sont exactes. donc le lemme est démontré.

Toutes ces propriétés restent vraies dans la catégorie Sch/So.

<u>Descente de morphismes de modules quasi-cohérents sur un schéma</u>

$$S \longmapsto \mathrm{Hom}_{O_S}(F_S, G_S) \text{ est un faisceau f.p.q.c.}$$

Donc deux choses à vérifier

1°) recollement sur recouvrement ouvert de S

$\mathcal{F}$ et G étant des faisceaux au sens de la topologie de Zariski, les sections sur les ouverts se recollent, donc aussi les morphismes.

2°) $S' \longrightarrow S$ ~~morphisme~~ fidèlement plat de schémas affinés

$= \mathrm{Spec}A'$ $= \mathrm{Spec}A$. $A \longrightarrow A'$ fidèlement plat.

Alors il existe un A-module M tel que $= \tilde{M}$

$\longrightarrow A \longrightarrow N \longrightarrow G = \tilde{N}$

La propriété est une conséquence de ce qu'on a vu pour des modules

$$\mathrm{Hom}_{O_S}(\mathcal{F}_S, G_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{O_{S'}}(\mathcal{F}_{S'}, G_{S'}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{O_{S''}}(\mathcal{F}_{S''}, G_{S''}) \text{ est exacte.}$$

3. <u>Démonstration du théorème</u> : <u>$S \longmapsto \mathrm{Hom}_{So}(S, Yo)$ est un faisceau f.p.q.c.</u>

1°) <u>recollement sur un recouvrement ouvert de S</u>.

$$U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \longrightarrow S \xrightarrow{u} Y_o$$

Les applications topologiques sous-jacentes se recollent bien sûr.

Les flêches des faisceaux d'anneaux se recollent du fait que ce sont des faisceaux pour la topologie de Zariski.

2°) <u>démonstration de $\mathrm{Hom}(S, Yo) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S', Yo) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S'', Yo)$ exacte</u>

si $S = \mathrm{Spec}A$

$S' = \mathrm{Spec}A'$ — A' étant une A-algèbre fidèlement plate.

$S'' = \mathrm{Spec}A''$ — $A'' = A' \otimes_A A'$

a) $S'' \rightrightarrows S' \longrightarrow S$ est un diagramme exact d'<u>ensembles</u>, c'est-à-dire que S est le conoyau de la double flèche au sens ensembliste.

$$\begin{tikzcd} {|S''|} \arrow[r, shift left, "P_1"] \arrow[r, shift right, "P_2"'] & {|S'|} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h'"'] & {|S|} \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

g est fidèlement plat donc surjectif.

Soit $s \in |S|$. Supposons que $s = g(s'_1) = g(s'_2)$ $\quad s'_1, s'_2 \in |S'|$.

L'application $|S''| \longrightarrow |S'| \times_{|S_1|} |S'|$ étant surjective, il existe

$s'' \in |S''|$ tel que $\left.\begin{array}{l} P_1(s'') = s'_1 \\ P_2(s'') = s'_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow h'(s'_1) = h''(s'_2)$

donc on définit bien une application h unique par : $h(s) = h'(s'_1)$

b) $S' \xrightarrow{g} S$ fait de $|S|$ un espace topologique quotient de $|S'|$ ç'est-à-dire que soit $Z \subset |S|$

Alors Z fermée (resp. ouverte) $\Longleftrightarrow$ $Z' = g^{-1}(Z)$ fermée (resp. ouverte)

g étant surjectif, il suffit de le démontrer pour la propriété "être fermé".

$Z' = g^{-1}(Z) \Longrightarrow g(Z') = Z$

Soit Z' fermé dans $S' = \operatorname{Spec} A'$. I' un idéal le définissant. $I = I' \cap A$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & \underset{Y_1}{A'/IA'} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \underset{Y'_1}{A'/I' \otimes_{A/I} A'/IA'} \\ A \arrow[u, "f.p"] \arrow[r] & \underset{Y}{A/I} \arrow[u, "f.p"] \arrow[r, hook] & \underset{Y'}{A'/I'} \arrow[u, "f.p."] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S' & Y_1 \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "g|_{Y_1}"] & Y'_1 \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[from=u, "g"'] & Y \arrow[l, "j"] & Y' \arrow[l, "u"] \arrow[ul, "j_1"'] \end{tikzcd}$$

$Z' = |Y'| \quad |Y_1| = g^{-1}|Y| \quad Z' \subset |Y_1|$

$u(Z')$ est dense dans $|Y|$, fermé de $|S|$, donc $ju(|Y'|) = g(Z) = Z$ a pour fermeture $|Y|$ dans S

$|Y| = |\overline{Z}|$.

$(|Y'_1|) = (|Y'_1|) \subset u|Y'| = Z \Longrightarrow v(|Y'|) \subset g^{-1}(Z) = Z'$ fermé de $|S|$

est dominant donc $v(\overline{|Y'_1|}) = |Y_1|$ donc $|Y_1| \subset Z'$ donc $|Y_1| = Z'$

$g(Z') = Z = |Y| = \overline{Z}$ donc Z est fermé dans S.

c) <u>Descente de sections</u>

Soit $S' \xrightarrow{g} S$ un morphisme de schémas f.p.q.c.

G un faisceau de modules quasi-cohérent sur S

Alors la suite

$$\boxed{G \longrightarrow g_*(G') \rightrightarrows h_*(G'') \quad \text{est exacte}} \qquad \begin{tikzcd} S'' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[rr, bend right, "h"'] & S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

Cela revient à montrer que pour tout cuvert U de S

$$\Gamma(G,U) \longrightarrow \Gamma(G',g^{-1}(U)) \rightrightarrows \Gamma(G'',h^{-1}(U) \quad \text{est exacte}$$

Or, le morphisme $S'|_{g^{-1}(U)} \longrightarrow S|_U$ obtenu par changement de base est encore f.p.q.c. On peut donc supposer $S = U$

Alors d'après le § 2.

la suite $\mathrm{Hom}_S(O_S, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(O_{S'}, G') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(O_{S''}, G'')$ est exacte.

d'où le résultat cherché, grâce à l'isomorphisme fonctoriel en S :

$$\mathrm{Hom}_S(O_S, G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(G,S)$$

d) <u>Propositions</u>.

Pour tout espace annelé Z, la suite

$$\boxed{\mathrm{Hom}(S,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S',Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S'',Z)} \quad \text{est exacte.}$$

$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & S' \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "g"'] & Z \\ & & S \arrow[u, dashed, "f_o"'] \end{tikzcd} \qquad f'_{p_1} = f'_{p_2}$$

On a vu qu'on peut construire une application ensembliste unique f_o telle que $f_o g = f'$.

Elle continue : soit F un fermé de Z

Pour montrer que $f_o^{-1}(F)$ est fermé, il suffit de montrer que $g_o^{-1} f_o^{-1}(F)$ est fermé, ce qui est bien réalisé puisque $g_o^{-1} f_o^{-1}(F) = f'^{-1}(F)$

$$\begin{tikzcd}
O_Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & f_{o*}\, g_*(O_{S'}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & f_{o*}\, h_*(O_{S''}) \\
f_{o*}(O_S) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

d'après c) $\quad O_S \longrightarrow g_*(O_{S'}) \rightrightarrows h_*(O_S{''})$ est exacte, donc on obtient encore une suite exacte en prenant son image par f_{o*} .

Donc il existe un morphisme de faisceaux unique qui rend le diagramme commutatif.

<u>Corollaire</u>

Cette suite reste exacte dans les catégories suivantes :

- espaces annelés en anneaux locaux.

la seule chose à vérifier est que le morphisme de schémas $O_Z \longrightarrow f_{o*}(O_S)$ obtenu induit un morphisme local sur les fibres.

$$\begin{tikzcd}
O_{Z,z} \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dashed] & & O_{S',s'} \\
& O_{S,s} \arrow[ur, "\text{local}"'] &
\end{tikzcd}$$

la troisième flèche est aussi locale.

- schémas. (Sch)

-$(Sch/_{S_o})$

Il faut vérifier que le morphisme construit $Z \xrightarrow{f} S$, est bien un morphisme sur S_o.

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\
S \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & S_o
\end{tikzcd}$$

$(\psi f')p_1 = (\psi f')p_2$ - Donc il existe une flèche unique $S \longrightarrow S_o$, qui composée avec g, donne $\psi f'$.

On a trouvé 2 solutions φ et ψf . Donc elles sont égales. $\varphi = \psi f$.

§ 4. Descente de Propriétés

1°) Descente de sous-modules.

Soit $S' \longrightarrow S$ f.p.q.c. F un faisceau de module quasi-cohérent sur S

F' et F'' déduits par changement de base.

$H(F) = \{\text{sous-modules de } F\}$

Alors la suite $\boxed{H(F) \longrightarrow H(F') \rightrightarrows H(F'')}$ est exacte.

Nous allons montrer le résultat plus général suivant : Soit F_o un faisceau de modules quasi-cohérents sur S_o .

Alors le pré-faisceau : $S \longrightarrow H(F_S)$ est un faisceau f.p.q.c.

- Recollement sur un recouvrement ouvert

  provient du fait que c'est local au sens de Zariski.

- Démonstration dans le cas affiné.

$$A \xrightarrow{f} A' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A'' \qquad p_1 f = p_2 f = h$$

$$M \longrightarrow M' \rightrightarrows M''$$

1°) soient N_1 et N_2 deux sous-modules de M tels que

$f^*(N_1) = f^*(N_2)$. Alors $N_1 = N_2$.

En effet $\left.\begin{array}{l} N_1 = N'_1 \cap M \\ N_2 = N'_2 \cap M \end{array}\right\} \Longrightarrow N_1 = N_2$

2°) démontrons le résultat plus général suivant :

Soit N' un A'-module, N'' un A''-module, et deux flèches $N' \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} N''$

telles que π_i soit p_i-linéaire et induise un isomorphisme $N'' = p^*_i(N')$ de A''-modules.

Alors si N est le noyau du couple (π_1, π_2), N est un A-module, et la

$N \longrightarrow N'$ induit un isomorphisme $f^*(N) = N'$ de A'-modules.

- on vérifie que si on fait opérer A sur un élement de N , on obtient encore un élément de N , donc N est un A-module.
- il suffit de démontrer que l'on obtient un isomorphisme après le changement de base $A \xrightarrow{f} A'$. Donc on peut supposer que f admet une section σ

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A' \arrow[r, shift left, "P_1"] \arrow[r, shift right, "P_2"'] \arrow[d, "\sigma"'] & A'' \arrow[d, "\sigma \otimes 1"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & A \otimes_A A' \simeq A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
(\sigma \otimes 1) P_1 = f\sigma \\
(\sigma \otimes 1) P_2 = 1_{A'}
\end{array}$$

donc
$$\left.\begin{array}{l}(\sigma \otimes 1)^* P_2{}^*(N') = N' \\ (\sigma \otimes 1)^* P_1{}^*(N') = f^*\sigma^*(N')\end{array}\right\} \Longrightarrow N' = f^*\sigma^*(N')$$

or la suite $\underset{= N'}{\sigma^*(N')} \longrightarrow f^*\sigma^*(N') \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \underset{= N''}{h^*\sigma^*(N')}$ est exacte, donc $\sigma^*(N')$ est le noyau de (π_1, π_2) donc $\sigma^*(N') \simeq N$ donc $N' \simeq f^*(N)$

<u>Corollaire</u>.

Soit I' un idéal de A' tel que $p_1(I')A'' = p_2(I')A''$.

Si $I = I' \cap A$, alors $I' = IA'$.

<u>Descente de sous-schémas fermés</u>.

$H(S) = \{$ sous-schémas fermés de $S \}$

La suite $H(S) \longrightarrow H(S') \rightrightarrows H(S'')$ est exacte.

2°) <u>Descente de propriétés de modules</u>.

$g : S' \longrightarrow S$ f.p.q.c.

F faisceau quasi-cohérent sur S .

Se propose de mettre en relation des propriétés de F et de $g_*(F)$.

<u>Remarque</u>.

Si la propriété (P) considérée est locale (au sens de Zariski) et stable au changement de base, si on a montré dans le cas de 2 schémas affines que

$$F' \text{ vérifie } (P) \Longrightarrow F \text{ vérifie } (P)$$

Alors pour un morphisme quelconque F vérifie (P) $\Longleftrightarrow$ F' vérifie (P)

- en effet on peut supposer S affine puisque la propriété est locale.

Alors $S' = \bigcup_{\text{finie}} S'_i$ $\quad S'_i$ affine .

$\bigcup S'_i = T$ est affine et $T \longrightarrow S$ est fidèlement plat.

$T \longrightarrow S' \longrightarrow S$

F' vérifie (P) $\Longrightarrow$ F'_T vérifie (P) $\Longrightarrow$ F vérifie (P)

<u>Exemples</u>

- de type fini.
- de présentation finie.
- localement libre de type fini.
- exactitude des suites.

On est ramené à un problème d'algèbre commutative

soit $A \longrightarrow A'$ une A-algèbre fidèlement plate.

M un A-module. $M' = M \otimes_A A'$.

Alors si M' est de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre de type fini) il en est de même de M.

i) <u>de type fini</u>.

$M = \varinjlim M_i \qquad M_i$ sous-module de type fini de M

$\Longrightarrow M' = \varinjlim M'_i \qquad M'_i \quad$ ———————— $\quad M'_i = M_i \otimes_A A'$

$\Longrightarrow$ pour i assez grand, $M' = M'_i \Longrightarrow M = M_i$

ii) <u>de présentation finie</u>

M est donc déjà de type fini $\quad 0 \to R \to L \to M \to 0 \quad$ L libre de type fini

$\Longrightarrow \quad 0 \to R' \to L' \to M' \to 0$

Si M' est de présentation finie, R' est de type fini, donc R aussi,

donc M est de présentation finie.

iii) localement libreet de type fini

c'est équivalent à "plat et de présentation finie".

Donc c'est une propriété qui se descend.

<u>) Descente de propriétés de morphismes de schémas</u>

marque faite en 2°) reste valable.

La plupart des propriétés des morphismes sont conservées par descente

Surjectif
radiciel } EGA IV. 2.6.1

ouvert
fermé } EGA IV. 2.6.2.

universellement ouvert
——— fermé
——— bicontinu
homéomorphisme universel
quasi-compact
quasi-compact dominant } EGA 2.6.3

séparé
localement de type fini
——— de présentation finie
type fini
propre
isomorphisme
immersion ouverte
——— fermée
affine
fini
quasi-fini
plat
lisse
étale } EGA 2.7.1

Ne sont pas conservés : projectif
quasi-projectif
immersion locale

<u>Quelques exemples de démonstrations</u>

- <u>injectif</u>

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

S' n'intervient plus

α f.p.q.c.

$f(x_1) = f(x_2) = y$ α surjectif $\Longrightarrow \exists\, y' \in Y'$ $\alpha(y') = y$

Alors $(x_1, y') \in X'$ $f'(x_1, y') = f'(x_2, y') = y'$

$(x_2, y') \in X'$ $\Longrightarrow x_1 = x_2$

- <u>surjectif</u>

évident puisque α surjectif

- $S' \xrightarrow{f} S$ $E \subset S$

Alors $f^{-1}(E)$ ouvert (resp.fermé) $\Longleftrightarrow$ E ouvert (resp. fermé)

"être ouvert" est une propriété locale.

dans le cas affine on a vu que si $S' - f^{-1}(E) = f^{-1}(S-E)$ est fermé, S-E est fermé, donc E est ouvert.

- homéomorphisme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

il suffiet de vérifier que f est ouvert

U ouvert de $X \Longrightarrow \beta^{-1}(U)$ ouvert de $X' \longrightarrow f'\beta^{-1}(U)$ ouvert dans Y'

or $f'\beta^{-1}(U) = \alpha^{-1}f(U)$

donc $\alpha^{-1}f(U)$ est ouvert dans Y', donc $f(U)$ est ouvert dans Y.

4. Exemples

1°) Extension de corps finie galoisienne.

$k \longrightarrow k' \quad [k' : k] = n$. Soit G son groupe de Galois.

Rappel.

L'application suivante est un isomorphisme d'anneaux :

$$k' \otimes_k k' \longrightarrow k'^n$$
$$\lambda \otimes \lambda' \longrightarrow (g(\lambda)\, \lambda')_{g \in G}$$

L'espace topologique Spec $k' \otimes_k k'$ a donc n points isolés. Sur chacun d'eux, l'anneau est le corps k'.

Les deux structures de k' algèbres sont données par les 2 flèches :

$$k' \rightrightarrows k' \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} k'^n$$
$$x \longrightarrow x \otimes 1 \longrightarrow (g(x))_{g \in G}$$
$$x \longrightarrow 1 \otimes x \longrightarrow (x)_{g \in G}$$

c'est-à-dire que sur chaque composante de k'^n on a les 2 flèches :

$$k' \underset{1}{\overset{g}{\rightrightarrows}} k'_g$$

Traduction du théorème dans ce cas particulier

X étant une variété sur k, on lui associe une variété X' sur k', puis une variété X'' sur k''.

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] & X'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[from=1-1, to=2-1, phantom] & \operatorname{Spec} k' \arrow[l] & \operatorname{Spec} k'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[from=1-1, to=2-1] \arrow[from=1-2, to=2-2] \arrow[from=1-3, to=2-3] \end{tikzcd}$$

- G opère à gauche sur k'
- donc G opère à droite sur le foncteur représenté par $\operatorname{Spec} k'$.

$$\operatorname{Hom}_{Sch}(Z, \operatorname{Spec} k') \approx \operatorname{Hom}_{An\ n}(k', \Gamma(Z, O_Z)) \qquad G \text{ opère à droite par composition}$$

- $X' = X \times_k k'$ (par abus de notations)

$$\operatorname{Hom}_{Sch}(Z,X') = \operatorname{Hom}(Z,X) \times_{\operatorname{Hom}(Z,k)} \operatorname{Hom}(Z,k')$$

G opère à droite sur $\operatorname{Hom}(Z,k')$, donc opère à droite sur le foncteur représenté par X'

explicitons :

à $\sigma \in G$, on associe une flèche $\operatorname{Spec} k' \longrightarrow \operatorname{Spec} k'$

donc une flèche $X \times_k k' \longrightarrow k'$ qui induit une flèche $X \times_k k' \longrightarrow X \times_k k'$.

- donc G opère à gauche sur $\operatorname{Hom}_X(X',Z)$

Le théorème nous dit alors que la suite :

$$\operatorname{Hom}_X(X,Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(X',Z) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_X(X'',Z) \qquad \text{est exacte.}$$

explicitons ces 2 flèches :

X'' est la somme de n variétés, sur chaque point de k'^n.

donc $\operatorname{Hom}_X(X'',Z) \approx \operatorname{Hom}_X(X',Z) \times G$

Les deux flèches sont les suivantes :

$$u \longmapsto (u)_{g\in G}$$

$$u \longmapsto (gu)_{g\in G}$$

Donc le théorème montre que $\operatorname{Hom}_X(X,Z)$ s'identifie au sous-ensemble de $\operatorname{Hom}_X(X',Z)$ des morphismes invariants par G .

Descente de sous-variétés .

Soient A^n_k et $A^n_{k'}$ les espaces affinés de dimension n sur k et k' .

Une sous-variété de $A^n_{k'}$, définie par un idéal $\mathfrak{a}'$ de $k'[X_1,\dots,X_n]$ peut être définie par des polynômes de $k[X_1,\dots X_n]$ si et seulement si, pour tout g, $g\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$.

ex : $k = \mathbb{R}$ k' $\mathbb{C}$

$\mathfrak{a}'$ peut être engendré par des polynômes à coefficients réels $\Longleftrightarrow \overline{\mathfrak{a}'} = \mathfrak{a}'$

2°) Cas d'une extension purement inséparable de degré fini.

$$k \longrightarrow k' \underset{p^2}{\overset{p^1}{\rightrightarrows}} k'' = k' \otimes_k k'$$

Théorème

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $k'[X_1,\dots, X'_n]$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathfrak{a}$ est engendré par $\mathfrak{a}_o = \mathfrak{a} \cap k[X_1,\dots,X_n]$

(ii) $p_1(\mathfrak{a})$ et $p_2(\mathfrak{a})$ engendrent le même idéal de $k''[X_1,\dots,K_n]$

(iii) pour tout opérateur différentiel D de k' sur k, pour tout de l'idéal $\mathfrak{a}$, alors le / polynôme F^D (obtenu en appliquant D aux coefficients de F) appartient à $\mathfrak{a}$.

$\boxed{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$ résulte de l'étude faite sur la descente f.p.q.c.

$\boxed{(i) \Longrightarrow (iii)}$ soit $F \in \mathfrak{a}_o = \mathfrak{a} \cap k[X_1,\dots,X_n] = \mathfrak{a} \cap k[\underline{X}]$

$$F = \Sigma\, a_{\underline{i}}\, X^{\underline{i}} \qquad a_{\underline{i}} \in k$$

donc $D \in \mathrm{Diff}(k'|k)$ D étant k-linéaire $D(a_{\underline{i}}) = \lambda a_{\underline{i}}$ $\lambda \in k'$

donc $F^D = \lambda F \in \mathfrak{a}_o$

$\mathfrak{a}$ étant engendré par $\mathfrak{a}_o$, on en déduit (iii) par linéarité.

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (ii)}$

Soit $\mathfrak{a}_1 = p_1(\mathfrak{a})\, k''[\underline{X}]$ $\qquad k' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} k''$

$\mathfrak{a}_2 = p_2(\mathfrak{a})\, k''[\underline{X}]$

k" peut être considéré comme espace vectoriel sur k' grâce à p_1. Soit $(e\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ unebase correspondant à cette structure, telle que le 1er élément de la base soit 1.

Soit $F \in k''[\underline{X}]$ $F = \Sigma F_\lambda e_\lambda$ $F_\lambda \in k'[\underline{X}]$

Alors :

Lemme 1

$$F = \Sigma F_\lambda e_\lambda \qquad \boxed{F \in \mathfrak{a}_1 \Longleftrightarrow \forall \lambda [F_1 \in \mathfrak{a}}$$

en effet si $F_o \in \mathfrak{a}$, $P_1(Fo)$ a pour coordonnées sur la base : $\{p_1(F_o), o, \ldots, o\}$

donc $F \in \mathfrak{a}_1 \Longrightarrow F = {}_i\Sigma\, p_1(F_i) G_i = \sum_i p_1(F_i).\sum_\lambda G_1^i e_\lambda$ avec $F_i \in \mathfrak{a}$

$$F_\lambda = \sum_i F_i\, G_\lambda^i \in \mathfrak{a}$$

Lemme 2

Soit A' une A-algèbre, $A'' = A' \otimes_A A'$ $\qquad A \longrightarrow A' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A''$

I le noyau de l'application $\delta : A'' \longrightarrow A'$
$\qquad x \otimes y \longrightarrow xy$

Soit $\overline{D} : A'' \longrightarrow A'$ une application A'-linéaire (A" étant muni de la structure de A'-module induite par $\underline{p_1}$) . Soit $n \in N$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

① $\overline{D}\,(I^{n+1}) = 0$

② $\overline{D}_o p_2$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ de A'.

- Démontrons-le par récurrence sur n

- $\underline{n = 0}$ $\overline{D}(I) = 0 \Longrightarrow \overline{D}$ se factorise : $\begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{\overline{D}} & A' \\ & {\scriptstyle\delta}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\Delta} & \\ & A' & \end{array}$ Δ étant une application A' linéaire

Alors $\overline{D}_o p_2 = \Delta_o \delta_o p_2 = \Delta$ est une homothétie de A", donc un opérateur différentiel d'ordre 0.

Réciproquement, si $\overline{D}_o p_2 = 2$

$$\overline{D}(x \otimes y) = x\, \overline{D}(1 \otimes y) = x\, \overline{D}_o p_2(y) = x\Delta(y)$$

$$\Longrightarrow \overline{D}(1\otimes x - x\otimes 1) = 0 \quad \Longrightarrow \overline{D}\,(I) = 0$$

- <u>n quelconque $\geqslant 1$</u>

$D = \overline{D}_o p_2$ $\qquad \overline{D}$ est alors défini par $\overline{D}(x\otimes y) = x\,D(y)$

$x \in A'$. $D'_x = xD - Dx$

Alors D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n \Longleftrightarrow \forall x D'_x$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n-1$ $\Longleftrightarrow \overline{D}'_x(I^n) = 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

explicitons : $\overline{D}'_x(u\otimes v) = uD'_x(v) = u[xDv - D(xv)] = \overline{D}(ux\otimes v - u\otimes xv)$

$$= \overline{D}[\underbrace{(u\otimes v)(x\otimes 1 - 1\otimes x)}_{\in I}]$$

Alors $\overline{D}(I^{n+1}) = 0 \Longrightarrow \overline{D}'_x(I^n) = 0$ donc D est un opérateur différentiel d'ordre n

et si $\forall_x, \overline{D}'_x(I^n) = 0$ $\quad I^{n+1}$ est engendré par les éléments

$$\prod_{i=1}^{n+1} (x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i) = (x_1\otimes 1 - 1\otimes x_1) \prod_{i=2}^{n} (x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i)$$

$$= (x_i\otimes 1 - 1\otimes x_1)\underbrace{(u\otimes v)}_{\in I^n}$$

donc $\overline{D}\left|\prod_{i=1}^{n+1} (x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i)\right| = \overline{D}'_{x_1}(u\otimes v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{D}(I^{n+1}) = 0$

Revenons à notre problème.

k' étant purement inséparable sur k, de degré fini, k'' est donc noéthérien et tous les éléments de la forme $1\otimes x - x\otimes 1$ sont nilpotents. Donc l'idéal I qu'ils engendrent est nilpotent.

Donc les applications : $\quad \overline{D} \longmapsto \overline{D}_o p_2$

$\qquad \overline{D} \longleftarrow D$

$$\overline{D}(x\otimes y) = xD(y)$$

définissent une bijection entre l'ensemble des formes linéaires de k'' (muni de sa structure d'espace vectoriel sur k' induite par p_1) et l'ensemble des k opérateurs différentiels de k'.

En particulier, soient $(\varphi_\lambda)\lambda\in\Lambda$ les formes coordonnées. Alors $\varphi_{\lambda o}p_2$ est un opérateur différentiel de k'.

Soit alors $F \in \mathfrak{A}$ $\qquad F^{p_2} = \sum_\lambda F^{\varphi\lambda} o p_2\, e_\lambda$ $\qquad$ par hypothèse $F^{\varphi_\lambda} o p_2 \in \mathfrak{A}$.

Donc toutes les coordonnées de F^{p_2} sont dans $\mathfrak{A}$. D'après le lemme 1, $F^{p_2} \in \mathfrak{A}_1$

Donc $\mathfrak{A}_2$ engendré par les F^{p_2}, est inclus dans $\mathfrak{A}_1$.

En échangeant les rôles de p_2 et p_2, on obtient donc l'égalité $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Exposé 6 : DESCENTE FPQC des SCHEMAS.

par Ch. DELORME.

---

§0 RAPPELS.

01. Les propriétés d'exactitude dans les ensembles faisant intervenir des limites inductives quelconques et des limites projectives finies restent vraies dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site donné.

Exemples :

Les limites inductives sont universelles ; autrement dit elles se conservent par changement de base.

Un épimorphisme de faisceaux $p : F' \longrightarrow F$ est le conoyau de la double flèche (p_o, p_1) où p_o et p_1 sont les projections de $F' \times_F F'$ sur F'.

02. Dans une catégorie où les produits fibrés sont représentables, on considère un morphisme $p : S' \longrightarrow S$, les projections de $S'' = S' \times_S S'$ sur S' et les projections de $S' \times_S S' \times_S S' = S'''$ sur S'', définies par :

$$p_o(s_o, s_1) = s_o \qquad p_{01}(s_o, s_1, s_2) = (s_o, s_1)$$

$$p_1(s_o, s_1) = s_1 \qquad p_{02}(s_o, s_1, s_2) = (s_o, s_2)$$

$$p_{12}(s_o, s_1, s_2) = (s_1, s_2)$$

les s_i sont des points de S' à valeur dans objet variable T de la catégorie.

On a les égalités évidentes :

$$p\, p_o = p\, p_1 = q$$

$$p_o\, p_{01} = p_o\, p_{02} = q_o$$

$$p_o\, p_{12} = p_1\, p_{01} = q_1$$

$$p_1\, p_{02} = p_1\, p_{12} = q_2$$

$$p\, q_o = p\, q_1 = p\, q_2 = r$$

.../...

On considère les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, "p'_1"] \arrow[d, "f''"] & X''' \arrow[l, "p'_{12}"] \arrow[d, "f'''"] \\ F' & F'' \arrow[l, "p_1"] & F''' \arrow[l, "p_{12}"] \end{tikzcd}$$

Alors les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "p\, f'"'] & X'' \arrow[l, "p'_1"] \arrow[d, "p_o\, f''"] \\ F & F' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X'' \arrow[d, "q\, f''"'] & X''' \arrow[l, "p'_{12}"] \arrow[d, "q_o\, f'''"] \\ F & F' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

§ 1 THEOREME de REPRESENTABILITE.

1.1. Théorème.

Soit F un faisceau fpqc sur la catégorie des schémas sur S ; s'il existe une famille $(S_\alpha \longrightarrow S)$ couvrante pour fpqc, telle que pour tout α la restriction F_α de F à Sch/S_α soit représentable par un schéma X_α affine sur S_α, alors F est représentable par un schéma X affine sur S.

1.2. Remarque.

F_α est, en tant que faisceau sur S, un produit fibré de F par S_α sur S.

Les schémas S' sur S, tels que $F \times_S S'$ soient représentables par un schéma X' affine sur S' forment un crible, car les morphismes affines sont conservés par changement de base.

L'hypothèse de 1.1. dit que ce crible est couvrant pour fpqc, la conclusion dit que ce crible est S.

Ceci se dit encore : la propriété pour un faisceau fpqc d'être représentable par un chéma affine sur la base est locale pour fpqc.

Il suffit de montrer le théorème dans deux cas :

* $(S_\alpha \longrightarrow S)$ recouvrement par des immersions ouvertes.
* $S' \longrightarrow S$ provient d'un morphisme d'anneaux fidèlement plat.

1.3. Démonstration du premier cas.

On commence par montrer :

La propriété pour un faisceau pour la topologie de Zariski d'être représentable par un schéma est locale pour la topologie de Zariski.

Considérons le diagramme de faisceaux de Zariski sur Sch/S

$$\begin{tikzcd}
 & & X_\alpha \arrow[dd, "\xi_\alpha"'] & & X_\beta \arrow[d, "\xi_\beta"'] & & \\
F \arrow[dddd] & & & & F_\beta \arrow[llll] \arrow[dd] & & F_{\alpha\beta} \arrow[ll] \arrow[dllll] \arrow[ddd] \\
 & & F_\alpha \arrow[ull] \arrow[dd] & & & & \\
 & & & & S_\beta \arrow[dllll] & & \\
S & & S_\alpha \arrow[ll] & & & & S_{\alpha\beta} \arrow[llll] \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

F_α est la restriction de F à S_α. Le faisceau F_α est représenté par le schéma X_α et l'isomorphisme de faisceaux ξ_α.

Nous avons deux représentants de $F_{\alpha\beta}$, ce sont les images réciproques sur $S_{\alpha\beta}$ de (X_α, ξ_α) et (X_β, ξ_β), notées $(X_\alpha^\beta, \xi_\alpha^\beta)$ et $(X_\beta^\alpha, \xi_\beta^\alpha)$. On en tire l'isomorphisme $u_{\alpha\beta} : X_\beta^\alpha \longrightarrow X_\alpha^\beta$ défini par $\xi_\alpha^\beta \ u_{\alpha\beta} = \xi_\beta^\alpha$.

De même on a trois représentants de $F_{\alpha\beta\gamma}$ avec les isomorphismes de restriction des u_{ij}. En oubliant les indices du haut, on a l'égalité :

$$\xi_\alpha u_{\alpha\beta} \ u_{\beta\gamma} = \xi_\beta \ u_{\beta\gamma} = \xi_\gamma = \xi_\alpha \ u_{\alpha\gamma}$$

On en déduit l'égalité : $u_{\alpha\beta} \ u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$, car ξ_α isomorphisme.

Ceci permet de recoller les X_α en un schéma X et les ξ_α en un morphisme de faisceaux $\xi : X \longrightarrow F$.

S est la limite inductive des $(S_{\alpha\beta} \longrightarrow S_\alpha)$ par les immersions $(S_\alpha \longrightarrow S)$, donc F est la limite du système correspondant par les $(F_\alpha \longrightarrow F)$. De même X est limite inductive du système correspondant par les $(X_\alpha \longrightarrow X)$. Les ξ_α étant des isomorphismes, il en va de même pour leur limite ξ. F est donc représenté par (X, ξ).

Si, de plus, les X_α sont affines sur les S_α, X est affine sur S.

1.4. Soit $p : S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. On forme les produits fibrés S'' et S''', les projections étant numérotées comme en 0.2. Soit F un faisceau sur S. On appelle F', F'' et F''' les restrictions de F à S', S'' et S'''.

On prendra les morphismes déduits des diverses projections par changement de base Ceci donne un diagramme de faisceaux sur S.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "f"] & F' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "f'"] & F'' \arrow[l, shift right, "p'_0"'] \arrow[l, shift left, "p'_1"] \arrow[d, "f''"] & F''' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[d, "f'''"] \\
S & S' \arrow[l] & S'' \arrow[l, shift right, "p_0"'] \arrow[l, shift left, "p_1"] & S''' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2]
\end{tikzcd}$$

Si p est fpqc, p est un épimorphisme de faisceaux. On en tire par 0.1. que p est conoyau de (p_0, p_1) ; les changements de base vont donner aussi : p_0 conoyau de (p_{01}, p_{02}), p' conoyau de (p'_0, p'_1) etc.

1.5. Démonstration du deuxième cas.

Ici S et S' sont des spectres d'anneaux A et A', p provient du morphisme d'anneaux fidèlement plat . F' est représenté par le spectre de la A'-algèbre B'. S'', S''', F'' et F''' se représentent aussi avec des spectres d'anneaux. On obtient ainsi un diagramme d'anneaux.

$$\begin{tikzcd}
 & B' \arrow[r, shift left, "\pi'_0"] \arrow[r, shift right, "\pi'_1"'] & B'' \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & B''' \\
A \arrow[r, "\pi"] & A' \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[r, shift left, "\pi_0"] \arrow[r, shift right] & A'' \arrow[u, "\varphi''"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & A''' \arrow[u, "\varphi'''"']
\end{tikzcd}$$

1

A'' est isomorphe à $A' \otimes_A A'$; π_0 et π_1 sont les flèches déduites des applications $a' \longrightarrow a' \otimes 1$ et $a' \longrightarrow 1 \otimes a'$, etc. Les carrés sont cartésiens et   est un noyau de (π_0, π_1) etc.

Soit un noyau $\pi' : B \longrightarrow B'$ de (π'_0, π'_1). Ceci détermine $\varphi : A \longrightarrow B$ tel que $\pi'\varphi = \varphi'\pi$, et $\mu : A' \otimes B \longrightarrow B'$ par $\mu(a' \otimes b) = \varphi'(a')\, \pi'(b)$.

On a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A' \otimes_A B \arrow[r, "1 \otimes \pi'"] \arrow[d, "\mu"'] & A' \otimes_A B' \arrow[r, shift left, "1 \otimes \pi'_0"] \arrow[r, shift right, "1 \otimes \pi'_1"'] \arrow[d, "\mu'"'] & A' \otimes_A B'' \arrow[d, "\mu''"] \\
B' \arrow[r, "\pi'_0"] & B'' \arrow[r, shift left, "\pi'_{01}"] \arrow[r, shift right, "\pi'_{02}"'] & B'''
\end{tikzcd}$$

$\mu'(a' \otimes b') = \varphi'' \pi_0(a') \cdot \pi'_1(b')$

$\mu''(a' \otimes b'') = \varphi''' \pi_{01} \pi_0(a') \cdot \pi'_{12}(b'')$.

Les lignes du haut et du bas sont exactes : celle du bas naturellement et celle du haut parce que A' est plat sur A.

μ' et μ'' sont des isomorphismes (cf. 0.2., avec la situation duale). On vérifie aisément :

$$\pi'_0 \mu = \mu' (1 \otimes \pi')$$
$$\pi'_{01} \mu' = \mu'' (1 \otimes \pi'_0)$$
$$\pi'_{02} \mu' = \mu'' (1 \otimes \pi'_1).$$

Ceci prouve que μ est un isomorphisme. Le carré $A A' B B'$ est donc cocartésien. π est donc fidèlement plat. Le morphisme de faisceaux qui en résulte est un épimorphisme, donc un conoyau de la paire de projection : $\operatorname{Spec} B' \otimes_B B' \longrightarrow \operatorname{Spec} B$.

Par changement de base dans les anneaux on voit que π'_0 et π'_1 font de B'' une somme amalgamée de B' et B' sur B. B'' s'identifie naturellement à $B' \otimes_B B'$ ce qui montre en repassant aux faisceaux sur S que F et $\operatorname{Spec} B$ sont isomorphes.

§2 DONNEE de RECOLLEMENT.

2.1. Dans tout ce paragraphe, on considère un morphisme de schémas $p : S' \longrightarrow S$ et le diagramme défini en 02.

On veut exprimer la catégorie des schémas sur S en termes de schémas sur S' munis d'une donnée supplémentaire.

2.2. Définition.

Soit $f' : X' \longrightarrow S'$ un S'-schéma et soient

$$\begin{tikzcd} X' & X''_i \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[d, "f''_i"] \\ S' \arrow[from=u, "f'"'] & S'' \arrow[l, "p_i"] \end{tikzcd} \qquad i = 0,\ 1.$$

deux carrés cartésiens. On appelle <u>donnée de recollement sur</u> X' <u>relative à</u> p un S''-isomorphisme :

$$u : X''_1 \longrightarrow X''_0$$

2.3. Remarque

Un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

(autrement dit un S-schéma X dont X' provient par changement de base p) détermine une donnée de recollement sur X' par la condition

$$\pi \pi_0 u = \pi \pi_1$$

ceci par transitivité du produit fibré ; on peut dire aussi, puisque $p\,p_0 = p\,p_1 = q$, que les S''-schémas X''_0 et X''_1 sont deux images inverses de X par q, et que u est l'isomorphisme canonique entre elles.

On appelle u la donnée de recollement naturelle sur X_0.

On verra au § 3 que u vérifie une condition supplémentaire, que l'on exprimera en disant que u est une donnée de descente.

2.4. Définition.

Soient (X', u) et (Y', v) deux S'-schémas munis de donnée de recollement relatives à p. On dit que le S'-morphisme $m : X' \longrightarrow Y'$ est compatible avec les données de recollement u et v si l'on a :

$$v\, m_1 = m_0\, u$$

$$m_i : X''_i \longrightarrow Y''_i$$ est déduit de m par le changement de base p_i.

Les S'-schémas munis d'une donnée de recollement relative à p forment une catégorie notée $\mathrm{Rec}(S'/S)$ dont les morphismes sont ceux que l'on vient de définir.

De plus si X' et Y' proviennent de S-schémas X et Y, alors l'image inverse par p d'un S-morphisme $n : X \longrightarrow Y$ est compatible avec les données de recollement naturelles sur X' et Y'. Ceci définit un foncteur :

$$\begin{aligned} \Delta : \quad Sch/S &\longrightarrow Rec(S'/S) \\ X/S &\longmapsto X x_S S', \ u \end{aligned}$$

2.5. Théorème.

Si p est fpqc, le foncteur Δ est pleinement fidèle.

Ceci traduit le fait que le diagramme

$$Hom_S(X, Y) \longrightarrow Hom_{S'}(X', Y') \rightrightarrows Hom_{S''}(X'', Y'')$$

est axact, ou que le préfaisceau $Hom_T(X_T, Y_T)$ est un faisceau fpqc.

cf exposé 5 § 1.

§ 3. DONNEES de DESCENTE.

3.1. Définition.

Sous les conditions de 2.2., on dit que la donnée de recollement u est effective s'il existe un carré cartésien somme en 2.3. tel que u soit la donnée de recollement naturelle définie par X, c'est-à-dire

$$\P\P_o \, u = \P\P_1 .$$

3.2. Sous les hypothèses du 2.2. considérons les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f'"'] & X''' \arrow[l, "k_i"'] \arrow[d, "f_i'''"] \\ S' & S''' \arrow[l, "q_i"] \end{tikzcd} \qquad i = 0, 1, 2.$$

Grâce aux relations du 0.2. et par transitivité du produit fibré, les images inverses u_{ij} de u par les $p_{ij} : S''' \longrightarrow S''$ forment un triangle de S'''-isomorphismes

$$\begin{tikzcd} & X_1''' \arrow[dl, "u_{01}"'] & \\ X_o''' & & X_2''' \arrow[ul, "u_{12}"'] \arrow[ll, "u_{02}"] \end{tikzcd}$$

Définition.

On dit que la donnée de recollement u est une donnée de descente si on a :

$$u_{02} = u_{01}\, u_{12}$$

3.3. Proposition.

Une donnée de recollement effective est une donnée de descente.

La démonstration se fait en utilisant la transitivité du produit fibré.

3.4. Théorème.

Si p est fpqc et si X' est affine sur S', toute donnée de descente sur X' relative à p est effective.

3.4.1. Lemme.

Avec les notations ci-dessus, si u est une donnée de descente, il existe des morphismes $p'_{01}, p'_{02}, p'_{12} : X'''_2 \rightrightarrows X''_1$ tels que les carrés

$$\begin{tikzcd} X''_1 \arrow[d, "f''_1"'] & X'''_2 \arrow[l, "p'_{ij}"'] \arrow[d, "f'''_2"] \\ S'' & S''' \arrow[l, "p_{ij}"'] \end{tikzcd}$$

soient cartésiens

- si on pose $p'_0 = \pi_o\, u$, $p'_1 = \pi_1$, $q'_o = k_o\, u_{02}$, $q'_1 = k_1\, u_{12}$, $q'_2 = k_2$, on ait :

$$q'_o = p'_o\, p'_{01} = p'_o\, p'_{02}$$

$$q'_1 = p'_o\, p'_{12} = p'_1\, p'_{01}$$

$$q'_2 = p'_1\, p'_{02} = p'_1\, p'_{12} \quad .$$

Preuve.

Prenons $p'_{12} = (k_2, p_{12}\, f'''_2)$.

On a déjà $p'_1\, p'_{12} = \pi_1\, p'_{12} = k_2 = q'_2$.

Si on définit $\overset{o}{p}_{12} : X'''_1 \longrightarrow X''_o$ par $\overset{o}{p}_{12} = (k_1\ ,\ p_{12}\, f'''_1)$ on a

$$u\, p'_{12} = \overset{o}{p}_{12}\, u_{12}$$

donc $p'_o\, p'_{12} = \pi_o\, u\, p'_{12} = \pi_o\, \overset{o}{p}_{12}\, u_{12} = k_1\, u_{12} = q'_1$.

Prenons $p'_{02} = (k_2, p_{02}\, f'''_2)$

On a déjà $p'_1\, p'_{02} = \pi_1\, p'_{02} = k_2 = q'_2$.

Si on définit $\overset{o}{p}_{02} : X'''_0 \longrightarrow X''_0$ par $\overset{o}{p}_{02} = (k_0, p_{02}\, f'''_0)$ on a

$$u\, p'_{02} = \overset{o}{p}_{02}\, u_{02}$$

donc $p'_0\, p'_{02} = \pi_o\, u\, p'_{02} = \pi_o\, \overset{o}{p}_{02}\, u_{02} = k_0\, u_{02} = q'_0$.

Prenons $p'_{01} = (k_1, p_{01}\, f'''_1)\, u_{12}$.

On a déjà $p'_1\, p'_{01} = \pi_1\, p'_{01} = k_1\, u_{12} = q'_1$.

Si on définit $\overset{o}{p}_{01} : X'''_0 \longrightarrow X''_0$ par $\overset{o}{p}_{01} = (k_0, p_{01}\, f'''_0)$ on a

$$u\, p'_{01} = \overset{o}{p}_{01}\, u_{01}\, u_{12}$$

donc $p'_0\, p'_{01} = \pi_o\, u\, p'_{01} = \pi_o\, \overset{o}{p}_{01}\, u_{01}\, u_{12} = k_0\, u_{02} = q'_0$.

3.4.2.

On considère le conoyau $p' : X' \longrightarrow F$ du couple (p'_o, p'_1) dans la catégorie des faisceaux fpqc. Il existe un unique morphisme $f : F \longrightarrow S$, tel que le carré suivant commute.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

<u>Montrons que si</u> u <u>est une donnée de descente relative</u> à p fpqc, <u>ce carré est cartésien</u> . On appelle m le morphisme $(p', f') : X' \longrightarrow F \times_S S'$. Le diagramme déduit de

$$\begin{tikzcd} F & X' \arrow[l, "p'"'] & X''_1 \arrow[l, shift right, "p'_o"'] \arrow[l, shift left, "p'_1"] \end{tikzcd}$$

par le changement de base p est isomorphe à

$$\begin{tikzcd} F \times_S S' & X''_1 \arrow[l, "m\, p'_1"'] & X'''_2 \arrow[l, shift right, "p'_{01}"'] \arrow[l, shift left, "p'_{02}"] \end{tikzcd}$$

comme on peut le voir à l'aide du 0.2. et du lemme précédent. Donc mp'_1 est un conoyau de (p'_{01}, p'_{02}).

D'autre part le changement de base f' appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd} S' & S'' \arrow[l, "p_1"'] & S''' \arrow[l, shift right, "p_{01}"'] \arrow[l, shift left, "p_{02}"] \end{tikzcd}$$

donne

$$X' \xleftarrow{p'_1} X''_1 \underset{p'_{02}}{\overset{p'_{01}}{\leftleftarrows}} X'''_2$$

Donc p'_1 est conoyau de (p'_{01}, p'_{02}) et m est un isomorphisme .

Si X' est affine sur S' et le carré * cartésien, alors F est représentable d'après le théorème 1.1. On voit alors que u est la donnée de descente naturelle (cf. 2.3.) donc n est effective.

§ 4. DESCENTE des MODULES QUASI COHERENTS.

On déduit généralement les résultats des § 2. et § 3. du présent § 4.

Nous procédons en sens inverse pour illustrer la souplesse et la commodité du langage de faisceaux utilisé au § 1.

Le lecteur qui désire une démonstration directe du § 4. pourra se reporter à la littérature : Grothendieck S G A 1 exposé VIII.

4.1. Donnée de recollement.

Soit $p : S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. On cherche à reconnaître parmi les $O_{S'}$-modules quasi cohérents ceux qui sont isomorphe à l'image réciproque d'un O_S-module quasi cohérent.

Soit M un O_S-module quadi cohérent, $p^* M$ son image réciproque par p.

L'égalité : $q = p\, p_0 = p\, p_1$ fournit deux isomorphismes naturels de $O_{S''}$-modules

$$p_1^*\, p^*\, M \xleftarrow{\sim} q^*\, M \xrightarrow{\sim} p_1^*\, p^*\, M$$

Ceci détermine un isomorphisme de $O_{S''}$-modules $m : p_1^*\, p^*\, M \xrightarrow{\sim} p_0^*\, p^*\, M$.

Soit un isomorphisme de $O_{S'}$-modules $g : p^* M \longrightarrow N$

On obtient alors un isomorphisme de $O_{S''}$-modules $u : p_1^* N \longrightarrow p_0^* N$ tel que

$$\begin{tikzcd}
 & p_1^*\, p^*\, M \arrow[r, "p_1^*\, g"'] \arrow[d, "\wr"', "m"] & p_1^*\, N \arrow[d, "u", "\wr"'] \\
q^*\, M \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \\
 & p_0^*\, p^*\, M \arrow[r, "p_0^*\, g"'] & p_0^*
\end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif.

Définitions

Une donnée de recollement du $O_{S'}$-module H relative à p est un isomorphisme de $O_{S''}$-modules $v : p_1^* H \longrightarrow p_o^* H$.

Avec les notations ci-dessus, m est la donnée de recollement naturelle du module $p^* M$, u est la donnée de recollement sur N induite par g.

Une donnée de recollement v sur H est dite effective s'il existe un O_S-module K et un isomorphisme $h : p^* K \longrightarrow H$ tels que v soit la donnée de recollement sur H induite par h.

4.2. Donnée de descente.

Avec les notations ci-dessus, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
q_1^* \, p^* M \arrow[rr, "m_{01}"] \arrow[dddd, "\wr"'] & & q_o^* \, p^* M \arrow[dddd, "\wr"] \\
& r^* M \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dd, "\wr"] & \\
& & \\
& p_{01}^* \, q^* M \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
p_{01}^* \, p_1^* \, p^* M \arrow[rr, "\sim", "p_{01}^* \, m"'] & & p_{01}^* \, p_0^* \, p^* M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
q_1^* N \arrow[r, "u_{01}"] \arrow[d, "\wr"'] & q_o^* N \arrow[d, "\wr"] \\
p_{01}^* \, p_1^* N \arrow[r, "\sim", "p_{01}^* \, u"'] & p_{01}^* \, p_0^* N
\end{tikzcd}$$

Le triangle intérieur est commutatif par le choix de m.

Les trapèzes latéraux sont commutatifs.

On choisit m_{01} de façon que le grand carré commute, aussi le triangle supérieur est-il commutatif ?

On obtient de même les trangles commutatifs relatifs à p_{02}^* et p_{12}^*.

Dans le diagramme suivant, les petits triangles sont commutatifs, et les flèches qui interviennent sont les isomorphismes ; il s'ensuit que le grand

$$\begin{tikzcd}
q_1^* \, p^* M \arrow[rr, "m_{01}"] & & q_o^* \, p^* M \\
& r^* M \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] & \\
& q_2^* \, p^* M \arrow[uul, "m_{12}"] \arrow[uur, "m_{02}"'] &
\end{tikzcd}$$

triangle est commutatif. Cette commutativité "se transporte" par l'isomorphisme g, ce qui donne une condition nécessaire d'effectivité :

$$u_{01} \; u_{12} = u_{02}$$

Définition.

Une donnée de recollement est appelée donnée de descente de descente si elle vérifie la relation ci-dessus.

On vient de montrer que toute donnée de recollement effective est une donnée de descente.

4.3. Rappel : algèbre symétrique et fibré vectoriel.

Si M est un O_S-module quasi cohérent, on sait lui associer une algèbre sur O_S quasi cohérente et graduée $O_S[M] = \sum (O_S[M])_n$, et un isomorphisme de O_S-modules $\mu(M) : M \longrightarrow (O_S[M])_1$ qui a les propriétés universelles :

Si A est une O_S-algèbre graduée et μ' un morphisme de O_S-modules de M vers A_1 qui est le module des termes homogènes de degré 1 de A, alors il existe une factorisation unique par un morphisme de O_S-algèbres graduées $a : O_S[M] \longrightarrow A$ avec $\mu' = a\,\mu(M)$.

Si A est une O_S-algèbre et μ' un morphisme de O_S-modules de M vers A, il existe une factorisation unique par un morphisme de O_S-algèbres $a : O_S[M] \longrightarrow A$ avec $\mu' = a\,\mu(M)$.

Soit $f : V(M) \longrightarrow S$ le spectre de la O_S-algèbre $O_S[M]$ (son existence est une conséquence du 1.3.).

Un morphisme de O_S-modules $u : M \longrightarrow N$ donne un morphisme d'algèbres graduées $\hat{u} : O_S[M] \longrightarrow O_S[N]$, défini par $\mu(N)\,u = \hat{u}\,\mu(M)$, donc un morphisme de S-schémas $V(u) : V(N) \longrightarrow V(M)$. On vérifie facilement que V est un foncteur.

Le morphisme d'adjonction $M \longrightarrow p_* p^* M$ donne un morphisme $\bar{p}$ de schémas du spectre de $p^* M$ sur S' dans le spectre de M sur S. On a alors un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V(M) & \xleftarrow{\ \bar{p}\ } & V(p^* M) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[\ p\ ]{} & S' \end{array}$$

4.4. Théorème.

Soit un morphisme de schémas $p : S' \longrightarrow S$. Si p est fpqc, toute donnée de descente sur un $O_{S'}$-module relative à p est effective.

Soit N un $O_{S'}$-module muni de la donnée de descente u. Notons Y', Y''_i, Y'''_i les schémas $V(N)$, $V(p_i^* N)$, $V(q_i^* N)$ et f', f''_i, f'''_i leurs projections sur S', S'', S''' respectivement.

On désigne par p'_{ij} le morphisme de schémas $Y'''_j \longrightarrow Y''_1$ déduit de $\bar{p}_{ij}$ par l'isomorphisme naturel $q^*_j N \xrightarrow{\sim} p^*_{ij}\ p^*_1 N$.

De même on désigne par p^o_{ij} le morphisme de schémas $Y'''_i \longrightarrow Y''_0$ déduit de $\bar{p}_{ij}$ par l'isomorphisme naturel $q^*_i N \xrightarrow{\sim} p^*_{ij}\ p^*_0 N$.

On note $U = V(u)^{-1}$ et $U_{ij} = V(u_{ij})^{-1}$.

Après les quelques vérifiactions qui s'imposent, à savoir :

$$\bar{p}_1\ p'_{ij} = \bar{q}_k$$

$$\bar{p}_o\ p^o_{ij} = \bar{q}_i$$

$$U\ p'_{ij} = p^o_{ij}\ U_{ij}$$

Compatibilités avec les projections sur le diagramme des S', S'' et S'''.

On obtient une donnée de descente sur le schéma Y' affine sur S'.

Si p est fpqc, on obtient une donnée effective, donc un schéma Y sur S s'insérant dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l, "\tilde{p}"'] \arrow[d, "f'"] & Y''_o \arrow[l, "\bar{p}_o"'] \\
S & S' \arrow[l, "p"] & Y''_1 \arrow[ul, "\bar{p}_1"]
\end{tikzcd}$$

Le carré est cartésien et $\tilde{p}$ est le conoyau du couple $(\bar{p}_o\ U, \bar{p}_1)$ et du couple $(\bar{p}_o, \bar{p}_1\ V(u))$ et le morphisme f est affine.

Par adjonction, la O_S-algèbre quasi cohérente $f_*\ O_Y$ apparaît comme le noyau de la double flèche $(p_*\ f'_*\ O_{Y'} \rightrightarrows q_*\ f''_{1*}\ O_{Y''})$ déduite de $(\bar{p}_1, \bar{p}_0\ U)$.

On obtient une graduation sur $f_*\ O_Y$ par intersection avec celle de $p_*\ f'_*\ O_{Y'}$. Ceci fournit un O_S-module quasi cohérent $M = (f_*\ O_Y)_1$, qui est une limite projective du système

$$\begin{tikzcd}
 & p_*\ p_{o*}\ p^*_0\ N \\
p_*\ N = (p_*\ f'_*\ O_{Y'})_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & p_*\ p_{1*}\ p^*_1\ N \arrow[uu, "q_*\ u"']
\end{tikzcd}$$

Nous avons de la sorte obtenu un O_S-module M avec un morphisme de $O_{S'}$-modules $\longrightarrow p_*\ f'_*\ O_{Y'} = p_*\ N$; ce qui procure par adjonction un morphisme de $O_{S'}$-modules : $p^* M \longrightarrow N$. On a évidemment compatibilité entre la donnée de recollement naturelle ur $p^* M$ et la donnée u. Reste à voir que t est un isomorphisme.

Pour celà, on sait que le carré est cartésien. Ce qui donne $p_* f^!_* O$ comme produit cartésien de $f_* O_Y$ par $p_* O_{S'}$ sur O_S. En repassant aux composantes de degré 1, on voit apparaître N comme isomorphe à $M \otimes_{O_S} O_{S'}$ donc M isomorphe par t à $p^* M$.

§ 5. EXEMPLES.

5.1. Soient k un corps et E un espace vectoriel de dimension finie. On a un k-morphisme de schémas $p : S' \longrightarrow S$ où $S = P(E)$ et $S' = V(E) - 0$. Avec une base (X_i) de E, on peut le décrire localement à l'aide du morphisme d'algèbre (au dessus de l'ouvert $P(E)_{X_i}$)

$$k[x_{1,i}, \ldots, x_{i-1,i}, x_{i+1,i}, \ldots, x_{n,i}] \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_n, X_i^{-1}]$$

$$x_{j,i} \longmapsto X_j X_i^{-1}$$

Ce morphisme est affine, donc quasi compact, et libre, donc fidèlement plat.

Sur les fibres de p, le groupe multiplicatif μ_k opère par homothéties. De plus le morphisme

$$\mu_k \times S' \longrightarrow S' \times_S S'$$

$$(m, s) \longmapsto (ms, s)$$

est un isomorphisme, ce qui fait apparaître $\mu_k \times_k S'$ comme le produit fibré $S' \times_S S'$. On pourra alors donner un produit fibré triple de S' sur S, qui est $\mu_k \times \mu_k \times S'$ avec les trois flèches :

$$p_{01} : (m, n, s) \longmapsto (m, ns)$$

$$p_{02} : (m, n, s) \longmapsto (mn, s)$$

$$p_{12} : (m, n, s) \longmapsto (n, s)$$

Sous la forme $\mu_k \times S'$ du produit fibré, une donnée de recollement sur un S'-schéma X' se présente comme une flèche $\mu_k \times X' \longrightarrow X'$ compatible avec l'action de μ_k sur S'. Ce sera une donnée de descente si de plus cette loi fait opérer le groupe μ_k sur X'.

On a donc ce résultat que, si X' est un schéma affine sur $V(E) - 0$, sur lequel μ_k opère de façon compatible avec les projections et les homothéties de $V(E) - 0$, alors X' "se descend" en un schéma affine X sur $P(E)$.

On voit en passant que X est le quotient de X' par l'action de μ_k.

5.2. Soit k' une extension galoisienne finie de k, de groupe G. G opère à gauche sur k' par automorphismes sur k. Il opère donc à droite sur $S' = \operatorname{Spec} k'$ par k-isomorphismes. Si X est un schéma sur $S = \operatorname{Spec} k$, le groupe G opère sur $X' = X \times_S S'$ par X-isomorphismes, et X est le quotient de X' par l'action de G.

Voir Munford. Introduction to Algebraic Geometry. Ch. 2 § 4.

Le produit fibré $S' \times_S S'$ peut se mettre sous la forme $S' \times G$ avec les projections

$$p_0 : (s, g) \longmapsto sg$$

$$p_1 : (s, g) \longmapsto s$$

Comme précédemment, une donnée de descente se décrit comme une opération du groupe G à droite sur X' compatible avec l'action de G sur S.

Si le schéma X' est affine sur S' et subit une opération à droite par G compatible avec les projections, il se descend en un schéma X affine sur S, qui est le quotient de X' par l'opération de G.

5.3. Si on prend $k = R$ et $k' = C$, la description se réduit à une conjugaison u qui doit seulement être compatible à celle de C (pour le recollement) et involutive (descente).

Par exemple, si on prend $X' = \operatorname{Spec} C[T] / T^2 + 1$, et $u(T) = T$ on obtient $X = \operatorname{Spec} R[T] / T^2 + 1$; en revanche, si $u(T) = - T$, on trouve $X = \operatorname{Spec}[R] W / W^2 - 1$, avec $T = iW$.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE-ALGEBRIQUE D'ORSAY

Année 1969-1970

Exposé VII : Pro-représentables
par

0 - INTRODUCTION

1° - Soit $F : (Sch_{/S})^{\circ} \longrightarrow Ens$ un foncteur contravariant sur la catégorie des S-schémas, à valeurs dans la catégorie des ensembles. On voudrait connaître des conditions nécessaires pour que F soit représentable et éventuellement, des renseignements sur le schéma X susceptible de le représenter.

Nous appellerons foncteur exact à gauche (resp. à droite) sur une catégorie $\mathcal{C}$ tout foncteur qui commute aux limites projectives finies (resp. limites inductives finies) ou, ce qui revient au même, tel que, toutes les fois que $X \times Y$ existe dans $\mathcal{C}$, $F(X \times Y) = F(X) \times F(Y)$ et si $N \xrightarrow{u} X$ est un noyau du couple de flèches $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, $F(N) \xrightarrow{F(u)} F(X)$ est un noyau du couple $F(X) \underset{F(g)}{\overset{F(f)}{\rightrightarrows}} F(Y)$ (resp. $F(X \amalg Y) = F(X) \amalg F(Y)$, et F commute au conoyau).

Un foncteur contravariant sur $\mathcal{C}$ sera dit exact à gauche, s'il l'est sur $\mathcal{C}^{\circ}$ comme foncteur (covariant)

Si F est un foncteur représentable de $(Sch_{/S})^{\circ}$ dans Ens, représenté par X (i.e. $\forall T \in (Sch_{/S})$, $F(T) \simeq Hom_S(T,X)$) alors F est exact à gauche

Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $(Sch_{/S})$ telle que les limites inductives finies dans $\mathcal{C}'$, si elles existent, soient les mêmes que dans $(Sch_{/S})$, alors le foncteur $F_{|\mathcal{C}'^{\circ}} : \mathcal{C}'^{\circ} \to Ens$ est exact à gauche.

Dans $(Sch/_S)$ les sommes directes existent et il sera en général facile de vérifier que F commute aux produits dans $(Sch_{/S})^\circ$. Mais les conoyaux dans $(Sch_{/S})$ n'existent pas nécessairement. Les conoyaux, qui existent toujours dans la catégorie des S-chémas affines, ne restent pas en général des conoyaux dans la catégorie $(Sch_{/S})$.

Voici néanmoins deux cas où les conoyaux existent :

<u>1er cas</u>. Soit T un S-schéma, $T' \to T$ un S-morphisme couvrant pour la topologie f.p.q.c., $T'' = T' \times_T T'$. Alors on a vu que $T' \to T$ est un conoyau de la double flèche canonique $T'' \rightrightarrows T'$. La Condition d'exactitude à gauche dans ce cas, redonne simplement le fait que F est un faisceau pour la topologie f.p.q.c.

<u>2ème cas</u>. Soit $s \in S$, posons $\mathcal{O}_{S,s} = \Lambda$, et considérons la catégorie des spectres de Λ-algèbres de longueur finie (équivalente à $\mathscr{C}_\Lambda^\circ$, où $\mathscr{C}_\Lambda$ est la catégorie des Λ-algèbres de longueur finie). C'estune sous-catégorie pleine de $Sch/_S$ dans laquelle les limites inductives finies existent (trivial) et sont conservées dans $Sch/_S$. En effet, $\mathrm{Spec}\,A \coprod \mathrm{Spec}\,B = \mathrm{Spec}(A \times B)$ est le coproduit de Spec A et Spec B aussi bien dans $\mathscr{C}_\Lambda^\circ$ que dans $(Sch/_S)$. De plus, si l'on a un couple de flèches $\mathrm{Spec}\,B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spec}\,A$, il admet dans $\mathscr{C}_\Lambda^\circ$ un conoyau Spec K (où $K = \ker A \rightrightarrows B$) qui est aussi conoyau dans $(Sch/_S)$. En effet :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,K \arrow[dr] & \mathrm{Spec}\,A \arrow[l] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\varphi_\Lambda"] \arrow[rrr, bend left, "\varphi"] & \mathrm{Spec}\,B \arrow[dl] & Y_\Lambda \arrow[r, hook] \arrow[dll] & Y \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Spec}\,\Lambda \arrow[rr, hook] & & S &
\end{tikzcd}$$

Si φ est un morphisme de Spec A dans le S-schéma Y , tel que $\varphi o f = \varphi o g$, φ se factorise par $Y_\Lambda = Y \times_S \mathrm{Spec}(\Lambda)$, et $\varphi_\Lambda o f = \varphi_\Lambda o g$, car $Y_\Lambda \longrightarrow Y$ est un monomorphisme. D'autre part, A étant de longueur finie sur Λ , φ_Λ se factorise par spec $\prod O_{Y_\Lambda, y_i}$ (produit fini) ce qui nous ramène au cas affine, d'où la conclusion.

En outre, si F est représentable par X sur $(\mathrm{Sch}/_S)$, pour tout $A \in \mathcal{C}_\Lambda$, en notant $F_\Lambda(A) = F(\mathrm{Spec}\ A)$, on a :

$$F_\Lambda(A) = F(\mathrm{Spec}\ A) = \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}\ A, X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\ \Lambda}(\mathrm{Spec}\ A, X_\Lambda)$$

donc $F_\Lambda(A) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\prod_x \varphi_{X_\Lambda, x}, A)$ où x parcourt l'ensemble des points de X_Λ à extensions résiduelles finies. On a alors un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\prod_x O_{X_\Lambda, x}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda\ \text{continus}}(\widehat{\prod O_{X_\Lambda, x}}, A)$$

où $\widehat{\prod_x O_{X_\Lambda, x}}$ est le complété de $\prod_x O_{X_\Lambda, x}$ pour la topologie dans laquelle les idéaux ouverts $\mathcal{J}$ sont ceux tels que $\prod_x O_{X_\Lambda, x}/\mathcal{J}$ sont de longueur finie sur Λ (idéaux de colongueur finie). Donc

$$F_\Lambda(A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-cont.}}(\widehat{\prod_x O_{X_\Lambda, x}}, A)$$

La connaissance du foncteur h_X sur C_Λ équivaut donc à la connaissance de l'algèbre topologique complète $\widehat{\prod_x O_{X_\Lambda, x}}$. Elle est canoniquement splittée en le produit $\prod_x \widehat{O_{X_\Lambda, x}}$ des complétés des anneaux locaux de X aux joints de X_o à extensions résiduelles finies (complétés pour la topologie des idéaux de colongueur finie). En particulier si X est localement de type fini sur S localement noethérien, on obtient le produit des complétés des anneaux locaux aux points fermés de X_s, (complétés pour la topologie définie par leur idéal maximal).

Nous allons voir que réciproquement, un foncteur F sur C_Λ , exact à gauche, est décrit par une algèbre topologique du type précédent.

Bref si F $(\mathrm{Sch}/_S)^o \to \mathrm{Ens}$ est localement de présentation finie sur S et est exact à gauche sur C_Λ on peut dire intuitivement, que l'on connait déjà les complétés des anneaux locaux de l'hypothétique schéma X qui représente F , aux points fermés de X_s .

2. - Le critère de Gabriel

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On lui associe la catégorie Pro-C dont les objets sont des systèmes projectifs filtrants $\underline{X} = (X_i)_{i\in I}$ d'objets de C, où l'on pose, Si $\underline{X} = (X_i)_{i\in I}$ et $Y = (Y_j)_{j\in J}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro-C}}(\underline{X},\underline{Y}) = \varprojlim_{j\in J} \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$$

Les objets de Pro $\mathcal{C}$ sont dits pro-objets de $\mathcal{C}$. Le foncteur $i : \mathcal{C} \to \mathrm{Pro}\,\mathcal{C}$ qui à X associe le système projectif $\{X\}$ est pleinement fidèle et exact à gauche.

Un foncteur F sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans Ens est dit pro-représentable s'il existe un isomorphisme $\xi : \varinjlim \mathrm{Hom}(X_i, \cdot) \longrightarrow F$ où $\underline{X} = (X_i)_{i\in I}$ est un objet de Pro $\mathcal{C}$. Si $X\in\mathcal{C}$ et si l'on pose $h_X = \mathrm{Hom}(X, \cdot)$
$\mathrm{Hom}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$. On peut donc considérer ξ comme élément de $\varprojlim_{i\in I} F(X_i)$.

On dit que le couple $(\underline{X}, \xi)$ pro-représente F.

X est dit pro-objet strict s'il est isomorphe à un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ où tous les morphismes $X_i \to X_j$ sont des épimorphismes.

Si $(\underline{X}, \xi)$ représente F avec $\underline{X}$ pro-objet strict, F est dit strictement pro-représentable

Si $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, $X\in\mathcal{C}$, $\xi\in F(X)$ on dit que le couple (X,ξ) est minimal si pour tout monomorphisme $u : X' \to X$ noyau d'un couple $X \rightrightarrows X''$, l'existence d'un $\xi'\in F(X')$ tel que $F(u)\xi' = \xi$ entraine que u est un isomorphisme.

On dit qu'un couple (X,ξ) domine un couple (X'', ξ'') s'il existe un morphisme $v : X \to X''$ tel que $\xi'' = F(v).\xi$

Proposition 0.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des limites projectives finies et $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) F est strictement pro-représentable

ii) F est exact à gauche et tout couple (X,ξ) $(\xi \in F(X))$ est dominé par un couple minimal.

Dém : (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Si F est pro-représentable, F est exact à gauche. Soit F représenté par $(\underline{X}, \xi)$, où $\underline{X}$ est un pro-objet strict de $\mathcal{C}$ et $\xi = (\xi_i) \in \varprojlim F(X_i)$: $h_{X_i} \longrightarrow F$ est un monomorphisme (car $\underline{X}$ est un pro-objet strict)

Soit $X' \xrightarrow{u} X_i \rightrightarrows X''$ une suite exacte pour laquelle il existe $\xi' \in F(X')$ tel que $\xi_i = F(u)\,\xi'$. F étant un foncteur, les deux images de ξ_i par $F(X_i) \rightrightarrows F(X'')$ coïncident, donc les deux morphismes $h_{X''} \rightrightarrows F$ coïncident et se factorisent à travers $h_{X_i} \longrightarrow F$ qui est un monomorphisme, donc les deux morphismes sont égaux, donc u est un isomorphisme et (X_i,ξ_i) est un couple minimal. Soit $\xi \in F(X)$ déterminé par $\eta : X_i \to X$, on vérifie que $\xi = F(\eta)\xi_i$ donc que (X,ξ) est dominé par (X_i,ξ_i).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit I l'ensemble de tous les couples minimaux. Pour tout $i \in I$, on note X_i le premier élément d'un couple i. On dit que $i \leqslant j$ s'il existe un morphisme $\varphi_{ji} : X_j \to X_i$ tel que $F(\varphi_{ji})\,\xi_j = \xi_i$. Un tel morphisme est unique (car (X_i,ξ_i) est minimal) donc $\underline{X} = \{X_i,\varphi_{ji}\}_{i\in I}$ est un pro-objet strict de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{G}$ le ~~foncteur~~ pro/ représenté par $\underline{X}$, alors $\mathcal{G} \simeq F$. En effet les $\xi_i : h_{X_i} \to F$

C'est un épimorphisme car si $\xi \in F(X)$, il existe un couple minimal (X_i,ξ_i) dominant (X,ξ) donc ξ est l'image de $X \to X_i$ par le morphisme $h_{X_i}(X) \to \mathcal{G}(X) \to F(X)$ donc $\mathcal{G}(X) \to F(X)$ est surjectif. c.q.f.d.

Corollaire. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec des limites projectives finies où tout objet est artinien, les foncteurs strictement pro-représentables sont des foncteurs exacts à gauche de $\mathcal{C}$ dans Ens. (Ce corollaire s'applique au cas de $\mathcal{C}_\Lambda$ dont tout objet est artinien).

3. - Soit F un foncteur exact à gauche sur $C_{\underline{\Lambda}}$, pro-représenté par l'algèbre Topologique R. Alors R se décompose canoniquement en produit de ses somposants locaux, $\underline{R_i}$, $\underline{i}\in I$. Chacun de ces $R_{\underline{i}}$, correspond à un sous-foncteur exact à gauche F_i de F. On souhaiterait traiter séparément chacun des foncteurs F_i. Le foncteur F_i est facile à décrire dans le cas où l'extension résiduelle de R_i, relativement à Λ, est triviale.

En effet, soit k le corps résiduel de Λ.

Le morphisme canonique $R_i \to k$ définit un point $\xi \in F_\Lambda(k)$. Pour toute $A \in C_{\underline{\Lambda}}$, locale à extension résiduelle triviale, $F_i(A)$

est alors la partie $F_\xi(A)$ de $F(A)$ dont l'image dans $F(k)$ est égale à ξ.

On définit ainsi un sous-foncteur F_ξ de F, sur la sous-catégorie de C_Λ formés des algèbres locales à extension résiduelle triviale, qui est pro-représenté par R_i.

ESPACE TANGENT

I. - Espace tangent à un k-Schéma en un point rationel

Soit k un corps A un k-algèbre $A = k[X_i]_{i\in J}/I$

$X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $x \in X$ tel que $k \simeq k(x)$ (i.e. x rationnel)

On supposera que x est le point origine de l'espace k^J, ce qui est loisible moyennant un changement d'origine de cet espace.

Si $F \in I$ on notera $F^{(1)}$ la composante homogène de degré 1 de F

On a : $\forall F\in I \quad F(0) = 0$ et $F^{(1)} = \sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial x_i}(0).X_i$

Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i\in J} \in k^J$ (espace vectoriel). On dira que α est tangent en x

à X relativement à k si et seulement si "la droite D de direction α", passant par (0), a avec le schéma X une intersection d'ordre au moins égal à 2.

$$\forall F\in I \quad F(td) = tF^{(1)}(\alpha) + t^2\,\varphi(t,\alpha)$$

doit donc avoir $\forall F\in I$: $F^{(1)}(\alpha) = 0$ i.e. $\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i}(0).\alpha_i = 0$

Il apparait clairement que l'ensemble des vecteurs tangents est un k-espace vectoriel.

Déf. : Soit $X = \operatorname{Spec} A$ comme ci-dessus. Soit $x \in X$ rationnel sur k

On appellera espace tangent en x à X relativement à k et on notera $T_{X/k}(x)$ l'espace vectoriel défini ci-dessus.

Prop.1 : Soient X, x, comme ci-dessus. Soit $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x $\mathfrak{M}_x$ son idéal maximal. Alors :

$$T_{X/k}(x) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x))$$

$$\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k\left(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k(x)\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k\text{-alg}}\left(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)[T]/(T^2)\right)$$

Dem : 1) $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x},k}$: module des k différentielles de $\mathcal{O}_{X,x}$, isomorphe à $\left(\bigoplus_{i\in J} \mathcal{O}_{X,x} \cdot dX_i\right) / \left(\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i\right)_{F\in I}$ Si on munit $k(x)$ de sa structure de A-module au moyen de $A \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$ on a alors :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k(x))\ ;\quad \Omega_{A/k} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in J} A\,dX_i \Big/ \left(\sum_{i\in J} \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i\right)_{F\in I}$$

alors la définition d'un vecteur tangent entraîne que : $T_{X/k}(x) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k(x))$

2) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x))$ par définition de $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$

$$\operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k\text{-alg}}\left(\mathcal{O}_{X,x}, k(x)[T]/(T^2)\right)$$

par : $D \mapsto f \qquad f(z) = \bar{z} + D(z).T$

avec $z \in \mathcal{O}_{X,x} \qquad \bar{z}$ = classe de z mod $\mathfrak{M}_x$

3) $\mathrm{Der}_k(O_{X,x}, k(x)) \to \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k(x))$ est définie par :

si D est une dérivation : $D(m_x^2) = o$ d'où une application linéaire $f : m_x/m_x^2 \to k(x)$

Réciproquement :

Soit $P : O_{X,x} \to k(x)$ l'application canonique. Soit $z \in O_{X,x}$ alors

$z - P(z) \in m_x$ (on considère $P(z)$ comme élément de k, donc de $O_{X,x}$)

si f est une application linéaire : $m_x/m_x^2 \to k(x)$ on définira D par :

$D(z) = f((z-P(z)) \bmod m_x^2)$

Remarques : 1) Si A est une k-algèbre de type fini $T_{X/k}(x)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

2) On voit que $T_{X/k}(x)$ ne dépend que de l'anneau local de X en x, ce qui conduit à poser :

Déf : Soit X un k-schéma ; x un point rationnel de X. On appelle espace tangent en x à X relativement à k l'espace vectoriel

$$T_{X/k}(x) \cong \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k(x))$$

Si X est localement de type fini sur k, $T_{X/k}(x)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

II. - ESPACE TANGENT A UN k-FONCTEUR.

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des k-algèbres locales finies de la forme $k[V] = k \oplus V$ où V est un k-espace vectoriel de type fini, considéré comme un idéal de carré nul.

Soit $F : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$, un foncteur. Alors la catégorie $\mathcal{E}$ possède des produits finis

$k[V \oplus W] \cong k[V] \times_k k[W]$

Soit G le foncteur qui a tout k-espace vectoriel de type fini associe $G(V) = F(k[V])$. Pour tout $\xi \in G(o) = F(k)$ on définira un foncteur G_ξ de la façon suivante : Soit $V \to o$ l'application canonique, d'où : $k[V] \xrightarrow{P} k$

Alors : $G_\xi(V) = F(P)^{-1}(\xi)$.

Soit (E) la condition suivante :

$\forall\ \xi \in F(k)$ et $\forall$ V , W : espaces vectoriels de dimension finie , l'application canonique :

$$G_\xi(V \oplus W) \to G_\xi(V) \times G_\xi(W) \text{ est bijective.}$$

Soit ε le k-espace vectoriel k.

Prop 2 : Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, Soit GrAb la catégorie des groupes abéliens ; Soit $\mathcal{V}^\circ$ la catégorie des k-espaces vectoriels.

1) Tout foncteur additif $G : \mathcal{V} \to$ GrAb se factorise en : $\mathcal{V} \to \mathcal{V}^\circ \hookrightarrow$ GrAb

2) Tout foncteur additif $G : \mathcal{V} \to$ GrAb vérifie : $G(0) = 0$ et

$\forall\ V, W \in \mathcal{V}$ on a : $G(V \oplus W) \simeq G(V) \times G(W)$

Sous ces conditions la structure de groupe abélien de $G(V)$ est la structure déduite de l'isomorphisme ci-dessus au moyen de l'application canonique :

$G(V) \times G(V) \simeq G(V \oplus V) \xrightarrow{G(\sigma)} G(V)$ où $\sigma : V \oplus V \to V$ est l'addition dans V

3) Soit F un foncteur $\mathcal{E} \to$ Ens vérifiant (E)

Alors pour tout $\xi \in F(k)$, G_ξ est un foncteur en espaces vectoriels, l'addition dans $G_\xi(V)$ est celle décrite dans 2). Alors G_ξ est additif et il existe un homomorphisme canonique et fonctoriel en V : $G_\xi(\varepsilon) \otimes_k V \to G_\xi(V)$ qui est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> :

1) Provient de la foncterialité et du fait que la multiplication par un scalaire est k-linéaire.

2) Si G est un foncteur en groupe abélien et si G est additif (i.e. si f,g sont 2 homomorphismes de V dans W , alors $G(f+g) = G(f) + G(g)$), alors $G(o) = o$ provient de ce que l'identité de $G(o)$ est égale à l'application nulle. L'isomorphisme se déduit alors de l'existence de sections et retractions pour la suite :

$$0 = G(0) \to G(V) \to G(V \oplus W) \to G(W) \to G(0) = 0$$

Il est clair que l'homomorphisme : $G(V) \times G(V) \simeq G(V \oplus V) \to G(V)$ vérifie les propriétés d'une addition dans $G(V)$. Comme c'est un homomorphisme pour la structure de Groupe abélien, on en déduit, par un argument du genre (Schémas en groupes, Fasc 1, II, Lemme 3.10 à la Prop 3.9) que c'est l'application définissant la structure de groupe de $G(V)$.

3) Soit F vérifiant (E) alors l'isomorphisme en question permet de définir une application $G_\xi(V) \times G_\xi(V) \simeq G_\xi(V \oplus V) \to G_\xi(V)$ qui vérifie les propriétés d'une addition, si $f : V \to W$ est un homomorphisme, $G_\xi(f)$ est un homomorphisme, la propriété pour une loi de composition (resp pour une application) d'être une loi de groupe (resp un homomorphisme) se traduisant à l'aide de diagrammes commutatifs où interviennent des applications entre produits d'objets de la catégorie.

L'additivité de G_ξ : si $f, g \leftarrow \mathrm{Hom}_k(V,W)$ $f+g = V \xrightarrow{(f,g)} W \oplus W \to W$ où le 2è morphisme est l'addition de W, d'où le résultat d'après la définition de l'addition de $G(V)$.

On a d'ailleurs : $V \simeq \mathrm{Hom}_k(\varepsilon, V)$ d'où un homomorphisme fonctoriel en V : $G_\xi(\varepsilon) \otimes_k V \to G_\xi(V)$. Les 2 membres commutent aux sommes directes finies et on a un isomorphisme si $V = \varepsilon$, d'où le résultat.

Def : Soit $F : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur ; Soit $\xi \in F(k)$.

Alors on appelle espace tangent en F à ξ l'ensemble $G_\xi(\varepsilon)$. Si F vérifie (E) c'est un espace vectoriel d'après (Prop 2.). On le note $T_{F/k}(\xi)$.

<u>Remarque</u> : Soit S un schéma X un S-schéma, $s \in S$, $O_{S,s}$ l'anneau local de S en s, k le corps résiduel de $O_{S,s}$. Alors X définit un foncteur de $\mathcal{E}$ dans Ens, à savoir : $F(k[V]) \times \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}\ k[V], X)$. Alors tout $\xi \in F(k)$ correspond biunivoquement à un point x de X rationnel sur S au-dessus de s ; La Prop 1 de I montre alors que l'espace tangent en x de $X \otimes_S k(s)$ est isomorphe à $G_\xi(\varepsilon)$, le foncteur F vérifiant alors (E).

$G(V) = F(k[V])$ [illegible]

suivante : Soit [illegible] $= 0$

Prop 3 : Soit F un foncteur $\mathcal{E} \to$ Ens, vérifiant (E). Alors $\forall\, \xi \in F(k)$ le foncteur $G_\xi : \mathcal{V} \to$ Ens (qui est alors un foncteur en k-espace vectoriel) est pro-représentable.

En outre : G_ξ représentable $\Longleftrightarrow$ $G_\xi(\varepsilon)$ est un k-module de type fini alors G_ξ est représentable par le dual $G_\xi(\varepsilon)$

Dem : Soit $G(\varepsilon) = \varinjlim_{i \in I} W_i$ limite inductive filtrante de sous-module de type fini.

Soit $V \in \mathcal{V}$; on a : $(\varinjlim_{i} W_i) \otimes_k V \simeq G_\xi(V)$ c'est-à-dire :

$\varinjlim_{i} (W_i \otimes_k V) \simeq G_\xi(V)$ ou bien : $\varinjlim_{i \in I} (\mathrm{Hom}_k(W_i^\vee, V)) \simeq G_\xi(V)$

Autrement dit, le système projectif $(W_i^\vee)_{i \in I}$ pro-représente G_ξ.

Montrons : si $G_\xi(\varepsilon)$ est un module de type fini, le système inductif (W_i) est stationnaire, il existe i tel que $W_i = G_\xi(\varepsilon)$ alors $W_i^\vee = G_\xi(\varepsilon)^\vee$ représente G_ξ.

Si G_ξ est représentable par un k-module de type fini W, on a :

$$G_\xi(\varepsilon) = \mathrm{Hom}_k(W, \varepsilon) \simeq W^\vee \Longleftrightarrow W \simeq G_\xi(\varepsilon)^\vee .$$

Le système projectif $(W_i^\vee)_{i \in I}$ pro-représente G_ξ. On aura donc :

$G_\xi(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont.}}(\varprojlim_{i \in I} W_i^\vee, V)$ $\quad \varprojlim W_i^\vee$ étant muni de la topologie limite projective des topologies discrètes. Alors ce module n'est autre que le complété $\widehat{G_\xi(\varepsilon)}^\vee$ de $G_\xi(\varepsilon)^\vee$ pour la topologie linéaire dont un système fondamental de voisinages de 0 est fourni par les $(G_\xi(\varepsilon)/W_i)^\vee$.

Soit l'homomorphisme canonique : $G_\xi(\varepsilon)^\vee \to \widehat{G_\xi(\varepsilon)}^\vee = \varprojlim W_i^\vee$

On en déduit pour tout k-espace vectoriel de type fini V, un homomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\varprojlim_{i \in I} W_i^\vee, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_\xi(\varepsilon)^\vee, V)$$

Supposons que ces 2 foncteurs sont isomorphes. Alors en prenant $V = \varepsilon$, on obtient $G_\xi(\varepsilon) \simeq G_\xi(\varepsilon)^{\vee\vee} \Rightarrow G_\xi(\varepsilon)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

Alors $G_\xi(\varepsilon)^\vee$ représente G_ξ.

IV. - FONCTEURS PRO-REPRESENTABLES

Soit $\mathcal{F} : C_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur où Λ = anneau local noethérien ; C_Λ = catégorie des Λ-algèbres de longueur finie à extensions résiduelles triviales. Soit k le corps résiduel de Λ. Soit F la restriction de $\mathcal{F}$ à la catégorie $\mathcal{E}$ et $\xi \in F(k)$. On suppose que $\mathcal{F}$ est pro-représentable ; alors F vérifie (E). Soit $\mathcal{O}_\xi$ l'algèbre locale séparée complète correspondant à ξ et m_x son idéal maximal.

Alors : (Bourbaki - Algèbre commutative ch.III) on sait que : $\mathcal{O}_\xi$ noethérien $\Longleftrightarrow$ m_ξ/m_ξ^2 est un $\mathcal{O}_\xi/m_\xi$ espace vectoriel de type fini.

De plus la topologie de $\mathcal{O}_\xi$ est alors la topologie m_ξ-adique.

Soit $\eta/\eta^2 \to m_\xi/m_\xi^2 \to m_\xi/m_\xi^2 + \eta\ \xi \to 0$

d'où : m_ξ/m_ξ^2 est de type fini $\Longleftrightarrow$ $m_\xi/m_\xi^2 + \eta\,\mathcal{O}_\xi$ est de type fini.

Alors : $G_\xi(\varepsilon) = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{O}_\xi/\eta\,\mathcal{O}_\xi, k[\varepsilon] = \mathrm{Hom}_k(m_\xi/m_\xi^2 + \eta\,\mathcal{O}_\xi, \varepsilon)$

Donc : $\mathcal{O}_\xi$ noethérien $\Longleftrightarrow$ $T_{F/k}(\xi)$ est un k-espace vectoriel de type fini.

<u>Prop</u> : Soit $\mathcal{F} : C_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur pro-représentable. Soit $\xi \in \mathcal{F}(k)$ pour que l'algèbre locale séparée complète $\mathcal{O}_\xi$ correspondant à ce point soit noethérienne, il faut et il suffit que $\mathcal{F}(k[\varepsilon]) = T_{\mathcal{F}/k}(\xi)$ soit un k-espace vectoriel de type fini.

Exposé VII : Pro-représentables (suite)
par :

§ VI. - APPLICATION

Foncteur Quot et Foncteur de Hilbert

Soit S un schéma ; $X \to S$ un schéma au-dessus de S ; F un module quasi cohérent sur X. On désigne par Quot $(F/X/S)$ l'ensemble des O_X modules quasi-cohérents, quotients de F et plats sur S.

Si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, notant $X' = X \times_S S'$ et $F' = F \otimes_{O_S} O_{S'}$ l'image réciproque de F par $X' \to X$, F' est un module quasi-cohérent sur X'.

On définit le foncteur $\mathrm{Quot}_{F/X/S} : (Sch/_S)^\circ \to Ens$ par

$$\mathrm{Quot}_{F/X/S}(S') = \mathrm{Quot}\ (F'/X'/S')$$

. Pour tout S morphisme $S'' \to S'$, $X'' = X \times_S S''$ et isomorphe à $X' \times_{S'} S''$ et $F'' = F \otimes_{O_S} O_{S''}$ à $F' \otimes_{O_{S'}} O_{S''}$; comme la platitude est stable par changement de base et le foncteur image réciproque est exact à droite, on a une application naturelle.

$$\mathrm{Quot}_{F/X/S}(S') \to \mathrm{Quot}_{F/X/S}(S'')$$

$\mathrm{Quot}_{F/X/S}$ est un faisceau f.p.q.c. (voir exposé V)

Pour $F = O_X$ on obtient le foncteur de Hilbert.

Alors $\mathrm{Hil}_{X/S}(S') = \mathrm{Quot}_{O_X/X/S}(S')$ est l'ensemble des sous-schémas fermés de X' plats sur S'.

On suppose maintenant $S = \operatorname{Spec} \Lambda$ ou Λ est un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. C'_Λ est la catégorie de Λ-algèbres locales de longueur finie à extension résiduelle triviale. On notera X_A pour $X \times_{\operatorname{Spec}\Lambda} \operatorname{Spec} A$ et F_A pour $F \otimes \operatorname{Spec} A$, A dans C'_Λ. Soit e un élément de $\operatorname{Quot}_{F/X/S}(\operatorname{Spec} k)$ fixé une fois pour toutes et $Q_e(A)$ le sous-ensemble de $\operatorname{Quot}_{F/X/S}(\operatorname{Spec} A)$ image réciproque de e par l'application canonique

$\operatorname{Quot}_{F/X/S}(\operatorname{Spec} A) \to \operatorname{Quot}_{F/X/S/}(\operatorname{Spec} k)$

Q_e est un foncteur covariant $C'_\Lambda \to$ Ens. Sous certaines conditions Q_e est proreprésentable, plus précisément.

Théorème. Si X est propre sur S et F cohérent sur X, alors Q_e est proprésentable par une Λ algèbre noethérienne.

Pour la démonstration nous aurons besoin de quelques lemmes.

Lemme 1. Soit A un anneau, J un idéal nilpotent de A et $u : M \to N$ un homomorphisme de A modules, $\bar{u} : M/_{JM} \to N/_{JN}$.

a) Si $\bar{u}$ et surjectif, alors u est surjectif

b) Si N et plat sur A et $\bar{u}$ bijectif, alors u est bijectif.

Démonstration. Soit $K = \operatorname{coker} u$. En tensorisant la suite exacte $M \to N \to K \to 0$ par $A/_J$ on obtient $K/_{JK} = 0$ donc $K = 0$ puisque J et nilpotent.

Si $L = \operatorname{Ker} u$, la platitude de N entraîne l'exactitude de la suite exacte $0 \to L/_{JL} \to M/_{JM} \to N/_{JN} \to 0$. D'où $L = 0$.

Remarque. Si A est dans C', tout module plat est libre puisque l'idéal maximal de A est nilpotent.

Lemme 2. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "p''"] \arrow[dr, "p'"] \arrow[dd, dash] & & M'' \arrow[dr, "u''"] \arrow[dd, dash] & \\
& M' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dd, dash] & & M \arrow[dd, dash] \\
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A'' \arrow[dr] & \\
& A' \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}$$

d'homomorphismes d'anneaux et de modules compatibles où $B = A' \times_A A''$, $N = M' \times_M M'$ et M' (resp M'') et libre sur A' (resp A'')

Supposons 1) $A''/_J \xrightarrow{\sim} A$ où J est un idéal nilpotent de A''

2) u' (resp u'') induit $M' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} M$ (resp $M'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} M''$)

Alors N est plat sur B et p' (resp p'') induit $N \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$ (resp $N \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} M''$)

<u>Démonstration.</u> On suppose de plus que M' est libre sur A'

Soit $(x'_i)_{i \in I}$ une base de M' . Par 2) , M est un A module libre de base $u'(x'_i)$. Soit $x''_i \in M''$ tel que $u''(x'_i) = u'(x'_i)$.
On a alors une application $\Sigma A''x''_i \to M''$ de A''module qui modulo J est un isomorphisme par 1) . D'où M'' est libre de base x''_i (lemme 1.). On en déduit que N est libre de base $x'_i \times x''_i$ et les projections p' et p'' induisent des isomorphismes $N \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M$ et $N \otimes_B A'' \xrightarrow{\sim} M''$.

<u>Lemme 3</u>. Avec les notations et hypothèses précédentes, soit L un B module et un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "q'"'] \arrow[dr, "q''"] & \\
M' \arrow[dr, "u'"'] & & M'' \arrow[dl, "u''"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

où q' induit $L \otimes_B A' \xrightarrow{\sim} M'$. Alors $q' \times q'' : L \to N$ est un isomorphisme.

En effet, modulo J' noyau de $B \to A'$, $q' \times q''$ est un isomorphisme ; on applique le lemme 1.

<u>Lemme 4</u>. Dans une catégorie abélienne soient $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ une suite exacte, $A' \to Q$ un morphisme, $A'' \to P$ un épimorphisme de noyau C. Soit E l'ensemble des quadruplets $(B\ f,g,h)$ (à un isomorphisme près) tels que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif où les lignes sont exactes.

Alors 1) E est non vide si et seulement si l'image dans $\mathrm{Ext}^1(C,Q)$ de l'élement A de $\mathrm{Ext}^1(A''A')$ et nulle.

2) Sous ces conditions, E est un ensemble principal homogène sous le groupe abélien $\mathrm{Hom}(C,Q)$.

Quitte à remplacer l'extension A de A'' par A', par son image dans $\mathrm{Ext}^1(A'',Q)$, on peut supposer $A' = Q$

1) résulte de l'exactitude de la suite

$$\mathrm{Ext}^1(P,A') \to \mathrm{Ext}^1(A'',A') \to \mathrm{Ext}^1(C,A')$$

L'ensemble E est évidemment en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-objets N de A tels que $A \to A''$ induise un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} C$ (lemme du Serpent), i.e. l'ensemble des morphismes $C \to A$ relevant le morphisme canonique $C \to A''$.

On a la suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}(C,A') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(C,A) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(C,A'')$ et $E \approx \bar{v}^{-1}(C \xrightarrow{\text{can}} A'')$.

D'où l'assertion 2).

Remarque : Si la suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est scindée, E est non vide et est isomorphe à $\mathrm{Hom}(C,Q)$

Demonstration du théorème.

Spec $k \to$ Spec A, A dans C'_{Λ} , induit l'identité sur les espaces topologiques sous-jacents. Tous les faisceaux que l'on écrira dans la suite seront des faisceaux sur l'espace topologique X_k .

Soit un diagramme commutatif dans C'

$$\begin{tikzcd} B = A'' \times_A A' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A'' \arrow[r, "u''"'] & A \end{tikzcd}$$

Nous prétendons que si $u' : A' \to A$ est surjectif, autrement dit $A'/_I \xrightarrow{\sim} A$ où I est un idéal nilpotent de A' , $\alpha : Q_e(A'' \times_A A') \longrightarrow Q_e(A'') \times_{Q_e(A)} Q_e(A')$ est une bijection.

En effet, soit J le noyau de $B \to A''$; on a $B/_J \xrightarrow{v} A''$ et J est un idéal nilpotent de B . Soient $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{G}''$ respectivement des quotients quasi-cohérents de $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_{A'}$, $\mathcal{F}_{A''}$, plats sur S, et des morphismes $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$, $\mathcal{G}'' \to \mathcal{G}$ compatibles avec $O_{X_{A'}} \longrightarrow O_{X_A}$, $O_{X_{A''}} \longrightarrow O_{X_A}$, induisant des isomorphismes

$\mathcal{G}' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$.

L'homomorphisme canonique de O_{X_B} modules $\mathcal{F}_B \to \mathcal{G}' \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}'' = \mathcal{H}$ est un épimorphisme (lemme 1.) : considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_B \otimes_B A'' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{H} \otimes_B A'' \arrow[d] \\ \mathcal{F}_{A''} \arrow[r] & \mathcal{G}'' \end{tikzcd}$$

Il résulte du lemme 2. que $\mathcal{H}$ est plat sur B et que $\mathcal{H} \otimes_B A'' = \mathcal{G}''$ et $\mathcal{H} \otimes_B A' = \mathcal{G}'$ d'où la surjectivité de α . L'injectivité résulte du lemme 3.

Reste à vérifier la condition de finitude sur l'espace tangent $Q_e(k[\varepsilon])$ où $k[\varepsilon]$ est l'algèbre des nombres duaux sur k . Soit $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{F}_k / \bar{\mathcal{H}}$ le O_{X_k}- module correspondant à e. Il y a un isomorphisme d'espace vectoriel $Q_e(k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Hom}_{O_{X_{k[\varepsilon]}}}(\bar{\mathcal{H}}, \varepsilon\bar{\mathcal{G}})$; plus précisément :

De la suite exacte scindée $0 \to \varepsilon\, k[\varepsilon] \to k[\varepsilon] \to k \to 0$ on déduit par tensorisation les suites exactes scindées

$$0 \to \varepsilon\, O_{X_{k[\varepsilon]}} \to O_{X_{k[\varepsilon]}} \to O_{X_k} \to 0$$

$$0 \to \varepsilon\, \mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \to \mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \to \mathcal{F}_k \to 0$$

Soit $\mathcal{G}$ un $O_{X_{k[\varepsilon]}}$ module quasi-cohérent et des morphismes f et g compatible avec $O_{X_{k[\varepsilon]}} \to O_{X_k}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{k[\varepsilon]} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}_k \arrow[d] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "g"'] & \bar{\mathcal{G}}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il est équivalent de dire: a) g induit un isomorphisme $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} k \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{G}}$ et g est un épimorphisme de noyau $\varepsilon\mathcal{G}$ -

b) $\mathcal{G}$ est plat sur $k[\varepsilon]$ et $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} \varepsilon k[\varepsilon] \to \varepsilon\,\mathcal{G}$ est un isomorphisme

Sous ces conditions $\mathcal{G} \otimes_{k[\varepsilon]} \varepsilon k[\varepsilon] \simeq \bar{\mathcal{G}} \otimes_k \varepsilon k[\varepsilon]$.

D'autre part, puisque $\bar{\mathcal{G}}$ est plat sur k $\bar{\mathcal{G}} \otimes_k \varepsilon k[\varepsilon] \simeq \varepsilon\, \bar{\mathcal{G}}$.

Le résultat cherché se déduit alors de la remarque au lemme 4.

Enfin les hypothèses du théorème sur X et $\mathcal{G}$ entraînent

$\dim_k \mathrm{Hom}_{O_{X_{k[\varepsilon]}}}(\mathcal{H}, \varepsilon\,\mathcal{G}) < \infty$.

VII - APPLICATION ~~du~~ CRITERE de SCHLESSINGER au FONCTEUR de PICARD RELATIF.

Groupes et foncteurs de Picard relatifs.

Soit X un schéma. On appelle <u>groupe de Picard</u> de X, et l'on note $\mathrm{Pic}(X)$, le groupe des classes à isomorphisme près, de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles (i.e. localement isomorphes à $\mathcal{O}_X$).

Rappelons que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \tag{1}$$

$\mathcal{O}_X^*$ désigne le faisceau des unités de $\mathcal{O}_X$.

$X \longmapsto \mathrm{Pic}(X)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans celle des groupes commutatifs et l'isomorphisme (1) est fonctoriel.

Soient S un schéma, X un S-schéma, T un S-schéma variable. La correspondance $T \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ définit un foncteur contravariant de la catégorie $(Sch/_S)$ des S-schémas dans celle des groupes abéliens, donc un préfaisceau sur $(Sch/_S)$. Le faisceau associé à ce préfaisceau pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (f.p.p.f) se note $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ et s'appelle le <u>foncteur de Picard relatif</u> de X sur S. On appelle <u>groupe de Picard relatif</u> de X sur S, et l'on note $\mathrm{Pic}(X/_S)$ le groupe $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$.. Alors, pour tout S-schéma T on a

$$\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X \times_S T/_T) .$$

Explicitons le fait que $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est le faisceau associé, pour la topologie f.p.p.f, au faisceau $T \longmapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$.

Un élément de $\mathrm{Pic}(X/S) = \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$ est défini par un élément ξ' d'un groupe $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$, où $S' \longrightarrow S$ est un morphisme f.p.p.f, tel que l'on puisse trouver un morphisme f.p.p.f $S'' \longrightarrow S' \times_S S'$ tel que les deux images inverses de ξ' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ coïncident.

Deux éléments ξ' et ξ'' de $\mathrm{Pic}(X \times_S S')$ définiront le même élément ξ de $\mathrm{Pic}(X/_S)$ si l'on peut trouver un morphisme f.p.p.f $S'' \longrightarrow S'$ ~~$\times_S S'$~~ tel que les images réciproques de ξ' et de ξ'' dans $\mathrm{Pic}(X \times_S S'')$ coïncident.

II- Relations entre groupes de Picard relatifs et absolus.

Le théorème suivant permet de décrire dans un cas particulier le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X/_S)$ en termes de groupes de Picard absolus.

Théorème. Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme quasi compact et quasi séparé tel que $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$. Alors :

(i) On a une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/_S)$$

(ii) Lorsque, de plus, X admet une section sur S, le dernier morphisme de cette suite exacte est surjectif et l'on a donc :

$$\mathrm{Pic}(X/_S) \simeq \mathrm{Pic}(X)/_{\mathrm{Pic}(S)} \quad .$$

Démonstration.

(i) Le morphisme $\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ provient du morphisme $X \xrightarrow{f} S$ et est injectif. En effet, soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux $\mathcal{O}_S$-Modules inversibles. Le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \longrightarrow f_* \, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ est un isomorphisme car $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ sont inversibles donc localement isomorphes respectivement à $\mathcal{O}_S$ et $\mathcal{O}_X$ et d'autre part $f_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S$. Par conséquent $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{L}, f^*\mathcal{L}')$ sont isomorphes, ce qui montre que si $f^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{L}'$.

Le morphisme $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/_S)$ s'obtient en constatant que $\mathrm{Pic}(X/_S) = \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/_S}(S)$ où $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/_S}$ est le faisceau associé au préfaisceau $T \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \underset{S}{\times} T)$, qui à S fait correspondre $\mathrm{Pic}(X \underset{S}{\times} S) = \mathrm{Pic}(X)$.

Reste à prouver l'exactitude de la suite en $\mathrm{Pic}(X)$.

Montrons d'abord que $\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/S)$ est nul. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_S$-Module inversible, U un ouvert de S tel que $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U$

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_U \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_U} \\ S & \longleftarrow & U \end{array}$$

donc $f^*(\mathcal{L})|_{X_U} \simeq f_U^*(\mathcal{L}|_U) \simeq f_U^*(\mathcal{O}_S|_U) \simeq \mathcal{O}_{X_U}$ donc la classe de $f^*(\mathcal{L})|_{X_U}$ dans $\mathrm{Pic}(X \underset{S}{\times} U)$ et 0 donc $f^*(\mathcal{L})$ donne 0 quand on prend le faisceau associé à $U \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \underset{S}{\times} U)$ pour la topologie de Zariski, donc à fortiori lorsqu'on prend le faisceau associé à ce même préfaisceau pour la topologie f.p.p.f.

Réciproquement, soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible dont l'image dans $\mathrm{Pic}(X/_S)$ est triviale. Il existe alors un morphisme $S' \longrightarrow S$ f.p.p.f tel que,

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

en posant $X' = X \times_S S'$, $\mathcal{L}$ donne $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{X'}$ au dessus de X' par image réciproque. La propriété $f_*(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_S$ se conserve par changement de base fidèlement plat, puisque f est quasi-compact et quasi-séparé. Donc $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) \simeq \mathcal{O}_{S'}$. Comme $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{X'}$, $f'_*(\mathcal{L}') \simeq \mathcal{O}_{S'}$, donc $f'_*(\mathcal{L}')$ est inversible sur S' et $f'^*(f'_*(\mathcal{L}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ est un isomorphisme. Ces propriétés restant vraies par extension f.p.p.f. On en déduit que $f_*(\mathcal{L})$ est inversible sur S et $f^*(f_*(\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ est un isomorphisme donc $\mathcal{L}$ provient d'un faisceau inversible sur S donc appartient à un élément de l'image de $\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X$ ce qui achève la démonstration.

(ii) Supposons à présent que $X \xrightarrow{f} S$ admette une section g. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. On appelle <u>g-rigidification</u> de $\mathcal{L}$ un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$. Un <u>$\mathcal{O}_X$-Module inversible g-rigidifié</u> est un couple $(\mathcal{L}, \alpha)$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible et α une g-rigidification de $\mathcal{L}$. Un morphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles g-rigidifiés $(\mathcal{L}, \alpha)$ et $(\mathcal{M}, \beta)$ est un morphisme $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} g^*(\mathcal{L}) \arrow[rr, dash, "g^*(\varphi)"] & & g^*(\mathcal{M}) \\ & \mathcal{O}_S \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Si $f_*(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_S$ on voit immédiatement que tout automorphisme d'un $\mathcal{O}_X$-Module inversible g-rigidifié est l'identité.

Démontrons à présent le (ii) de la proposition ci-dessus.

Un point de $\mathrm{Pic}(X/_S)$ provient d'un $\mathcal{O}'_X$-Module inversible $\mathcal{L}'$, où $X' = X \times_S S'$ et $S' \longrightarrow S$ est f.p.p.f. Montrons que si f admet une section g, il existe un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ qui donne le même point de $\mathrm{Pic}(X/_S)$.

Puisque f admet une section g, $f' : X' \longrightarrow S'$ admet une section g'. $(g'^*)(\mathcal{L}')$ n'est pas nécessairement isomorphe à $\mathcal{O}_{S'}$. Mais on peut modifier $\mathcal{L}'$ par $f'^*(g'^*(\mathcal{L}'))$ sans changer le point obtenu dans $\mathrm{Pic}(X'/_{S'})$ d'après le (i)). [illegible] faire cette modification, on peut supposer $g'^*(\mathcal{L}') \simeq \mathcal{O}_{S'}$, donc [illegible] rigidifiable. Soit donc $\alpha' : \mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\sim} g'^*(\mathcal{L}')$ une g'-rigidification de $\mathcal{L}'$. On va montrer que $(\mathcal{L}', \alpha')$ est muni d'une donnée de descente relativement à $S' \longrightarrow S$

$$\begin{array}{ccccccc}
X''' & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} & X'' & \rightrightarrows & X' & \longrightarrow & X \\
{\scriptstyle f'''}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
S''' & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} & S'' & \rightrightarrows & S' & \longrightarrow & S
\end{array}$$

Soit $S'' = S' \times_S S'$ et soient $(\mathcal{L}''_1, \alpha''_1)$ et $(\mathcal{L}''_2, \alpha''_2)$ les images réciproques par q_1 et q_2 de $(\mathcal{L}', \alpha')$. Elles définissent le même point de $\mathrm{Pic}(X''/_{S''})$ donc leur différence donne 0 dans $\mathrm{Pic}(X''/_{S''})$ et, par conséquent, d'après le (i) et du fait que $f''_*(\mathcal{O}_{X''}) \simeq \mathcal{O}_{S''}$, cette différence provient d'un $\mathcal{O}_{S''}$-Module inversible rigidifié, donc isomorphe à $\mathcal{O}_{S''}$, donc $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont isomorphes. Quitte à modifier cet isomorphisme, on peut trouver un isomorphisme i'' des $\mathcal{O}_{X''}$-Modules <u>rigidifiés</u> $(\mathcal{L}''_1, \alpha''_1)$ et $(\mathcal{L}''_2, \alpha''_2)$.

Pour montrer que i'' est une donnée de descente sur $(\mathcal{L}', \alpha')$ relativement à $S' \longrightarrow S$, considérons les trois images réciproques $(\mathcal{L}'''_1, \alpha'''_1)$ $(\mathcal{L}'''_2, \alpha'''_2)$, $(\mathcal{L}'''_3, \alpha'''_3)$ de $(\mathcal{L}', \alpha')$ sur X''', et les trois morphismes π, φ et σ de $\mathcal{O}_{X'''}$-Modules rigidifiés. Alors nécessairement $\sigma = \varphi \circ \pi$ car il ne peut y avoir qu'un seul isomorphisme d'un faisceau rigidifié dans un autre, tout automorphisme d'une telle structure étant trivial. La condition

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathcal{L}'''_1, \mathcal{L}'''_1) & \\
{\scriptstyle \pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \sigma} \\
(\mathcal{L}'''_2, \mathcal{L}'''_2) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & (\mathcal{L}'''_3, \mathcal{L}'''_3)
\end{array}$$

cocycle sur X''' est donc automatiquement vérifiée.

$(\mathcal{L}', \alpha')$ est donc muni d'une donnée de descente relativement à $S' \longrightarrow S$, ce qui montre qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module rigidifié $(\mathcal{L}, \alpha)$ qui donne le même point de $\mathrm{Pic}(X/_S)$ que $(\mathcal{L}', \alpha')$ donc $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/_S)$ est surjectif et dans ce c

$$\mathrm{Pic}(X/_S) \simeq \mathrm{Pic}(X)/\,\mathrm{Pic}(S)$$

Application du Critère de Schlessinger au foncteur de Picard relatif.

Soit Λ un anneau local noethérien complet de corps résiduel k et C_Λ la catégorie des Λ-algèbres locales artiniennes à extensions résiduelles triviales.

... sur $S = \mathrm{Spec}\,\Lambda$. Pour tout $A \in C_\Lambda$ nous noterons

$X_A = X \underset{\operatorname{Spec} \Lambda}{\times} \operatorname{Spec} A$, et nous poserons $X_o = X_k$. Nous nous proposons d'étudier le foncteur $\underset{\sim\sim}{\operatorname{Pic}}_{X/S}$, ou, plus précisément, sa restriction à la catégorie C'^{o}_{Λ} des spectres d'objets de C'_{Λ}.

On a le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. Si (a) X est de type fini et plat sur S

(b) $H^o(X_o, \mathcal{O}_{X_o}) \simeq k$

(c) $\dim_k H^1(X_o, \mathcal{O}_{X_o}) < \infty$

alors $\underset{\sim\sim}{\operatorname{Pic}}_{X/S}$, restreint à C'^{o}_{Λ}, est pro-représentable.

Tout d'abord, notons que si la condition (a) est réalisée, la condition (b) équivaut à la condition (b')

(b') $H^o(X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \simeq A$ pour tout $A \in C'_{\Lambda}$

En effet, par platitude, le foncteur $M \longmapsto H^o(X, \mathcal{O}_X \otimes M)$, sur la catégorie des -modules est exact à gauche. Par application du lemme des cinq, on peut montrer facilement que le morphisme canonique $M \longrightarrow H^o(X, \mathcal{O}_X \otimes M)$ est un isomorphisme pour tout M de longueur finie (par récurrence sur cette longueur).

Si la condition ($\mathcal{B}'$) est réalisée, pour tout $A \in C'_{\Lambda}$ (si S_A désigne Spec A) on a $f_*(\mathcal{O}_{X_A}) \simeq \mathcal{O}_{S_A}$. On le voit aisément en constatant que

$(X_A, \mathcal{O}_{X_A}) = \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \simeq \Gamma(S_A, f_*(\mathcal{O}_{X_A})) \simeq A$ et que S_A est affine d'anneau

Montrons d'autre part que l'on peut toujours, sous les hypothèses du théorème dessus, se ramener au cas où f admet une section. Pour cela, nous allons montrer Lemme suivant :

<u>Lemme</u>. Soit X un S-schéma de type fini, plat sur S, où S est le spectre d'un anneau Λ local, noethérien, complet, de corps résiduel k. Soit s le point fermé de S. Supposons que $X_s \neq \emptyset$. Si X est de type fini sur k, l'ensemble des points où X est de Cohen-McAulay (i.e. où l'anneau local est de Cohen-McAulay) contient un ouvert dense.

Nous supposerons que X est affine irréductible de dimension r. D'après un théorème de Mademoiselle Noether, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une algèbre finie sur $k[T_1 \dots T_r]$. Comme $r = \dim X$, le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k[T_1 \dots T_r]$ est injectif. Le point générique η de X s'envoie sur le point générique ξ de $\operatorname{Spec} k[T_1 \dots T_r]$. X_ξ est fini et libre sur ξ donc X est fini et libre au dessus d'un ouvert dense de $\operatorname{Spec} k[T_1 \dots T_r]$ et, a fortiori, est de Cohen-McAulay en ses points.

Soit donc x un point fermé de X_s où X_s est de Cohen-McAulay. On peut trouver une suite régulière de paramètres $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_r$ de $\mathcal{O}_{X_s,x}$. Quitte à restreindre X à un voisinage ouvert affine de x, on peut supposer que $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ se relèvent en $a_1 \dots a_r$ dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Considérons alors le fermé $Z = V(a_1, \dots, a_r)$. Z est plat sur S (EGA 0_{III}.10) et quasi-fini en x (car $\mathcal{O}_{X_s,x} / (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r)$ est de longueur finie et le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est fini sur k).

S étant complet est hensélien et l'on peut par conséquent écrire $Z = Z' \amalg Z''$, Z' est le composant local de x et est fini sur S. Z' est donc à la fois fini plat sur S. Quitte à faire le changement de base fini et plat $Z' \longrightarrow S$. On peut supposer que $X \longrightarrow S$ admet une section.

Nous pouvons par conséquent supposer à présent que $X \xrightarrow{f} S$ admet une section que $f_*(\mathcal{O}_{X_A}) \simeq \mathcal{O}_{S_A}$ pour tout $A \in C'_\Lambda$.

Alors pour tout $T = \operatorname{Spec} A \in C'^{\circ}_\Lambda$, $\underset{\sim}{\operatorname{Pic}}_{X/S}(T)$, qui est isomorphe à $\operatorname{Pic}(X \times_S T/_T)$, n'est autre que $\operatorname{Pic}(X \times_S T) /_{\operatorname{Pic}(T)} = \operatorname{Pic}(X \times_S T)$, en vertu du paragraphe précédent, du fait que $\operatorname{Pic}(T) = 0$, puisque T est le Spectre d'une Λ-algèbre artinienne locale. Donc le préfaisceau $T \longrightarrow \operatorname{Pic}(X \times_S T)$ est un faisceau qui coïncide avec

Pic X/S ...

... donc le foncteur contravariant $\operatorname{Spec} A \longmapsto \operatorname{Pic}(X \times_S \operatorname{Spec} A)$ de C'°_Λ dans

... tout d'abord deux lemmes de platitude.

... Soient A un anneau, J un idéal nilpotent de A, $u : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules, avec N plat sur A. Alors, si $\bar{u} : M/_{JM} \longrightarrow N/_{JN}$ est un

... il en est de même de u ...

Lemme 2. Si on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux et de modules,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
N \arrow[rr, "p''"] \arrow[dr] \arrow[ddd, dashed, dash] & & M'' \arrow[dr] \arrow[ddd, dashed, dash] & \\
& M' \arrow[rr] \arrow[ddd, dashed, dash] & & M \arrow[ddd, dashed, dash] \\
& & & \\
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A'' \arrow[dr] & \\
& A' \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}$$

compatibles, où $B = A' \underset{A}{\times} A''$ et $N = M \underset{M}{\times} M''$, et où M' (resp. M'') est un A'-(resp. A''-) Module plat, et si l'on suppose :

(i) $A''/_J \xrightarrow{\sim} A$ (où J est un idéal nilpotent de A)

(ii) u' (resp. u'') réduit un isomorphisme entre $M' \underset{A'}{\otimes} A$ (resp. $M'' \underset{A''}{\otimes} A$) et M.

Alors N est B-plat et p' (resp. p'') réduit un isomorphisme entre $N \underset{B}{\otimes} A'$ et M' (resp. entre $N \underset{B}{\otimes} A''$ et M'').

Corollaire. Avec les notations ci-dessus, soit L un B-module qui peut être placé dans un diagramme commutatif où q' induit un isomorphisme $L \underset{B}{\otimes} A' \longrightarrow M'$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& L \arrow[dl, "q'"'] \arrow[dr, "q''"] & \\
M' \arrow[dr, "u'"'] & & M'' \arrow[dl, "u''"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Alors le morphisme canonique $L \longrightarrow N$ est un isomorphisme.

Démonstration. Précisons tout d'abord quelques notations. Soient A et B deux objets de C_Λ'. Si $\eta \in \mathrm{Pic}(X_A)$ (resp. $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{X_A}$-Module inversible) et $A \longrightarrow B$ un morphisme dans C_Λ', on note $\eta \underset{A}{\otimes} B$ (resp. $\mathcal{L} \underset{A}{\otimes} B$) l'élément image de η dans $\mathrm{Pic}(X_B)$ (resp. le faisceau inversible image réciproque de $\mathcal{L}$ sur X_B). Fixons une fois pour toutes un élément ξ_o de $\mathrm{Pic}(X_o)$. Nous pouvons nous borner à étudier le foncteur $P : C_\Lambda' \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui à $A \in C_\Lambda'$ associe $P(A)$, sous-ensemble de $\mathrm{Pic}(X_A)$ formé des η tels que $\eta \underset{A}{\otimes} k = \xi_o$.

Soient $u' : (A', \eta') \longrightarrow (A, \eta)$ et $u'' : (A'', \eta'') \longrightarrow (A, \eta)$ des morphismes de couples, où u'' est une surjection. Soient $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}''$ des faisceaux inversibles correspondant sur $X' = X_{A'}$, $Y = X_A$ et $X'' = X_{A''}$. On a des morphismes $p' : \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}$ et $p'' : \mathcal{L}'' \longrightarrow \mathcal{L}$ (de faisceaux sur l'espace $|X_o|$ sous-jacent compatibles avec $\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_{X''} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ qui induisent des isomorphismes : $\mathcal{L}' \underset{A'}{\otimes} A \simeq \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'' \underset{A}{\otimes} A'' \simeq \mathcal{L}$. Soient $B = A' \underset{A}{\times} A''$ et $Z = X_B$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
& \mathcal{O}_Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{O}_{X'} \arrow[dr] & & \mathcal{O}_{X''} \arrow[dl] \\
& \mathcal{O}_Y &
\end{tikzcd}$$

de faisceaux sur $|X_o|$. Comme X est plat sur S, il y a un isomorphisme $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_{X'} \underset{\mathcal{O}_Y}{\times} \mathcal{O}_{X''}$ où $\mathcal{O}_{X'} \underset{\mathcal{O}_Y}{\times} \mathcal{O}_{X''}$ est le faisceau de B-algèbres dont les sections sur l'ouvert U de $|X_o|$ sont données par $\mathcal{O}_Z(U) = \mathcal{O}_{X'}(U) \underset{\mathcal{O}_Y(U)}{\times} \mathcal{O}_{X''}(U)$.

Par conséquent $\mathcal{N} = \mathcal{L}' \times \mathcal{L}''$ est un faisceau sur Z inversible et les projections de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ induisent des isomorphismes $\mathcal{N} \underset{B}{\otimes} A' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ et $\mathcal{N} \underset{B}{\otimes} A'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}''$ (D'après le lemme 2).

Si $\mathcal{M}$ est un autre faisceau inversible sur Z tel qu'il y ait des isomorphismes $\mathcal{M} \underset{B}{\otimes} A' \simeq \mathcal{L}'$ et $\mathcal{M} \underset{B}{\otimes} A'' \simeq \mathcal{L}''$, on a des morphismes $q' : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}'$ et $q'' : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}''$ qui les induisent donc un diagramme commutatif où θ est un automorphisme de $\mathcal{L}$, donné par composition

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L}' \arrow[d] & & \mathcal{L}'' \arrow[d] \\
\mathcal{L} \arrow[rr] & & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}' \underset{A'}{\otimes} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \underset{A}{\otimes} B \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'' \underset{A''}{\otimes} A \longrightarrow \mathcal{L}.$$

Comme $A \xrightarrow{\sim} H^0(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ pour tout $A \in C'_\Lambda$, θ est la multiplication par une unité a de A.

Remontrant a en $a'' \in A''$, on peut changer q'' en $a'' q''$ et rendre le diagramme commutatif. Donc $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L}' \arrow[dr] & & \mathcal{L}'' \arrow[dl] \\
 & \mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent $P(A' \underset{H}{\times} A'') \simeq P(A') \underset{P(A)}{\times} P(A'')$ pour toute surjection $A'' \longrightarrow A$ dans C'_Λ.

Pour finir, supposons que $Y = X_{k[\varepsilon]}$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X_o} \oplus \varepsilon\, \mathcal{O}_{X_o}$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_o} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_Y \longrightarrow \mathcal{O}^*_{X_o} \longrightarrow 1$$

(ou $\exp f = 1 + \varepsilon f$).

Donc $t_P \simeq \ker[H^1(Y, \mathcal{O}^*_Y) \longrightarrow H^1(X_o, \mathcal{O}^*_{X_o})] \simeq H^1(X_o, \mathcal{O}_{X_o})$ est de dimension finie sur k.

On a montré plus qu'il n'en fallait pour appliquer le critère de Schlessinger.

Exposé VII (suite) par M. ROUBAUD

§ V. - LE CRITERE DE PRO-REPRESENTABILITE DE SCHLESSINGER

I. - Préliminaires

Soit Λ un anneau local noethérien complet.

Soit C_Λ la catégorie des Λ-algèbres de longueur finie. Si Λ' est une Λ-algèbre finie plate locale, on posera :

$C'_{\Lambda'}$ = catégorie des Λ'-algèbres de longueur finie, locales, à extension résiduelle triviale (i.e. : si k' = corps résiduel de Λ' et K = corps résiduel de $A \in C'_{\Lambda'}$, on a $k' \xrightarrow{\sim} K$)

$C''_{\Lambda'}$ = catégorie des Λ'-algèbres de longueur finie, non nécessairement locales, à extensions résiduelles triviales

Tout $A \in C''_{\Lambda'}$ est produit fini d'éléments A_i de $C'_{\Lambda'}$.

Théorème : Soit un foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$; pour que F soit pro-représentable (c'est-à-dire exact à gauche, d'après le critère de Gabriel) il faut et il suffit qu'il vérifie :

1) F commute aux produits finis

2) Pour toute extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie locale et plate, la restriction de F à $C'_{\Lambda'}$ est exacte à gauche

3) Pour tout morphisme plat $A \to B$ de C_Λ, avec A local, la suite d'ensembles : $F(A) \to F(B) \rightrightarrows F(B \otimes_A B)$ est exacte.

Remarques : La condition 2) sera analysée en détails au § III.
La condition 1) permet alors de montrer que la restriction de F à $C''_{\Lambda'}$ est exacte à gauche.
La condition 3) sera vérifiée dans la pratique car on ne considérera que les foncteurs F qui seront des faisceaux pour la topologie fidèlement plate de présentation finie.

Démonstration : Si F est exact à gauche, ces 3 conditions sont évidemment vérifiées. Montrons que ces conditions sont suffisantes ; on utilisera les Lemmes ci-dessous :

Lemme 1. : 1) Soit $\Lambda \to \Lambda'$ une extension finie locale et plate.

Alors pour tout couple $C \to A$ et $B \to A$ de morphisme de C_Λ on aura :

$$(C \underset{A}{\times} B) \underset{}{\otimes} \Lambda' \simeq (C \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda') \underset{A \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda'}{\times} (B \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda')$$

2) Soient A,B,C comme ci-dessus. Il existe alors une extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie locale plate telle que si A',B',C' sont les Λ'-algèbres obtenues par changement de base, les Λ'-algèbres A',B',C' et $B' \underset{A'}{\times} C'$ soient à extension résiduelles triviales.

Démonstration de 1) : Soit la suite exacte $B \underset{A}{\times} C \to B \times C \rightrightarrows A$ définissant le produit fibré $B \underset{A}{\times} C$. $\Lambda \to \Lambda'$ étant plat on en déduit la suite exacte :

$(B \underset{A}{\times} C) \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda' \to B' \times C' \rightrightarrows A'$, d'où 1)

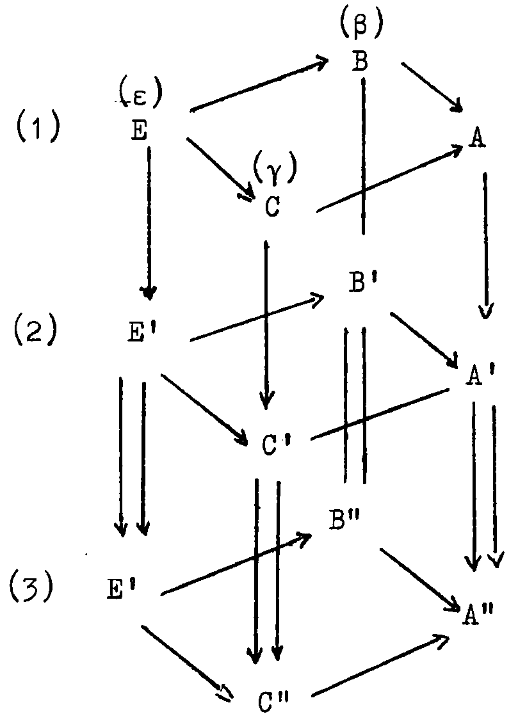
Démonstration de 2) : Soit k le corps résiduel de Λ. Soit K une extension finie normale de k, contenant les extensions résiduelles de A, B, C, $B \underset{A}{\times} C$

De proche en proche, en étudiant d'abord le cas d'une extension monogène, on construit une Λ-algèbre Λ' locale, finie et libre, de corps résiduel K.

Il est clair alors que A',B',C' et $B' \underset{A'}{\times} C'$ déduites de A par l'extension $\Lambda \to \Lambda'$ ont toutes leurs extensions résiduelles triviales.

Lemme 2 : Soit le diagramme d'ensembles ci-dessous. On suppose qu'il est commutatif, que les colonnes ε,ρ,γ sont des suites exactes et que les carrés (2) et (3) sont cartésiens. Alors le carré (1) est cartésien.

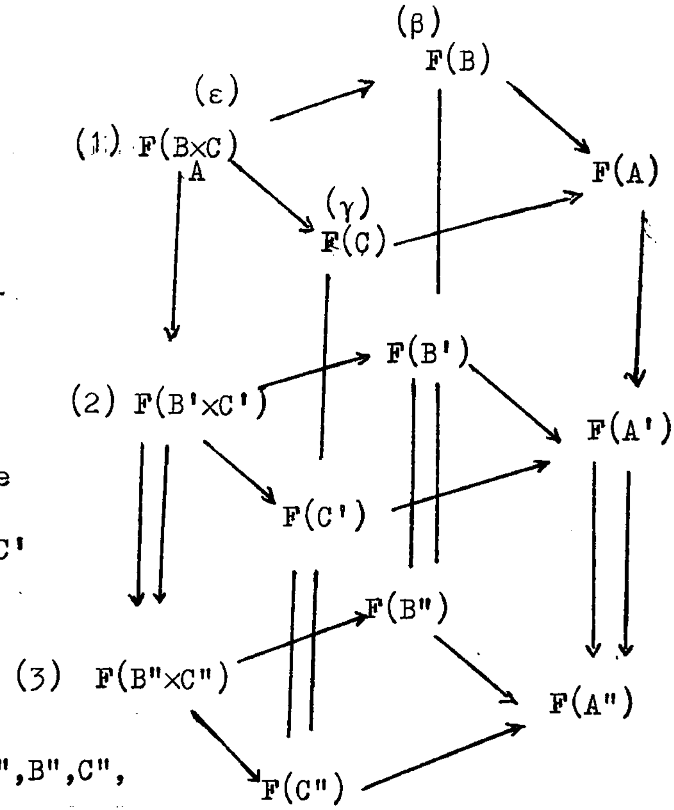
La démonstration consiste en une simple chasse au diagramme.



<u>Démonstration du Théorème</u>

Soient $B \to A$ et $C \to A$ deux morphismes de C_Λ. On veut montrer :

$F(B \times_A C) \cong F(B) \times_{F(A)} F(C)$. On peut supposer B et C locaux. Au moyen du lemme 1, 2) on choisit $\Lambda \to \Lambda'$ fini plat local tel que par changement de base A', B', C' et $B' \times_{A'} C'$ soient des Λ'-algèbres à extensions résiduelles triviales.



Alors si $\Lambda'' = \Lambda' \otimes_\Lambda \Lambda'$ les algèbres A'', B'', C'', $B'' \times_{A''} C''$ obtenus à partir de A, B, C, $B \times_A C$ par l'extension $\Lambda \to \Lambda''$, sont aussi à extensions résiduelles triviales. On a alors le diagramme d'ensembles ci-contre :

Il est commutatif. $\Lambda \to \Lambda'$ étant plat $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ et $B \times_A C \to B' \times_{A'} C'$ sont plats, donc d'après l'hypothèse 3) les colonnes $\varepsilon, \beta, \gamma$ sont exactes.

D'après l'hypothèse 2) et l'hypothèse 1) du Théorème, les carrés (2) et (3) sont cartésiens. D'après le lemme 2, le carré 1) est cartésien.

II.- Foncteurs à Enveloppe sur C'_{Λ}

1) Exemple :

Pour tout Λ-module de type fini M soit Γ_M le foncteur covariant $C'_{\Lambda} \to \mathrm{Ens}$ défini par $\Gamma_M(A) = A \underset{\Lambda}{\otimes} M$.

Soit η l'idéal maximal de Λ ; soit $r = \mathrm{rang}_k(M/_{\eta M})$. Alors il existe une suite exacte $L \to M \to 0$ où L est libre de rang r (Nakayama). D'où un morphisme de foncteurs : $\Gamma_L \xrightarrow{u} \Gamma_M$, surjectif.

Si $\overline{M} = M \underset{\Lambda}{\otimes} k$ $\quad \overline{L} = L \underset{\Lambda}{\otimes} k$ on a : $\Gamma_{\overline{L}} \xrightarrow{\overline{u}} \Gamma_{\overline{M}}$.

Soit $L^{\vee}$ le module dual de L . Pour tout Λ-algèbre A on a un isomorphisme canonique :

$\Gamma_L(A) = A \underset{\Lambda}{\otimes} L \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-mod}}(L^{\vee},A) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(S_{\Lambda}(L^{\vee}),A)$

On en déduit que Γ_L est pro-représenté par le complété de l'algèbre symétrique $S_{\Lambda}(L^{\vee})$ suivant l'idéal $V^{\vee}.S_{\Lambda}(L^{\vee})$.

Définition : Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs définis de C'_{Λ} dans Ens.

On dira que $F \to G$ est lisse si : pour toute surjection $B \to A$ dans C'_{Λ} , l'application canonique :

(L) $F(B) \to F(A) \underset{G(A)}{\times} G(B)$ est surjective

---

Dans le cas des foncteurs Γ définis ci-dessus, il résulte de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\Gamma_L \xrightarrow{u} \Gamma_M$ est lisse.

D'autre part, pour tout $\zeta \in \Gamma_M(k)$ comme l'espace tangent à un foncteur ne dépend que de la restriction du foncteur aux k-algèbres il résulte de l'isomorphisme $\overline{L} \to \overline{M}$ que l'homomorphisme canonique $T_{\Gamma_{L/k}}(\zeta) \to T_{\Gamma_{M/k}}(\zeta)$ est un isomorphisme.

Nous verrons plus loin que Γ_M est pro-représentable si et seulement si M est libre.

Même si Γ_M n'est pas pro-représentable, on a trouvé un foncteur pro-représentable et un morphisme $u : \Gamma_L \to \Gamma_M$ tel que le couple (Γ_L,u) possède les deux propriétés

1) u est un morphisme <u>lisse</u>

2) u induit un isomorphisme sur les espaces tangents en tout point $\zeta \in \Gamma_M(k)$.

Nous dirons que (Γ_L, u) est une <u>enveloppe</u> de Γ_M en tout point $\zeta \in \Gamma_M(k)$.

b) <u>Généralités sur les Morphismes Lisses.</u>

Soit C'_Λ la catégorie des Λ-algèbres locales noethériennes complètes A, telles que si m = idéal maximal de A, pour tout entier n on ait $A/_{M^n} \in C'_\Lambda$.
Dans la suite on ne considère que des foncteurs F tels que $F(k)$ soit réduit à un seul point. On désigne par $\hat{F}$ le prolongement de F à $\hat{C'}_\Lambda$, défini par $\hat{F}(A) = \varprojlim_n F(A/_{m^n})$.

<u>Définition</u> : Soit $B \xrightarrow{u} A$ une surjection (c'est-à-dire un épimorphisme) de C'_Λ. On dira que c'est un épimorphisme simple si et seulement si u n'est pas composé de deux épimorphisme (non triviaux).

<u>Proposition</u> : Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs. Alors :
$F \to G$ lisse $\Longleftrightarrow$ pour tout épimorphisme simple $B \to A$, l'application canonique (1) est surjective.

En effet, tout épimorphisme de C'_Λ est composé d'un nombre fini d'épimorphismes simples.

<u>Proposition 1.</u> : Soit $F \to G$ un morphisme de foncteurs.

1) $F \to G$ lisse $\Longrightarrow \hat{F} \to \hat{G}$ surjectif.

2) Si F est pro-représenté par $R \in \hat{C'}_\Lambda$ et G est pro-représenté par $S \in \hat{C'}_\Lambda$ alors $F \to G$ lisse $\Longleftrightarrow$ R est une algèbre de séries formelles sur S

3) a : $F \to G$ lisse et $G \to H$ lisse $\Longrightarrow$ $F \to H$ lisse.

b : $F \to G$ surjectif et $G \to H$ tel que $F \to$ soit lisse alors $G \to H$ est lisse.

c : $F \to G$ lisse $\Longrightarrow$ pour tout $H \to G$, $F \times_G H \to H$ est lisse

<u>Démonstration de 1)</u> Si $A \in \hat{C'}_\Lambda$ alors $F(A/_m) \xrightarrow{\sim} G(A/_m)$. En utilisant la surjection (L) on montre la surjectivité.

2) non utilisé dans la suite de l'exposé. La démonstration se trouve dans E G A 0_{IV}. 19.3 et S G A I ch IV

3) Généralités sur les morphismes lisses découlant directement des définitions.

<u>Définition</u> : Soit $F : C'_\Lambda \to$ Ens un foncteur. Soit $R \in \hat{C'}_\Lambda$ et soit h_R le foncteur $C'_\Lambda \to$ Ens défini par $h_R(A) = \mathrm{Hom\ cont}_\Lambda(R,A)$

Un morphisme de foncteur $h_R \xrightarrow{\xi} F$ est une enveloppe de F si :

1) $T_{F/k} \xleftarrow{\sim} T_{h_{R/k}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom\ cont}_\Lambda(R,k[\varepsilon])$

2) $h_R \xrightarrow{\xi} F$ est lisse.

<u>Remarque</u> : 1) le morphisme $h_R \to F$ correspond biunivoquement à un élément ξ de $\hat{F}(R)$

2) le morphisme $\Gamma_L \to \Gamma_M$ défini ci-dessus est une enveloppe de Γ_M.

<u>Proposition 2</u> : Soient $h_R \xrightarrow{\xi} F$ et $h_{R'} \xrightarrow{\xi'} F$ deux enveloppes de F

Alors il existe un isomorphisme (non canonique) $u : R \to R'$ tel que $\hat{F}(u)(\xi) = \xi'$.

On utilisera le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit $R \to S$ un morphisme dans $\hat{C'}_\Lambda$. Alors

$$R \to S \text{ surjectif} \iff \check{T}_{R/k} \longrightarrow \check{T}_{S/k} \text{ surjectif.}$$

Soit η = idéal maximal de Λ ; m = idéal maximal de R ; m' = idéal maximal de S.

$$\check{T}_{R/k} = {}^{m}/_{m^2 + \eta R} \quad ; \quad \check{T}_{S/k} = {}^{m'}/_{m'^2 + \eta R}$$

On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \eta R/_{\eta R \cap m^2} \arrow[r] \arrow[d] & m/_{m^2} \arrow[r] \arrow[d] & \check{T}_{R/k} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \eta S/_{\eta S \cap m'^2} \arrow[r] & m'/_{m'^2} \arrow[r] & \check{T}_{S/k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sonts exactes, et les carrés commutatifs.

La flêche verticale de gauche est surjective. Donc :

$$\check{T}_{R/k} \to \check{T}_{S/k} \text{ surjectif } \Longrightarrow m/_{m}2 \to m'/_{m'}2 \text{ surjectif}$$

Ce qui équivaut à $R \to S$ surjectif d'après (Bourbaki, Algèbre Commutative Ch.III)

Montrons la Proposition 2 : D'après la proposition 1, 1) il existe $u : R \to R'$ et $u' : R' \to R$ tels que $\hat{F}(u)(\xi) = (\xi'$ et $\hat{F}(u')(\xi') = \xi$ et induisant tous deux un morphisme sur les espaces tangents, par définition des enveloppes. Alors $u'u$ induit un morphisme de T_{h_R}. Le lemme montre que $u'u$ est surjectif. R est noethérien donc $u'u$ est un isomorphisme. De même, uu' est un isomorphisme.

<u>Remarque</u> : On en déduit que Γ_M pro-représentable $\Longleftrightarrow$ M libre, puisque

$$\Gamma_L \to \Gamma_M \text{ est une enveloppe de } \Gamma_M .$$

<u>Proposition</u>. Soit (R,ξ) une enveloppe de F ; Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) : R est une anneau de séries formelles sur Λ

(ii) : F transforme les surjections en surjections.

Résulte de la Proposition 1. (2) et 3))

III.- <u>Le Critère de Schlessinger.</u>

1) <u>Définition</u> : Soit $p : B \to A$ une surjection dans C'_Λ. On dit que p est essentielle si : Pour tout $q : C \to B$ dans C'_Λ tel que poq soit surjectif, q est surjectif.

<u>Lemme</u> : Soit $p : B \to A$ une surjection dans C'_Λ

(i) : p est essentielle $\Longleftrightarrow$ $\check{T}_{h_B} \simeq \check{T}_{h_A}$

ii) si p est un épimorphisme simple :

p n'est pas essentielle $\Longleftrightarrow$ p a une section $\sigma : A \to B$

<u>Démonstration</u> : (i) : Si $T_{h_B}^{\vee} \xrightarrow{\sim} T_{h_A}^{\vee}$, le lemme à la proposition 2. de II, entraîne que p est essentielle.

Si p est essentielle : soit $\{\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_2\}$ une base de $T_A^{\vee}$. On relève les $\bar{t}_i$ en $t_i \in B$. Soit $C = \Lambda[t_1,\dots,t_r]$ la sous Λ-algèbre de B engendrée par les t_i. Alors p induit une surjection de C sur A, donc $C = B$. Alors : $\dim_k(T_{h_B}^{\vee}) < r = \dim_k(T_A^{\vee})$ donc $T_{h_B}^{\vee}) \xrightarrow{\sim} T_{h_A}^{\vee}$.

(ii) Si p a une section σ, on a $B \xrightarrow{\sim} A \oplus k[J]$ où $J = \ker(p)$ alors σ n'est pas surjective donc p n'est pas essentielle.

Si p n'est pas essentielle, $T_{h_B}^{\vee}$ n'est pas isomorphe à $T_{h_A}^{\vee}$.

L'anneau C construit ci-dessus est différent de B donc est isomorphe à A car $\mathrm{Long}_\Lambda(B) = \mathrm{Long}_\Lambda(A) + 1$. Alors $C \xrightarrow{\sim} A$ donne une section.

---

2) <u>Théorème</u> : (Schlessinger).

Soit $F : C'_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur tel que $F(k)$ soit réduit à un seul point.

Soient $A' \to A$ et $A'' \to A$ des morphismes dans C'_Λ

Soit l'application canonique (S) : $F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$

1) F a une enveloppe si et seulement si il vérifie H_1, H_2, H_3 di-dessous :

H_1 : (S) est surjective si $A'' \to A$ est un épimorphisme simple

H_2 : (S) est bijective si $A = k$ et si $A'' = k[\varepsilon]$

H_3 : $\dim_k T_{F/k} < \infty$

2) F est pro-représentable par une algèbre noethérienne si et seulement si F vérifie H_1, H_2, H_3 ainsi que H_4 ci-dessous :

H_4 : pour tout épimorphisme simple $A' \to A$, $F(A' \times_A A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$ est bijective.

Remarques : 1) H_2 implique que pour tout espace vectoriel V de dimension finie $F(k[V]$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel telle que $T_F \otimes_k V \xrightarrow{\sim} F(k[V])$ (Voir : "Espaces Tangents) de plus $\forall V$ $F(k[V])$ est de dimension finie (H_3)

2) H_1 entraîne par récurrence que pour toute surjection $A'' \to A$ l'application (S) est surjective

3) Conséquences Géométriques des propriétés H_1.

Soit $p : A' \to A$ surjectif, I son noyau. Supposons $m.I = 0$ (m = rad.A)

Alors : $A' \times_A A' \xrightarrow{\sim} A' \times k[I]$ par : $(x,y) \to (x,x_0 \oplus (y-x))$ où x_0 = classe de x dans k.

On en déduit une flèche canonique

$$F(A') \times (T_F \otimes_k I) \xrightarrow{v} F(A') \times_{F(A)} F(A')$$

par composition avec la seconde projection

On en déduit une application

$$F(A') \times (T_F \otimes_k I) \xrightarrow{u} F(A')$$

compatible avec la projection dans $F(A)$

Il résulte facilement de la définition de l'addition dans T_F, que u définit une opération canonique du groupe $T_F \otimes_k I$ sur les fibres du morphisme

$$F(A') \to F(A).$$

La condition H_1, entraîne alors que $T_F \otimes_k I$ opère <u>transitivement</u> sur chaque fibre.

La condition H_4 équivaut au fait que $T_F \otimes_k I$ opère sans points fixes.

La conjonction de H_1 et H_4 entraîne donc que $T_F \otimes_k I$ opère librement et transitivement sur les fibres de $F(A') \to F(A)$, autrement dit ces fibres sont vides ou bien des espaces principaux homogènes sous le groupe $T_F \otimes_k I$

Démonstration :

A - Ces conditions sont nécessaires

Si F est pro-représentable par une algèbre noethérienne, F vérifie H_2, H_3, H_4 car il est exact à gauche. Si F a une enveloppe $h_R \dashrightarrow F$ où $R \in \hat{C}'_\Lambda$, foncteur h_R vérifie les 4 conditions H_i et F vérifie H_3 car $T_{h_R} \xrightarrow{\sim} T_F$

Montrons que F vérifie H_1.

On sait que $h_R \to F$ est surjectif. (II - Prop. 1, (1))

a un diagramme commutatif d'ensembles :

$$\begin{tikzcd} h_R(A' \times_A A'') \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[d, "f"'] & h_R(A') \times_{h_R(A)} h_R(A'') \arrow[d, "g"] \\ F(A' \times_A A'') \arrow[r, dashed] & F(A') \times_{F(A)} F(A'') \end{tikzcd}$$

suffit donc de montrer que g est surjectif.

ent $\eta' \in F(A')$ et $\eta'' \in F(A'')$ ayant même image η dans $F(A)$.

existe alors $\xi' \in h_R(A')$ dont l'image dans $F(A')$ est η'. Soit ξ image de ξ' $h_R(A)$. Par lissité, il existe $\xi'' \in h_R(A'')$ dont l'image dans $h_R(A)$ est égale , et dont l'image dans $F(A'')$ est η''. Alors (ξ', ξ'') a pour image (η', η'') g.

Montrons que F vérifie H_2 : Supposons $A'' = k[\varepsilon]$ et $A = k$. On a vu que l'appli- on (S) était surjective. Montrons qu'elle est injective. On a le diagramme commu-

$$\begin{tikzcd} h_R(A' \times_k k[\varepsilon]) \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[d] & h_R(A') \times T_{h_R} \arrow[d] \\ F(A' \times_k k[\varepsilon]) \arrow[r, dashed] & F(A') \times T_F \end{tikzcd}$$

ζ_1 et $\zeta_2 \in F(A' \times_k k[\varepsilon])$ ayant mêmes projections η' et η'' sur $F(A')$

l'application $h_R(A' \times_k k[\varepsilon]) \to F(A' \times_k k[\varepsilon]) \times_{F(A')} h_R(A')$ est surjective par lissité.

Soit $\xi' \in h_R(s')$ qui relève η'. Il existe alors U_1 et U_2 dans $h_R(A' \underset{k}{\times} k[\varepsilon]$, d'images ξ_1 et ξ_2 dans $F(A' \underset{k}{\times} k[\varepsilon])$ et d'image ξ' dans $h_R(A')$. Alors, u_1 et u_2 ont pour image (ξ', η'') dans $h_R(A') \times T_R$ donc $\zeta_1 = \zeta_2$

B - Ces conditions sont suffisantes.

1) Supposons que F vérifie H_1, H_2, H_3. D'après H_2, le foncteur F a un espace tangent T_F, muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel sur k de dimension finie d'après H_3. Alors : $T_F = \bigoplus_{i=1}^{i=r} \tau_i$ où les τ_i sont des espaces vectoriels de dimension 1. Soit $t_i = \tau_i^\vee$ pour $i = 1, \ldots, r$.
Soit $S = \Lambda[[T_1, \ldots, T_r]]$, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On va construire une enveloppe R de F, où R sera un quotient de S. Soit $R_1 = S/\mathfrak{m} = k$.
Alors $F(R_1)$ est un ensemble à un seul élément, d'où un et un seul morphisme $h_{R_1} \xrightarrow{\xi_1} F$.

Soit $R_2 = S/\mathfrak{m}^2 + \eta S \simeq k[\bigoplus_{i=1}^{r} t_i] \in C'_\Lambda$. La restriction de F aux algèbres du type $k[v]$ est représentable par $T_F^\vee = \bigoplus_{i=1}^{r} t_i$ (voir "Espaces Tangents") donc $F(R_2) \simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{i=1}^{r} t_i, \bigoplus_{i=1}^{r} t_i)$. Si on prend dans $F(R_2)$ un élément correspondant à l'identité de $\bigoplus_{i=1}^{r} t_i$, il définira un morphisme $h_{R_2} \xrightarrow{\xi_2} F$ qui induit un isomorphisme des espaces tangents. On posera : $J_2 = \mathfrak{m}^2 + \eta^2 S$. J_2 est de codimension finie dans S.
Supposons obtenus pour $1 \leqslant p \leqslant q$ des idéaux J_p de S de codimension finie et des morphismes $\xi_p : h_{R_p} \to F$, tels que $\mathfrak{m} J_{p-1} \subset J_p \subset J_{p-1}$ et tels que $\xi_{p-1} : h_{R_{p-1}} \to F$ se prolonge en $h_{R_p} \xrightarrow{\xi_p} F$ (Alors : $S/J_p \to S/J_{p-1}$ est surjective, son noyau est annulé par $\mathfrak{m}$, ce qui permettra d'appliquer H_1 à l'aide de la remarque 3 suivant l'énoncé du critère).

Soit $\mathcal{G}$ = ensemble idéaux J de S tels que : $mJ_q \subset J \subset J_q$ et $h_{R_q} \xrightarrow{\xi_q} F$ se prolonge en $h_{S/J} \to F$; alors J est de codimension finie, car il contient m^{q+1}.

Notons que les idéaux $J \in \mathcal{G}$ correspondant à des sous-espaces vectoriels du k espace vectoriel de dimension finie J_q/mJ_q. En particulier toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{G}$ est stationnaire et pour voir que $\mathcal{G}$ possède un plus petit élément, il suffit de voir que $\mathcal{G}$ est stable par intersection. Or soient J et $K \in \mathcal{G}$, et montrons que $J \cap K \in \mathcal{G}$. Quitte à agrandir J, on peut sans changer $J \cap K$, supposer que $J + K = J_q$. Alors on a :

$$S_{J\cap K} \xrightarrow{\sim} S/J \underset{S/J_q}{\times} S/K .$$

Compte tenu de H_1, $J \cap K \in \mathcal{G}$.

Soit $J_{q+1} = \bigcap_{J \in \mathcal{G}} J$ et $\xi_{q+1} : S/J_{q+1} \to F$ un prolongement de ξ_q.

Soit $J_\infty = \bigcap_{q \in N} J_q$ et $R = S/J_\infty$ qui est muni d'une famille d'idéaux de $(J_q/J_\infty)_{q\in N}$, qui définissent une topologie sur R.

$\forall q$ $J_q \supset m^q$, donc R_q est artinien et par suite, pour tout q, il existe r_q tel que $J_{q+1} \supset J_q^{r_q}$. donc J_{q+1} contient une puissance de m ; donc R, muni de cette topologie est le quotient topologique de S et est séparé complet, (et noethérien).

2) $h_R \xrightarrow{\xi} F$ est une enveloppe.

(ξ étant défini par la famille $(\xi_q)_{q\in N}$). Par construction $T_{h_R} \xrightarrow{\sim} T_F$.

Montrons que ξ est lisse.

Soit $A' \xrightarrow{p} A$ un épimorphisme simple. Montrons : $h_R(A') \to h_R(A) \underset{F(A)}{\times} F(A')$ est surjectif. Soit $\eta' \in F(A')$, η son image dans $F(A)$ et $u \in h_R(A)$ d'image η. u correspond à un morphisme continu $R \xrightarrow{u} A$.

Supposons qu'il existe un morphisme continu $R \xrightarrow{u''} A'$ tel que $p \circ u'' = u$.

Soit η'' son image dans $F(A')$. T_F opérant transitivement sur $F(p)^{-1}(\eta)$ (resp $h_R(p)^{-1}(u))$, il existe $\sigma \in T_F$ tel que $\eta''^{\sigma} = \eta'$. Alors $u' = (u'')^{\sigma}$ répond à la question. Montrons qu'il existe u'' comme ci-dessus.

Il existe q tel que u soit le composé : $R \to R_q = S/J_q \xrightarrow{u_q} A$ avec $\xi_q(u_q) = \eta$. Il suffira donc de compléter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} R_{q+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & A' \arrow[d, "p"] \\ R_q \arrow[r, "u_q"] & A \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire le diagramme :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "W"] \arrow[d, "f"'] & R_q \underset{A}{\times} A' \arrow[d, "pr_1"] \\ R_{q+1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "v"] & R_q \end{tikzcd}$$

W étant choisi pour rendre le carré commutatif. (h_S est lisse Λ)

$A' \to A$ est un épimorphisme simple, donc $R_q \underset{A}{\times} A' \xrightarrow{pr_1} R_q$ est une épimorphisme simple. Alors : Si pr_1 a une section, v existe évidemment.

Si pr_1 n'a pas de section, par le lemme de III, (1), pr_1 est essentiel. Comme $pr_1 \circ W$ est surjectif, W est surjectif. Donc $S/\ker W \xrightarrow{\sim} R_q \underset{A}{\times} A'$.

On a évidemment $m \circ J_q \subset \operatorname{Ker} W \subset J_q$ (En effet $pr_1 \circ W = \Pi \circ f$ et si $I = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} pr_1$, $m \cdot I = 0$ et $W(m.J_q) = m \cdot W(J_q) \subset m \cdot I = 0)$.

De plus $\xi_q : h_{R_q} \to F$ se relève à $S/\operatorname{Ker} W \xrightarrow{\sim} R_q \underset{A}{\times} A'$, ce qui se voit en appliquant H_1 à $R_q \underset{A}{\times} A'$. Donc $\operatorname{Ker} W \in \mathcal{S}$ donc $\operatorname{Ker} W \supset J_{q+1}$ et W se factorise par R_{q+1}.

3) Si de plus F vérifie H_4, h_R est isomorphe à F.

On prouve $h_R(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$ par induction sur la longueur de A.

Soit $p : A' \to A = A/I$ un épimorphisme simple. Par lissité, $h_R(A') \to F(A')$ est surjectif. On suppose $h_R(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$. Pour tout $\eta \in F(A)$ $T_F \underset{k}{\otimes} I$ opère sans point fixe sur $h_R(p)^{-1}(\eta)$ et sur $F(p)^{-1}(\eta)$ donc $h_R(A') \to F(A')$ est injective.

III. - Relations entre pro-représentabilité et représentabilité de la diagonale.

Soient C une catégorie $\mathbf{a}$, F et $G : \mathcal{C}^{\circ} \to$ Ens deux foncteurs.

<u>Définition</u> : Si u et v : $G \to F$ sont deux morphismes, Le foncteur des coïncidences de u et v est le sous-foncteur $G_{u,v}$ de G défini comme suit : Pour tout objet T de C et tout morphisme $t : T \to G$ (i.e. pour tout point $t \in G(T)$) on a :

$$G_{u,v}(T) = \{1\} \quad \text{si} \quad u \circ t = v \circ t : T \to F$$

et $G_{u,v}(T) = \emptyset$ sinon ;

" $G_{u,v}$ est le plus grand sous-foncteur de G sur lequel u et v coïncident".
Si $S : P \to F \times F$ est le morphisme diagonal , il revient au même de définir $G_{u,v}$ comme le sous-objet de G qui rend cartésien le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{S} & F \times F \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u \times v} \\ G_{u,v} & \longrightarrow & G \end{array}$$

Si S est un schéma, et si $F : (Sch/S)^{\circ} \to$ Ens est un foncteur représentable ; la diagonale $S : F \to F \times_S F$ est une immersion. Par suite pour tout S schéma T et pour tout couple (u,v) d'éléments de F(T) ; le sous-foncteur de T des coïncidences de u et v est un sous-schéma de T .

<u>Proposition</u> : Soit $F : C'_{\Lambda} \to$ Ens ; Alors la diagonale de F est représentalbe si et seulement si, pour tout $R \in \hat{C}'_{\Lambda}$ et tout couple de morphismes : $h_R \overset{\xi_1}{\underset{\xi_2}{\rightrightarrows}} F$ le foncteur noyau est pro-rerpésentable par $K \in \hat{C}'_{\Lambda}$.

<u>Démonstration</u> : 1). Si F est relativement représentable : $h_R \overset{\xi_1}{\underset{\xi_2}{\rightrightarrows}} F$ corres-

pont à

$$(\xi_{1,n})_{n\in N} \quad \text{et} \quad (\xi_{2,n})_n \in \varprojlim F(R/m^n)$$

les couples $h_{R/m^n} \overset{\xi_{1,n}}{\underset{\xi_{2,n}}{\rightrightarrows}} F$ ont des noyaux K_n appartenant à C'_Λ .

Alors le système projectif des K_n admet une limite projective dans $\hat{C}'_\Lambda$ qui pro-représente $\mathrm{Ker}(\xi_1 , \xi_2)$.

2). Si F vérifie la condition ci-dessus et si $A \in C'_\Lambda$ et $h_A \rightrightarrows F$ est un couple de morphismes, le noyau de ce couple est un élément de $\hat{C}'_\Lambda$, qui est un sous objet de A , donc appartient à C'_Λ .

<u>Théorème</u> : Soit $F : C'_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur admettant une enveloppe (R,ξ) .
Alors : F pro-représentable $\Longleftrightarrow$ La diagonale de F est représentable.

Démonstration : 1). Si F est pro-représentable sa diagonale est représentable.

2). Le foncteur $h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R$ est exact à gauche donc pro-représentable et est muni de 2 flèches : $h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R \rightrightarrows F$. Alors :

$$h_R \underset{F}{\times} h_R = \mathrm{Ker}\ (h_R \underset{h_\Lambda}{\times} h_R \rightrightarrows F) \text{ est pro-représenté par}$$

$$S \in \hat{C}'_\Lambda \quad \text{et} \quad h_S \to h_R \quad \text{est lisse} \quad (\text{II, Prop.2}).$$

$$h_S(k[\varepsilon]) = h_R(k[\varepsilon]) \underset{F(k[\varepsilon])}{\times} h_R(k[\varepsilon]) = T_{h_R} = T_F$$

donc $T_{h_S} \xrightarrow{\sim} T_{h_R}$. Donc $h_S \to h_R$ est une enveloppe donc $S \xrightarrow{\sim} R$.

Soit Δ le morphisme diagonal : $h_R \to h_S \overset{\sim}{\underset{\sim}{\rightrightarrows}} h_R$

Δ est surjectif donc $h_R \to F$ est injectif, donc bijectif.

IV. - Le critère de Grothendieck.

<u>Définition</u> : dans C_Λ on appelle monomorphisme simple tout monomorphisme qui ne peut se décomposer en deux monomorphismes non triviaux.
Autrement dit : $A \xrightarrow{u} B$ est un monomorphisme simple si c'est une injection et s'il n'existe pas A' strictement inclus entre $u(A)$ et B.

<u>Théorème</u> : (Grothendieck). Soit $F : C_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur.

Alors : F pro-représenté par une algèbre topologique dont les composants locaux sont des algèbres locales noethériennes complètes est équivalent à :

1) F commute aux produits finis.

2) Si $A \to B$ est un morphisme de C_Λ avec A local et si B est fidèlement plat sur A, la suite d'ensembles : (G) : $F(A) \to F(B) \rightrightarrows F(B \otimes_A B)$ est exacte.

3) si A est local et si $A \to B$ est un monomorphisme simple à extensions résiduelles triviales, la suite (G) est exacte.

4) Si $\Lambda \to \Lambda'$ est un morphisme fini local libre avec Λ' local dans C_Λ si F' est la restriction de F à $C'_{\Lambda'}$, sous les conditions ci-dessus $T_{F'}$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel k' de Λ'.
Alors $\dim_{k'} T_{F'} < +\infty$.

<u>Démonstration</u> : Necessité : 1) évident ; 2) et 3) : la suite $A \to B \rightrightarrows B \otimes_A B$ est exacte dans le cas 2) par fidèle platitude. Dans le cas 3) car le noyau des deux flèches est distinct de B et contient A, donc est égal à A. 4) évident.
Ces conditions sont suffisantes : Les conditions 1 et 3 du théorème de pro-représentabilité énoncé en I, sont vérifiées, grâce à 1 et 2 ci-dessus.
Reste à vérifier que : pour toute extension $\Lambda \to \Lambda'$ finie locale plate, la

restriction de F à $C'_{A'}$ est exacte à gauche. Pour celà on va utiliser le critère de Schlessinger on peut supposer que $A' = A$ puisque seule intervient la catégorie $C'_{A'}$.

a. La condition 3 ci-dessus entraîne que F transforme les injections en injections, car toute injection est composé d'un nombre fini de monomorphismes simples.

b. a) entraîne que si on montre H_1, alors H_2 et H_4 sont vérifiées. car $A' \underset{A}{\times} A'' \subset A' \times A'' \Longrightarrow F(A' \underset{A}{\times} A'') \to F(A') \underset{F(A)}{\times} F(A'') \to F(A') \times F(A'')$ est injectif.

c. Il suffit de montrer H_1 si $A' \to A$ est un monomorphisme simple et $A'' \to A$ un épimorphisme simple. En effet H_1 sera vrai pour toute injection $A' \to A$; pour toute surjection $A' \to A$ on aura $A' \times A'' \xrightarrow{\sim} A \underset{A \times A}{\times} (A' \times A'')$ avec $\Delta : A \to A \times A$ le morphisme diagonale et $A' \times A'' \to A \times A$ l'application canonique déduite de $A' \to A$ et $A'' \to A$. Alors, Δ est une injection et $A' \times A'' \to A \times A$ une surjection. Donc : $F(A' \underset{A}{\times} A'') \to F(A) \underset{F(A) \times F(A)}{\times} (F(A') \times F(A''))$ est surjectif ce qui entraîne que $F(A' \underset{A}{\times} A'') \to F(A') \underset{F(A)}{\times} F(A'')$ est surjectif.

d. Montrons donc que H_1 est vérifié si $A' \to A$ est un monomorphisme simple et $A'' \to A$ un épimorphisme simple, de noyau J. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
D = A' \underset{A}{\times} A'' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"'] & A'' \arrow[r, shift left, "i'_1"] \arrow[r, shift right, "i'_2"'] \arrow[d, "p"] & A'' \underset{D}{\otimes} A'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & A \underset{A'}{\otimes} A \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

$A' \times A'' \to A'$ est un épimorphisme simple, de noyau J ; $A' \underset{A}{\times} A'' \to A''$ est un monomorphisme simple.

Alors, $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} J$.

Démonstration de : $\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} J$.

1). $D \to A'$ est surjectif donc $A \underset{A'}{\otimes} A \xrightarrow{\sim} A \underset{D}{\otimes} A$

$J = \mathrm{Ker}\ p = \mathrm{Ker}\ p'$.

$\mathrm{Ker}\ f$ = idéal de $A'' \underset{D}{\otimes} A''$ engendré par les images de $J \underset{D}{\otimes} A''$ et $A'' \underset{D}{\otimes} J$

Soit $z \in \mathrm{Ker}\, f$; $z = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b'_i$ avec : $\forall i\ b_i \in J$ ou $b'_i \in J$.

soit $x \in A''$ et $y \in J$; dans $A'' \underset{D}{\otimes} A''$ on aura :

$x \otimes y = x \otimes (0,y).1$ si $(0,y)$ est l'élément de D correspondant à y .

Donc $x \otimes y = (0,y).x \otimes 1$

$x \otimes y = yx \otimes 1 = (0,yx).1 \otimes 1 = 1 \otimes (0,yx).1 = 1 \otimes xy$.

donc $z = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b'_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i b'_i \otimes 1) = (\Sigma\, b_i b'_i) \otimes 1$ avec $\Sigma\, b_i b'_i \in J$.

d'où une application de $\mathrm{Ker}\ f$ dans J , bijective, qui à z associe $\Sigma\, b_i b'_i$ et qui est $B \underset{D}{\otimes} B$ - linéaire si on munit B de la structure de $B \underset{D}{\times} B$ module définie par l'application diagonale : $x \otimes y \to x.y.$.

Soient (alors) $\alpha' \in F(A')$ et $\alpha'' \in F(A'')$ ayant pour image α dans $F(A)$ alors $F(i_1)(\alpha) = F(i_2)(\alpha) = \gamma$; soient $\eta'_1 = F(i'_1)(\alpha'')$ et $\eta'_2 = F(i'_2)(\alpha'')$ dont l'image dans $F(A'')$ est γ . Le carré de droite est cartésien car $\mathrm{Ker}\ f = J$.

D'après (b) $F(A'' \underset{D}{\otimes} A'') \to F(A'') \underset{F(A)}{\otimes} F(A \underset{A'}{\times} A)$ est injective donc $\eta'_1 = \eta'_2$

par conséquent il existe $\delta \in F(D)$ tel que $F(u')\ (\delta) = \alpha''$; u étant injective, on en déduit que $F(\rho')\ (\delta) = \alpha'$, d'où le résultat.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE-ALGEBRIQUE D'ORSAY
Année 1969/70

Exposé : Théorème de Comparaison

par H. COHEN

§ 1. Rappels et résultats préléminaires

a) - Le théorème de finitude

Nous utiliserons fréquemment le résultat suivant (EGA III 3.2.I)

Théorème 1. Soient Y un schéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme propre. Pour tout O_X-Module cohérent $\mathcal{F}$ les O_Y-Modules $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont cohérents pour tout $q \geq 0$.

Rappelons que l'on démontre d'abord ce théorème pour un morphisme projectif f (Théorème de Serre), puis on démontre le casgénéral en se ramenant au cas projectif par récurrence noethérienne, dévissage, et en utilisant le lemme de Chow.

Rappelons d'autre part que si f est séparé quasi-compact, et si $\mathcal{F}$ est un O_X-Module quasi-cohérent, alors pour tout ouvert affine U de Y on a :

$$\underline{\Gamma(U, R^q f_*(\mathcal{F})) = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})} \qquad \text{(EGA III 1.4.II)}$$

On obtient donc dans le cas affine :

Corollaire Soient A un anneau noethérien, X un A-schéma propre. Pour tout O_X-Module cohérent $\mathcal{F}$ les A-modules

$$H^q(X, \mathcal{F})$$

sont de type fini pour tout $q \geq 0$

b) - Généralisation

Théorème 2. Soient A un anneau noethérien. $\mathfrak{J}$ un idéal de A, X un A-schéma propre, $\mathcal{F}$ un O_X-Module cohérent. Alors pour tout $p \geqslant 0$ la somme directe

$$N = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^p(X, \mathfrak{J}^k \mathcal{F})$$

est un module de type fini sur la A-algèbre graduée $S = \bigoplus_{k>0} \mathfrak{J}^k$

Démonstration. Soit $f : X \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme structural, et posons

$\mathcal{S} = \tilde{S}$, $\mathcal{S}' = f^*(\tilde{S})$, $m = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{J}^k \mathcal{F}$. On a alors trivialement

$$R^p f_*(m) = \tilde{N}$$

donc "N est un S-module de type fini" équivaut à

"$R^p f_*(m)$ est un S-module de type fini"

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, "h"'] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[from=u, "f"'] & \operatorname{Spec} S \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

où X' est obtenu parchangement de base (donc $X' = \operatorname{Spec}(\mathcal{S}')$)

On peut à l'aide de ce diagramme ramener le problème à un problème sur les $O_{X'}$-Modules, où X' est un schéma, et non plus à un problème sur les $\mathcal{S}'$-Modul de sorte qu'on pourra appliquer le théorème 1.

En effet puisque g est affine, g' est aussi affine ; soit $\tilde{m}$ le $O_{X'}$-Modul associé au $\mathcal{S}'$-Module quasi-cohérent m. On a par définition

$$m = g'(\tilde{m})$$

De plus $\mathcal{F}$ étant cohérent, m est un $\mathcal{S}'$-Module de type fini donc $\tilde{m}$ est un $O_{X'}$-Module de type fini ; or $h = g \circ f'$ est un morphisme de type fini et Spec A est noethérien, donc X' est noethérien. Il en résulte que $\tilde{m}$ est un $O_{X'}$-Module cohérent. f' étant propre on déduit donc du théorème 1. que les

$R^p f'_*(\tilde{m})$ sont des $O_{\mathrm{Spec}\ S}$-Modules cohérents.

Il reste à voir comment on peut exprimer $R^p f_*(m)$ à l'aide de $R^p f'_*(\tilde{m})$.

g' étant affine ona un homomorphisme bijectif

$R^p f_*(m) = R^p f_*(g'_*(\tilde{m})) \xrightarrow{\sim} R^p h_*(\tilde{m})$ et il est facile de vérifier que c'est un homomorphisme de $\mathcal{S}$-Modules.

De plus puisque f' est séparé quasi-compact et g affine, l'homomorphisme de $\mathcal{S}$-Modules

$$R^p(g \circ f')_*(\tilde{m}) = R^p h_*(\tilde{m}) \to g_*(R^p f'_*(\tilde{m}))$$

est bijectif.

Puisque les $R^p f'_*(\tilde{m})$ sont cohérents et que g est affine, il en résulte donc que les $R^p f_*(m)$ sont des $\mathcal{S}$-Modules de type fini pour tout $p \geqslant 0$, d'où les théorème 2.

c) - Commutation des $\varprojlim$ aux H^q

Théorème 3. Soient X un schéma, $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système projectif strict de O_X-Modules quasi-cohérents, et posons :

$$\mathcal{F} = \varprojlim_k \mathcal{F}_k$$

Alors pour tout $n > 0$ l'homomorphisme canonique

$$h_n : H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

est surjectif. Si de plus, pour une valeur de n, le système projectif des

$$(H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k))_{k \in N}$$

vérifie la condition de Mittag-Leffer (ML), h_n est un isomorphisme.

Rappelons qu'un système projectif (A_α) est strict si les morphismes de transition $U_{\alpha\beta} : A_\beta \to A_\alpha$ pour $\beta \geqslant \alpha$ sont surjectifs.

(A_α) vérifie la condition (ML) si pour tout α il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que pour tout $\gamma \geqslant \beta$:

$$U_{\alpha\beta}(A_\beta) = U_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$$

Un système projectif strict vérifie évidemment (ML).

Démonstration - La cohomologie calculée dans la catégorie des faisceaux de O_X-Modules ou des faisceaux en groupes abéliens étant la même, il suffit de montrer les propriétés des h_n en tant que morphismes de groupes abéliens, les $(\mathcal{F}_k)$ étant considérés comme des faisceaux en groupes abéliens.

<u>Notations</u>. - SP(X) (resp SP($\mathbb{Z}$)) catégorie abélienne des systèmes projectifs de faisceaux de groupes abéliens sur X (resp de groupes abéliens).

Ab(X) (resp Ab) catégorie abélienne des faisceaux en groupes abéliens sur X (resp des groupes abéliens)

On a alors les foncteurs exacts à gauche

$$\varprojlim : SP(X) \longrightarrow Ab(X) \qquad\qquad \varprojlim : SP(\mathbb{Z}) \longrightarrow Ab$$

$$(\mathcal{F}_k) \longmapsto \varprojlim_k(\mathcal{F}_k) \qquad\qquad (A_k) \longmapsto \varprojlim_k(A_k)$$

$$\Gamma : SP(X) \longrightarrow SP(\mathbb{Z}) \qquad\qquad \Gamma : Ab(X) \longrightarrow Ab$$

$$(\mathcal{F}_k) \longmapsto (\Gamma(X, \mathcal{F}_k)) \qquad\qquad \mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$$

Par définition de $\varprojlim$ on a pour tout $(\mathcal{F}_k) \in SP(X)$

$$\Gamma \circ \varprojlim(\mathcal{F}_k) = \varprojlim \circ \Gamma(\mathcal{F}_k) : SP(X) \longrightarrow Ab$$

Les quatre catégories abéliennes considérées ayant des générateurs et des limites inductives exactes ont assez d'injectifs. On peut donc parler des foncteurs dérivés des foncteurs précédents. En notant $\varprojlim^{(p)}$ (resp $\varprojlim^{(p)}$) le p^e foncteur dérivé droit de $\varprojlim$ (resp $\varprojlim$) on a alors la

Proposition 1.- Il existe deux suites spectrales ayant même aboutissement et dont les termes $'E_2^{pq}$ et $''E_2^{pq}$ sont donnés par :

$$'E_2^{pq} = \varprojlim_k{}^{(p)} H^q(X, \mathcal{F}_k) \Longrightarrow E^{p+q} \Longleftarrow H^p(X, \varprojlim_k{}^{(q)}(\mathcal{F}_k)) = ''E_2^{pq}$$

Démonstration. Etudions d'un peu plus près les injectifs de $SP(X)$.

Lemme 1. Soit $(\mathfrak{I}_k)$ un objet injectif de $SP(X)$. Alors :

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{I}_k$ est un objet injectif de $Ab(X)$

(ii) $\varprojlim(\mathfrak{I}_k)$ est un objet injectif de $Ab(X)$

(iii) $(\Gamma(X, \mathfrak{I}_k))_{k\in\mathbb{N}} = \Gamma((\mathfrak{I}_k))$ est un objet injectif de $SP(\mathbb{Z})$

Démonstration du Lemme 1. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ soit $(\mathcal{A}_\ell^{(k)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ le système projectif défini par :

$$\mathcal{A}_\ell^{(k)} = \mathcal{O} \qquad \text{pour } \ell > k$$

$$\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A} \qquad \text{pour } \ell \leqslant k$$ avec les homomorphismes évidents, $\mathcal{A}$ étant un objet donné de $Ab(X)$. On vérifie facilement que :

$$\mathrm{Hom}_{Ab(X)}(\mathcal{A}, \mathfrak{I}_k) = \mathrm{Hom}_{SP(X)}((\mathcal{A}_\ell^{(k)}), (\mathfrak{I}_\ell))$$

$$\mathrm{Hom}_{Ab(X)}(\mathcal{A}, \varprojlim(\mathfrak{I}_k)) = \mathrm{Hom}_{SP(X)}((\mathcal{A}_\ell^{(\infty)}), (\mathfrak{I}_\ell))$$

Pour tout k les foncteurs $\mathcal{A} \to (\mathcal{A}_\ell^{(k)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ étant exact, ceci prouve que les foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{Ab(X)}(\bullet, \mathcal{J}_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{Ab(X)}(\bullet, \varprojlim \mathcal{J}_k)$$

sont exacts, d'où i) et ii).

Soit SPPF (X) la catégorie abélienne des systèmes projectifs de préfaisceaux de groupes abéliens sur X.

Si A_k^c est le préfaisceau constant associé à $A_k \in Ab$, on a

$$\mathrm{Hom}_{SP(\mathbb{Z})}((A_k),(\Gamma(X, \mathcal{J}_k))) = \mathrm{Hom}_{SPPF(X)}((A_k^c),(\mathcal{J}_k))$$

$$= \mathrm{Hom}_{SP(X)}(a(A_k^c),(\mathcal{J}_k)) \quad \text{en notant } \underline{a} \text{ le}$$

foncteur faisceau associé :

$$a : SPPF(X) \to SP(X)$$

Les foncteurs a et $A \to A^c$ étant exacts il en résulte que

$$\mathrm{Hom}_{SP(\mathbb{Z})}(\bullet, (\Gamma(X, \mathcal{J}_k)))$$

est un foncteur exact, d'où iii).

Le lemme 1. (ii) et (iii)) montre qu'ona deux suites spectrales de Leray ayant comme aboutissement

$$E^n = R^n(\Gamma \circ \varprojlim_k)(\mathcal{F}_k) = R^n(\varprojlim_k \circ \Gamma)(\mathcal{F}_k)$$

et dont les termes E_2^{pq} sont donnés par :

$$'E_2^{pq} = \varprojlim_k{}^{(p)} R^p \Gamma(\mathcal{F}_k) \qquad ''E_2^{pq} = H^p(X, \varprojlim_k{}^{(q)}(\mathcal{F}_k))$$

Le lemme 1. (i) montre alors que

$$R^q \Gamma(\mathcal{F}_k) = (H^q(X, \mathcal{F}_k)) \quad \text{d'où la proposition 1}$$

Proposition 2. Pour tout $p \geqslant 2$ les foncteurs

$$\varprojlim^{(p)} : SP(\mathbb{Z}) \to Ab \qquad \text{sont nuls.}$$

Démontrons trois lemmes :

Lemme 2. Soit $(\mathfrak{J}_k)$ un objet injectif de $SP(\mathbb{Z})$. Alors $(\mathfrak{J}_k)$ est un système projectif strict et a fortiori vérifie (ML).

Démonstration. Avec des notations analogues à celles du lemme 1. on a

$$\mathrm{Hom}_{SP(\mathbb{Z})}((\mathbb{Z}_\ell^{(k)}),(\mathfrak{J}_\ell)) = \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}, \mathfrak{J}_k) = \mathfrak{J}_k$$

et le morphisme $\mathfrak{J}_k \to \mathfrak{J}_h$ pour $k \geqslant h$ se déduit de l'injection canonique :

$\mathbb{Z}^{(h)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(k)}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{SP(\mathbb{Z})}(\cdot, (\mathfrak{J}_\ell))$ étant exact, $\mathfrak{J}_k \to \mathfrak{J}_h$ est surjectif, d'où le lemme 2.

Lemme 3. Soit $0 \to (A_k) \xrightarrow{U_k} (B_k) \xrightarrow{V_k} (C_k) \to 0$ une suite exacte dans $SP(\mathbb{Z})$. Si (A_k) vérifie la condition (ML), la suite

$$0 \to \varprojlim(A_k) \xrightarrow{u} \varprojlim(B_k) \xrightarrow{v} \varprojlim(C_k) \to 0 \quad \text{est exacte.}$$

Démonstration esquissée :

On sait déjà que $\varprojlim$ est exact à gauche. Il suffit donc de montrer que V est surjectif.

Soit donc $z = (z_k)$ un élément de $\lim(C_k)$ et posons

$$E_k = v_k^{-1}(z_k)$$

Les $(E_k)_{k \in N}$ forment évidemment un système projectif d'ensembles non vides pour les restrictions des homomorphismes $g_{hk} : B_k \to B_k$.

On montre facilement par diagram chasing que ce système vérifie la condition [illegible] (voir EGA 0_{III} 13.2.2)

On déduit alors du théorème de Mittag Leffler (Bourbaki Top. Gen. Ch II §3 Th applicable ici puique l'ensemble d'indices est $\mathbb{N}$, qu'il existe un point

$y = (y_k) \in \varprojlim_k E_k$. Comme $V_k(y_k) = z_k$ pour tout k

par définition, on a $z = V(y)$, d'où le lemme 3.

<u>Lemme 4.</u> Soit $(A_k) \in SP(\mathbb{Z})$ un système projectif vérifiant (ML). Alors

$$\varprojlim{}^{(p)}(A_k) = 0 \qquad \text{pour tout } p \geqslant 1$$

Démonstration du Lemme 4. et de la proposition 2.

Raisonnons par récurrence sur p.

Pour $p = 1$ plongeons (A_k) dans un injectif $(\mathcal{J}_k)$ de $SP(\mathbb{Z})$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \to (A_k) \to (\mathcal{J}_k) \to (Q_k) \to 0$$

d'où une suite exacte de cohomologie

$$0 \to \varprojlim(A_k) \to \varprojlim(\mathcal{J}_k) \xrightarrow{p} \varprojlim(Q_k) \xrightarrow{d} \varprojlim{}^{(1)}(A_k) \to 0$$

Le morphisme p est surjectif d'après le lemme 3. donc

$$\varprojlim{}^{(1)}(A_k) = \operatorname{Coker} p = 0$$

Pour $p \geqslant 2$ le lemme 4. est un cas particulier de la proposition 2. Supposons donc le lemme 4 et la proposition 2 valables jusqu'à $p - 1$ (si $p - 1 = 1$ la proposition 2. est vide)

Soit (B_k) un objet quelconque de $SP(\mathbb{Z})$, et plongeons le dans un injectif, d'où la suite exacte

$$0 \to (B_k) \to (\mathcal{J}_k) \to (Q_k) \to 0$$

La suite exacte de cohomologie fournit des isomorphismes

$$\varprojlim{}^{(p-1)}(Q_k) \xrightarrow{\sim} \varprojlim{}^{(p)}(B_k)$$

Or d'après le lemme 2. $(\mathcal{J}_k)$ vérifie (ML), donc son quotient (Q_k) aussi, comme on le vérifie facilement. L'hypothèse de récurrence montre donc que

$$\varprojlim^{(p-1)}(Q_k) = 0 \qquad \text{donc que} \quad \varprojlim^{(p)}(B_k) = 0 \text{ , d'où}$$

le lemme 4. et la proposition 2.

<u>Proposition 3.</u> (i) Pour tout système projectif $(\mathcal{F}_k)$ de faisceauxquasi-cohérents sur X , considérés comme objets de $SP(X)$, on a

$$\varprojlim^{(p)}(\mathcal{F}_k) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqslant 2$$

(ii) Si de plus pour tout ouvert affine U de X le système, $\Gamma(U,\mathcal{F}_k)$ vérifie (ML) (ce qui sera en particulier le cas si les $(\mathcal{F}_k)$ forment un système projectif strict de faisceaux quasi-cohérents) alors

$$\varprojlim^{(p)}(\mathcal{F}_k) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqslant 1$$

Démonstration. Soit $PF(X)$ la catégorie abélienne des préfaîsceaux en groupes abéliens sur X .

Le foncteur $(\mathcal{F}_k) \longrightarrow \varprojlim(\mathcal{F}_k)$ peut être exprimé comme composé des foncteurs

$$i \; : \; SP(X) \longrightarrow SPPF(X)$$

$$(\mathcal{F}_k) \longmapsto (U \to \Gamma(U,\mathcal{F}_k))$$

$$\varprojlim \; : \; SPPF(X) \longrightarrow PF(X)$$

$$(U \to \Gamma(U,\mathcal{F}_k)) \longmapsto (U \to \varprojlim \Gamma(U,\mathcal{F}_k))$$

et du foncteur faisceau associé : $a \; : \; PF(X) \to Ab(X)$.

Le foncteur a étant exact on a donc une suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = a(U \to \varprojlim^{(p)} H^q(U,\mathcal{F}_k)) \Longrightarrow E^n = \varprojlim^{(n)}(\mathcal{F}_k)$$

Les $\mathcal{F}_k$ étant quasi-cohérents $H^q(U,\mathcal{F}_k) = 0$ pour $q > 0$ pour tout ouvert affine donc

$$E_2^{pq} = 0 \qquad \text{pour} \quad q \neq 0 \text{ .}$$ La suite spectrale dégénère

donc et on a :

$$E_2^{p\ n-p} = E_\infty^{p\ n-p} = Gr^p(E^n) = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq n$$

Donc $Gr^n(E^n) = E^n$ et $Gr^p(E^n) = 0$ si $p \neq n$. Ceci signifie que

$a(U \to \varprojlim^{(n)} \Gamma(U, \mathcal{F}_k)) = \varprojlim^{(n)}(\mathcal{F}_k)$ donc que $\varprojlim^{(n)}(\mathcal{F}_k)$ est le faisceau

associé au préfaisceau

$$U \to \varprojlim^{(n)}(\Gamma(U, \mathcal{F}_k))$$

La proposition 3. résulte maintenant trivialement de la proposition 2. et

du lemme 4.

Démonstration du théorème 3.

Les proposition 1 et 2 montrent que la première suite spectrale vérifie
$E^{pq} = 0$, pour, $p \neq 0$ ou 1 . Les différentielles d_r^{pq} sont donc nulles pour r
donc $'E_2^{pq} = {}'E_\infty^{pq}$

$$'Gr^p(E^n) = E_2^{p\ n-p} = 0 \quad \text{si} \quad p \neq 0,1$$

$$'Gr^\circ(E^n) = E^n/F^1(E^n) = \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

$$'Gr^1(E^n) = F^1(E^n) = \varprojlim_k{}^{(1)} H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k) .$$

On a donc une suite exacte

$$(i) \qquad 0 \to \varprojlim^{(1)}(H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k)) \to E^n \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k) \to 0$$

D'autre part la proposition 3 montre que la 2ème suite spectrale est dégénérée

$$'' E_2^{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0$$

$$''E_\infty^{p\ n-p} = {}''E_2^{p\ n-p} = {}''Gr^p(E^n) = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq n$$

$$''Gr(E^n) = E^n = H^n(X, \varprojlim_k(\mathcal{F}_k))$$

En remplaçant dans la suite exacte (i) on obtient finalement la suite exacte

$$\boxed{0 \to \varprojlim^{(1)}(H^{n-1}(X, \mathcal{F}_k)) \to H^n(X, \varprojlim(\mathcal{F}_k)) \xrightarrow{h_n} \varprojlim H^n(X, \mathcal{F}_k) \to 0}$$

Or d'après le lemme 2. (J_k) vérifie (ML), donc son quotient

Le théorème 3 résulte alors du lemme 4, en remarquant que l'homomorphisme h'_n est bien l'homomorphisme canonique h_n à isomorphisme près.

§.2. Le théorème de Comparaison

a) Forme affine

Théorème 4. Soient $f : X \to Y = \operatorname{Spec} A$ un morphisme propre de schémas noethériens, $Y' = V(\mathfrak{J})$ un fermé de $Y, X' = f^{-1}(Y')$.

Soit $\mathcal{F}$ un O_X-Module cohérent, et posons

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}/_{\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes_{O_X} f^*(O_Y/_{\mathfrak{J}^{k+1}}) \text{ . Alors :}$$

1°/ La filtration sur $H^n(X, \mathcal{F})$ définie par les noyaux des homomorphismes

$H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}_k)$ est I-bonne, et l'homomorphisme canonique

$$\varphi_n : (H^n(X, \mathcal{F}))^{\wedge} \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

(où le 1er membre est le complété pour la topologie I-adique) est un isomorphisme topologique.

2°/ Pour tout n le système projectif $(H^n(X, \mathcal{F}_k))_{k \geq 0}$ vérifie (ML) et l'homomorphisme canonique

$$\psi_n : H^n(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k) \text{ est un isomorphisme}$$

Corollaire. Sous les conditions du théorème 4, on a un isomorphisme canonique

$$\rho_n : (H^n(X, \mathcal{F}))^{\wedge} \xrightarrow{\sim} H^n(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$$

L'existence des divers homomorphismes canoniques, ainsi que la formule [illegible]$_n \circ \rho_n$, sont très faciles à prouver, et ce sera fait pour plus de clarté dans le cas global au b).

Démonstration - L'entier n étant fixé, posons

$$H = H^n(X, \mathcal{F}) \qquad H_k = H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

On a un homomorphisme canonique $H \to H_k$ déduit de l'homomorphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_k$,

et une suite exacte de cohomologie

$$H^n(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H \to H_k \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F})$$

Nous poserons

$$R_k = \operatorname{Ker}(H \to H_k) = \operatorname{Im}(H^n(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}))$$

$$Q_k = \operatorname{Coker}(H \to H_k) = \operatorname{Ker}(H^{n+1}(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}))$$

$$= \operatorname{Im}(X^n(X, \mathcal{F}_k) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}))$$

de sorte qu'on a la suite exacte.

$$0 \longrightarrow R_k \longrightarrow H \longrightarrow H_k \longrightarrow Q_k \longrightarrow 0$$

Posons $S = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{J}^k$, qui est une A-algèbre de type fini, donc noethérienne. Les modules

$$E = \bigoplus_{k\geq 0} H^n(X, \mathcal{J}^k\mathcal{F}) \qquad M = \bigoplus_{k\geq 0} H^n(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \qquad R = \bigoplus_{k\geq 0} R_k ,$$

sont munis canoniquement d'une structure de S-module gradués à l'aide des homomorphismes :

$$\mu^k_{x,m} : H^n(X, \mathcal{J}^k\mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{J}^{k+m}\mathcal{F}) \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{J}^m$$

En effet, c'est clair pour E et M, et d'autre part le diagramme commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd}
H^n(X, \mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) \arrow[r, "\mu^{k+1}_{x,m}"] \arrow[d] & H^n(X, \mathcal{J}^{k+m+1}\mathcal{F}) \arrow[d] \\
H^n(X, \mathcal{F}) \arrow[r, "\times(x)"] & H^n(X, \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

montre que pour tout $x \in \mathcal{J}^m$:

$$xR_k = x\,\mathrm{Im}(H^n(X,\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^n(X,\mathcal{F}))$$
$$\subset \mathrm{Im}(H^n(X,\mathfrak{J}^{k+m+1}\mathcal{F}) \to H^n(X,\mathcal{F})) = R_{k+m}$$

donc $\mathfrak{J}^m R_k \subset R_{k+m}$ d'où notre assertion. Ceci prouve aussi que R est quotient du sous S-module gradué M de E.

Or d'après le § 1 théorème 2, E est un S-module gradué de type fini donc, puisque S est noethérien, M et a fortiori R sont des S-modules de type fini Il résulte donc de Bourbaki (Alg. Com. Ch. III §3 théorème 1) que <u>la filtration R_k sur H est $\mathfrak{J}$-bonne</u>, donc définit sur H la topologie $\mathfrak{J}$-adique.

Passons à la démonstration du reste du théorème 4.

Soit $\gamma_m : H^{n+1}(X,\mathfrak{J}^{k+m+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X,\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F})$

le morphisme déduit de l'injectioncanonique. Il est donc clair par définition de Q_k que $\gamma_m(Q_{k+m}) \subset Q_k$

Supposons démontré le

<u>Lemme 5</u> : Il existe $m > o$ et k_o tels que $\gamma_m(Q_{k+m}) = 0$ pour tout $k \geqslant k_o$

Démontrons alors le théorème 4.

De la fonctorialité de la suite exacte de cohomologie on déduit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & R_{k+m} & \longrightarrow & H & \to & H_{k+m} & \longrightarrow & Q_{k+m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_m} & & \\
0 & \longrightarrow & R_k & \longrightarrow & H & \to & H_k & \longrightarrow & Q_k & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Soit $k \geqslant k_0$. On a alors d'après le lemme 5

$$\mathrm{Im}(H_{k+m} \longrightarrow H_k) \subset \mathrm{Ker}(H_k \to Q_k) = \mathrm{Im}(H \longrightarrow H_k)$$

D'autre part la commutativité de (2) montre que.

$\mathrm{Im}(H_{k+m} \longrightarrow H_k) \supset \mathrm{Im}(H \to H_k)$. On a donc pour $k \geqslant k_o$

$\mathrm{Im}(H_{k+m} \longrightarrow H_k) = \mathrm{Im}(H \to H_k)$. Il en résulte donc que pour tout $k' \geqslant k+m$

$\mathrm{Im}(H_{k'} \longrightarrow H_k = \mathrm{Im}(H \to H_k)$, donc que le système projectif $(H_k)_{k \geqslant 0}$

vérifie (ML).

On en déduit donc du théorème de commutation (§1 théorème 3) que l'homomorphisme canonique

$$\Psi_n : H^n(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$ est bijectif (Puisque Supp $\hat{\mathcal{F}} \subset \hat{X}$)

d'où 2°).

D'autre part des suites exactes

$$0 \longrightarrow R_k \longrightarrow H \longrightarrow H_k \longrightarrow Q_k \longrightarrow 0$$ on déduit les suites exactes

$$0 \longrightarrow H/R_k \longrightarrow H_k \longrightarrow Q_k \longrightarrow 0$$

qui forment évidemment un système projectif de suites exactes.

Or le système projectif (H/R_k) est strict, R_k étant une filtration, donc a fortiori il vérifie (ML).

D'après le §1 Lemme 3 on en déduit que la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_k (H/R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H_k \longrightarrow \varprojlim_k Q_k \longrightarrow 0$$ est exacte.

Or d'après le lemme 5, $\varprojlim_k Q_k = 0$ donc on a un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_k (H/R_k) \simeq \varprojlim_k H_k$$

Enfin (R_k) étant une filtration $\mathfrak{J}$-bonne de H définit sur H la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, donc

$$\varprojlim_k (H/R_k) = \hat{H}.$$ d'où le 1°) et le théorème 4.

Reste donc à démontrer le lemme 5.

Posons $N = \bigoplus_{k\geqslant o} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F})$ $\quad Q = \bigoplus_{k\geqslant o} Q_k$

α) On montre facilement que Q est un sous S-module gradué de N, qui est de type fini d'après le § 1 théorème 2. Q est donc aussi un S-module gradué de type fini, S étant noethérien. D'après les propriétés générales des modules gradués de type fini, on voit donc qu'il existe k_o et h tel que

$$Q_{k+h} = S_h\, Q_k \quad \text{pour } k \geqslant k_o \quad (\text{avec } S_h = \mathfrak{J}^h)$$

β) Il existe $\nu > o$ tel que $\alpha_\nu(S_\nu)\, Q = 0$ où $\alpha_m : \mathfrak{J}^m \to A$ est l'injection canonique

En effet, comme $\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}_k = 0$, $Q_k = \mathrm{Im}(H^n(X, \mathcal{F}_k) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}))$ est annulé par $\mathfrak{J}^{k+1}$ en tant que A-module. Dans le S-module Q , cela signifie que

$$\alpha_{k+1}(S_{k+1})\, Q_k = 0$$

On déduit donc de α qu'il existe $\nu > o$ tel que

$$\alpha_\nu(S_\nu) Q = 0$$

γ) Démonstration du lemme 5.

Soit $x \in \mathfrak{J}^m$. On a la factorisation évidente :

$$\mu^{k+1}_{x,o} : H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}) \xrightarrow{\mu^{k+1}_{x,m}} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma_m} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F})$$

On en déduit, puisque $Q_k = \mathrm{Ker}(H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}))$ est un sous A-module $H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F})$ que

$$\gamma_m(S_m Q_k) = \alpha_m(S_m) Q_k \quad \text{dans le S-module } N .$$

donc m un multiple de h plus grand que ν . Comme

$$Q_{k+m} = S_m Q_k \quad \text{pour } k \geqslant k_o \qquad (\alpha) \text{ on a}$$

$$\gamma_m(Q_{k+m}) = \gamma_m(S_m Q_k) = \alpha_m(S_m) Q_k \subset \alpha_\nu(S_\nu) Q_k = 0$$

[redacted]près le choix de ν . d'où le lemme 5.

b) Forme globale

Théorème 5. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens, Y' un fermé de Y, $X' = f^{-1}(Y')$. Soit $\mathcal{J}$ un Idéal cohérent de définition de Y', et posons pour tout $k \geqslant 0$ et O_X-Module $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \otimes_{O_Y} f^*\left(O_Y/\mathcal{J}^{k+1}\right)$$

Pour tout O_X-Module cohérent $\mathcal{F}$

$R^n\hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}})$ est un $O_{\hat{X}}$-Module cohérent, et on a un diagramme commutatif d'isomorphismes topologiques

$$\begin{tikzcd}
(R^nf_*(\mathcal{F}))^\wedge \arrow[rr, "\rho_n", "\sim"'] \arrow[dr, "\varphi_n"', "\wr"] & & R^n\hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}}) \arrow[dl, "\psi_n", "\sim"'] \\
& \varprojlim_k R^nf_*(\mathcal{F}_k) &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{J}$ un Idéal cohérent de définition de Y', et posons $\mathcal{K} = f^*(\mathcal{J})O_X$. Alors $\mathcal{K}$ est un Idéal cohérent de définition de X.

Construction de φ_n

$\mathcal{F}_k$ est un $O_X/\mathcal{K}^{k+1}$-Module donc $R^nf_*(\mathcal{F}_k)$ est un $O_Y/\mathcal{J}^{k+1}$-Module

On déduit donc de l'homomorphisme canonique $R^nf_*(\mathcal{F}) \to R^nf_*(\mathcal{F}_k)$ un homomorphisme canonique

$$R^nf_*(\mathcal{F}) \otimes_{O_Y}\left(O_Y/\mathcal{J}^{k+1}\right) \to R^nf_*(\mathcal{F}_k)$$

d'où par passage à la limite projective un homomorphisme

$$\varphi_n : (R^nf_*(\mathcal{F}))^\wedge \to \varprojlim_k R^nf_*(\mathcal{F}_k)$$

qui est un homomorphisme continu de $O_{\hat{Y}}$-Modules topologiques par construction.

Construction de ψ_n

Soit $X_k = (X', O_X/_{\mathcal{K}^{k+1}})$ et considérons le diagramme commutatif suivant, où les flèches sont des morphismes canoniques d'espaces annelés :

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "h_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & \hat{X} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ étant cohérent on a $\hat{\mathcal{F}} = i^*(\mathcal{F})$. De plus puisque $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_k \subset |\hat{X}|$ on a

$$\mathcal{F}_k = i_{k_*} i_k^* \mathcal{F}_k$$

i_k étant une immersion fermée, on a donc

$$H^n(X_k, i_k^*(\mathcal{F}_k)) = H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

d'où un homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} H^n(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \to H^n(X_k, h_k^*(\hat{\mathcal{F}})) \\ = H^n(X_k, h_k^* i^*(\mathcal{F})) \\ = H^n(X_k, i_k^*(\mathcal{F})) \\ = H^n(X, \mathcal{F}_k) \end{aligned}$$

d'où par passage à la limite un homomorphisme

$$\psi_{n,x} : H^n(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathcal{F}_k)$$

Soit V un ouvert affine de Y. Appliquant cette construction à $f^{-1}(V)$ on en déduit des homomorphismes commutant aux restrictions

$$\psi_{n,V} : H^n(\hat{X} \cap f^{-1}(V), \hat{\mathcal{F}}) \longrightarrow \varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathcal{F}_k))$$

d'où un homomorphisme

$$\Psi_n : R^n \hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}}) \longrightarrow \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k).$$

Construction de ρ_n

Soit $j : \hat{Y} \to Y$ le morphisme canonique d'espaces annelés. D'après le théorème 1 $R^n f_*(\mathcal{F})$ est un O_Y-Module cohérent donc

$j^*(R^n f_*(\mathcal{F})) = (R^n f_*(\mathcal{F}))^\wedge$. j étant plat, on en déduit un homomorphisme canonique

$$\rho_n : (R^n f_*(\mathcal{F}))^\wedge = j^*(R^n f_*(\mathcal{F})) \to R^n \hat{f}_*(i^*(\mathcal{F})) = R^n \hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}})$$

La démonstration de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(R^n f_*(\mathcal{F}))^\wedge \arrow[rr, "\rho_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & & R^n \hat{f}_*(\hat{\mathcal{F}}) \arrow[dl, "\Psi_n"] \\
& \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k) &
\end{tikzcd}$$

est facile et laissée au lescteur.

Démonstration du théorème 5.

Puisque $R^n f_*(\mathcal{F})$ est un O_Y-Module cohérent la définition du complété d'un Modu montre que si V est un ouvert affine de Y :

$\Gamma(V, (R^n f_*(\mathcal{F}))^\wedge) = \Gamma(V, R^n f_*(\mathcal{F}))^\wedge$ où le 2è membre est le séparé complété pour la topologie $\Gamma(V, \mathcal{J}/V)$-préadique.

D'autre part par définition

$$\Gamma(V, \varprojlim_k R^n f_*(\mathcal{F}_k)) = \varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathcal{F}_k))$$

Le théorème 4 montre donc que φ_n est un isomorphisme topologique, ainsi que les homomorphismes $\Psi_{n,V}$, donc aussi l'homomorphisme Ψ_n par définition de $R^n f_*(\mathcal{F})$, d'où le théorème 5.

Exposé IX : SCHEMAS FORMELS

par Jean-François BOUTOT

Introduction

Soit A un anneau local noethérien complet d'idéal maximal $\underline{m}$: $A = \varprojlim A/\underline{m}^n$. Supposons qu'on ait un foncteur $F : Sch \to (Ens)^{\circ}$, dont la restriction à Sch/S soit représentable si S est artinien ; en particulier, pour tout n, la restriction de F à $Sch_{/A/\underline{m}^n}$ est représentable par une schéma X_n. On obtient ainsi un système inductif de schémas :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A/\underline{m} & A/\underline{m}^2 \arrow[l] & A/\underline{m}^3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & A/\underline{m}^n \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

En général la limite inductive n'existe pas dans la catégorie schémas.

C'est pour faire face à ce genre de problèmes (dans un cadre plus général) que l'on introduit une nouvelle catégorie, celle des schémas formels dont la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine.

Plan de l'exposé

§. 1. Schémas formels affines

1.1. Spectres formels

1.2. Ouverts affines - Fibres

1.3. Morphismes de schémas formels affines

§ 2. Schémas formels

§ 3. Complétion

§ 0. Appendice = Anneaux topologiques

Bibliographie

N. BOURBAKI . Algèbre Commutative . Chapitre 3

A. GROTHENDIECK . Eléments de Géométrie Algébrique [E.G.A.]
Chapitre 0. § 7 et Chapitre I. § 10

§ 1. Schémas formels affines

1.1. Spectres formels

A tout anneau admissible A (0.1), nous allons associer un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, dit spectre formel de A.

L'espace topologique sous-jacent, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$, est l'ensemble des idéaux premiers ouverts de A muni de la topologie de Zariski (si I est un idéal de définition, $\mathfrak{X} = V(I)$ est un fermé de Spec A).

Le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est défini comme une limite projective. Pour tout idéal de définition I_λ de A, soit $\mathcal{O}_\lambda$ le faisceau d'anneaux induit sur $\mathfrak{X}$ par $(A/I_\lambda)^\sim$. Si I_μ est inclus dans I_λ, l'homomorphisme canonique $A/I_\mu \to A/I_\lambda$ induit un homomorphisme de faisceaux $u_{\lambda\mu} : \mathcal{O}_\mu \to \mathcal{O}_\lambda$. On obtient ainsi un système projectif de faisceaux d'anneaux.

Au faisceau d'anneaux discrets $\mathcal{O}_\lambda$ est associé un faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}'_\lambda$ dit pseudo-discret. L'anneau des sections de $\mathcal{O}'_\lambda$ au-dessus d'un ouvert quasi-compact est discret, en particulier si A est noethérien $\mathcal{O}'_\lambda = \mathcal{O}_\lambda$. On obtient ainsi un système projectif de faisceaux d'anneaux topologiques et on pose : $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \mathcal{O}'_\lambda$, où I_λ parcoure l'ensemble filtrant des idéaux de définition. Pour tout ouvert quasi-compact U de χ, on a :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \varprojlim \Gamma(U, \mathcal{O}_\lambda)$$

En particulier, puisque A est séparé et complet :

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \varprojlim A/I_\lambda \simeq A .$$

<u>Définition</u> <u>On dit qu'un espace topologiquement annelé est un schéma formel affine s'il est isomorphe au spectre formel d'un anneau admissible.</u>

<u>Exemple 1.</u> Soit A un anneau noethérien muni de la topologie discrète, alors l'idéal $\{0\}$ est un idéal de définition et $\mathrm{Spf}\ A \simeq \mathrm{Spec}\ A$.

<u>Exemple 2.</u> Soit A un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$ et $\hat{A}$ le séparé-complété de A munide la topologie $\underline{m}$-adique ; alors $\mathrm{Spf}\ \hat{A}$ est réduit à un point $\{\underline{m}\}$ avec pour fibre $\hat{A}$.

1.2. <u>Ouverts affines - Fibres</u>

On dit qu'un ouvert U d'un schéma formel affine $\mathfrak{X}$ est un <u>ouvert formel affine</u> si la restriction de $\mathfrak{X}$ à U est un schéma formel affine. De même que dans le cas des chémas usuels, les ouverts formels affines forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

Plus précisément, soient A un anneau admissible et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\ A$; pour tout $f \in A$, posons $\mathfrak{D}(f) = D(f) \cap \mathfrak{X}$. Les $\mathfrak{D}(f)$ forment une base d'ouverts de $\mathfrak{X}$ et il résulte immédiatement des définitions que l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} | \mathfrak{D}(f))$ est isomorphe au spectre formel affine $\mathrm{Spf}\ A_{\{f\}}$.

En tant que faisceau d'anneau sans topologie, le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ de $\mathrm{Spf}\ A$ admet pour tout point $p \in \mathfrak{X}$ une <u>fibre</u> :

$$\mathcal{O}_p = \varinjlim_{f \notin p} A_{\{f\}} = A_{\{S\}} \quad , \text{si l'on pose } S = A - p$$

C'est un anneau local dont le corps résiduel est canoniquement isomorphe à $k(p)$ corps résiduel en p dans $\mathrm{Spec}\ A$.

1.3. Morphismes de schémas formels affines

Soient A et B des anneaux admissibles, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\ A$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}\ B$ et $\varphi : B \to A$ un homomorphisme continu. L'image réciproque par φ d'un idéal premier ouvert de A est un idéal premier ouvert de B, ainsi l'application canonique ${}^a\varphi$: Spec A → Spec B induit par restriction une application continue :

$$ {}^a\varphi : \mathrm{Spf}\ A \longrightarrow \mathrm{Spf}\ B $$

Pour tout élément g de B, φ induit un homomorphisme continu $B_{\{g\}} \longrightarrow A_{\{\varphi(g)\}}$ compatible aux restrictions, et l'on a : $\mathfrak{D}(\varphi(g)) = {}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(g))$, d'où un homomorphisme continu de faisceaux d'anneaux topologiques :

$$ \tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \longrightarrow {}^a\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) $$

On a ainsi défini un homomorphisme d'espaces topologiquement annelés :

$$ \Phi = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi}) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y} $$

En tant qu'homomorphisme de faisceaux d'anneaux sans topologie, induit pour tout $x \in \mathfrak{X}$ un homomorphisme local sur les fibres :

$$ \varphi_x : \mathcal{O}_{{}^a\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_x $$

Réciproquement, pour qu'un homomorphisme $u = (\psi, \theta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ d'espaces topologiquement annelés soit de la forme $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ où φ est un homomorphisme continu de B dans A, il suffit que pour tout $x \in \mathfrak{X}$, l'homomorphisme

$\theta_x : \mathcal{O}_{\psi(x)} \to \mathcal{O}_x$ soit local.

De tels morphisme sont dits morphismes de schémas formels affines.

En résumé, la catégorie des schémas formels affines est une sous-catégorie pleine de celles des espaces topologiquement annelés en anneaux locaux. Les foncteurs $A \mapsto \mathrm{Spf}\ A$ et $\mathfrak{X} \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ définissent une équivalence de catégories entre la catégorie des anneaux admissibles (avec pour morphismes les homomorphismes continus) et la catégorie duale de celle des schémas formels affines.

§ 2. Schémas formels

2.1. Schémas formels et morphismes de schémas formels

On dit qu'un ouvert U d'un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est un ouvert formel affine si $(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ est un schéma formel affine. On dit que U est un ouvert formel affine noethérien si $(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ est isomorphe au spectre formel d'un anneau adique noethérien.

On dit qu'un espace topologiquement annelé est un schéma formel si tou point possède un voisinage ouvert formel affine. On dit qu'un schéma formel es localement noethérien si tout point possède un voisinage ouvert affine noethér

Proposition 1. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. localement noethérien), les ouverts formels affines (resp. noethérien) forment une base de la topologie de

Démonstration : Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\ A$, les $\mathfrak{D}(f) \simeq \mathrm{Spf}\ A_{\{f\}}$ forment une base de la topologie ; si A est adique noethérien, il en est de même de $A_{\{f\}}$.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels, on appelle morphisme de schémas formels de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tout morphisme $(\psi, \theta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ d'espaces topologiquement annelés tel que, pour tout $x \in \chi$, l'homomorphisme $\theta_x : \mathcal{O}_{\psi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_x$ soit local.

Les schémas formels forment alors une catégorie. De même que dans le cas des schémas usuels, on démontre :

Proposition 2. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel et $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}\ A$ un schéma formel affine. L'application canonique :

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) \to \mathrm{Homcont}(A, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}))$$

est bijective.

2.2. Idéaux de définition

Soient A un anneau admissible, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$ et I un idéal ouvert de A. Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble filtrant des idéaux de définition de A contenus dans I. On notera I^Δ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ défini par :

$$I^\Delta = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (I/I_\lambda)^\sim$$

Etant donné un schéma formel quelconque $\mathfrak{X}$, on dit qu'un faisceau $\mathfrak{J}$ d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un <u>idéal de définition</u> de $\mathfrak{X}$ si tout point de $\mathfrak{X}$ possède un voisinage ouvert affine U tel que $\mathfrak{J}|U$ soit de la forme H^Δ, où H est un idéal de définition de $\Gamma(U,\mathfrak{X})$.

<u>Proposition</u> 1. <u>Si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A$ est un schéma formel affine, tout idéal de définition de $\mathfrak{X}$ est de la forme I^Δ, où I est un idéal de définition de A</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Par hypothèse $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, donc il existe un nombre fini de $f_i \in A$ tels que $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(f_i) = H_i^\Delta$, où H_i est un idéal de définition de $A_{\{f_i\}}$.

L'idéal H_i est de la forme $(K_i)_{\{f_i\}}$, où K_i est un idéal ouvert de A ; soit K un idéal de définition de A contenu dans tous les K_i. L'image canonique de $\mathfrak{J}/K^\Delta$ dans $(A/K)^\sim$ est telle que sa restriction à chaque $\mathfrak{D}(f_i)$ soit de la forme $(K_i/K)^\sim$; c'est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur $\operatorname{Spec} A/K$, il est donc de la forme $(I/K)^\sim$, où I est un idéal de A contenant K. Et alors $\mathfrak{J} = I^\Delta$.

Par ailleurs pour tout i, H_i est un idéal de défintion de $A_{\{f_i\}}$, donc il existe n_i tel que $H_i^{n_i} \subset K_{\{f_i\}}$. Si l'on pose $n = \sup n_i$, il vient $(\mathfrak{J}/K^\Delta)^n = 0$; d'où $(I/K)^n = 0$, l'image de I dans A/K est un idéal nilpotent, donc I est un idéal de définition de A.

Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ est un schéma (usuel), qui est affine (resp. localement noethérien) lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine (resp. un schéma formel localement noethérien).

Il n'est pas certain que tout schéma formel admette des idéaux de définition, cependant :

<u>Proposition 2.</u> <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un schéma formel localement noethérien, alors il existe un plus grand idéal de définition</u> $\mathcal{T}$ <u>de</u> $\mathfrak{X}$. <u>C'est le seul idéal de définition</u> $\mathfrak{J}$ <u>de</u> $\mathfrak{X}$ <u>tel que le schéma</u> $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ <u>soit réduit.</u>

<u>Démonstration</u> : Dans un anneau adique noethérien A il existe un plus grand idéal de définition T, T est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents et l'anneau A/T est réduit (cf. Appendice 0.2.).

Alors il suffit de montrer que si $U \supset V$ sont deux ouverts formels affines noethériens de χ, le plus grand idéal de définition $\mathcal{T}_U$ de U induit en restriction à V le plus grand idéal de définition $\mathcal{T}_V$ de V. Ceci résulte du fait que le schéma $(V, (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_V)/(\mathcal{T}_U|V))$ est réduit.

On dit qu'une famille qu'une famille $(\mathfrak{J}_\lambda)$ d'idéaux de définition d'un schéma formel $\mathfrak{X}$ est un <u>système fondamental d'idéaux de définition</u> s'il existe un recouvrement (U_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tel que, pour tout α, la famille des $\mathfrak{J}_\lambda|U_\alpha$ soit cofinale dans l'ensemble filtrant des idéaux de définition de $\mathfrak{X}|U_\alpha$. Alors le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}_\lambda$.

Si $\mathfrak{X}$ est affine d'anneau $A, (\mathfrak{J}_\lambda = I_\lambda^\Delta)$ est un système fondamental d'idéaux de définition si et seulement si les I_λ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A.

Si $\mathfrak{X}$ est localement noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, les puissances $\mathfrak{J}^n$ de $\mathfrak{J}$ forment un système fondamental d'idéaux de définition.

2.3. Limites inductives de schémas

Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier n, soit X_n le schéma $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^{n+1})$ et $f_n : X_n \longrightarrow \mathfrak{X}$ le morphisme canonique.

Pour $n \leqslant m, \mathfrak{J}^{m+1}$ est inclus dans $\mathfrak{J}^{n+1}$ et l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^{m+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^{n+1}$ définit un morphisme de schémas $f_{nm} : X_n \longrightarrow X_m$ tel que $f_n = f_m \circ f_{nm}$. Les schémas X_n et les morphismes f_{nm} constituent donc un système inductif de schémas.

Proposition Le schéma formel localement noethérien $\mathfrak{X}$ muni des morphismes f_n est une limite inductive dans la catégorie des schémas formels du système inductif de schémas (X_n, f_{nm}).

Démonstration : Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : X_n \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels tel que $g_n = g_m \circ f_{nm}$.

Les applications continues sous-jacentes aux g_n sont toutes identiques à une même application $\Psi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$. Les homomorphismes de faisceaux $\Psi^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}$ induits par les g_n forment un système projectif, dont la limite projective est un homomorphisme $\Psi^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, puisque $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est limite projective des faisceaux $\mathcal{O}_{X_n}$.

On obtient ainsi un morphisme d'espaces annelés $g : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, qui est le seul rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "g"] \\ & \mathfrak{X} & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Montrons que g est un morphisme de schémas formels. La question est locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$, on peut donc supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}\, B$ et $\mathcal{J} = I^{\Delta}$, où I est un idéal de définition de A et $A = \varprojlim A/I^n$. Alors l'existence d'un morphisme de schémas formels affines g rendant commutatifs des diagrammes (*) résulte de la définition des limites projectives d'anneaux et de la correspondance biunivoque entre morphismes de schémas formels affines et homomorphismes continus d'anneaux admissibles. Mais g est unique en tant que morphisme d'espaces annelés, il coïncide donc avec les morphisme défini plus haut.

2.4. <u>Limites inductives de morphismes</u>

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux schémas formels <u>localement noethériens</u>, $\mathcal{T}$ le plus grand idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{J}$ un idéal de définition de $\mathcal{Y}$.

<u>Lemme</u> <u>Pour tout morphisme de schémas formels</u> $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$, <u>on a</u> $f^*(\mathcal{J}) \subset \mathcal{T}$.

<u>Démonstration</u> : La question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ affines : $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}\, B$ où A et B sont des anneaux adiques noethériens. Alors $\mathcal{T} = T^{\Delta}$, où I est le plus grand idéal de définition de B. Un morphisme $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ provient d'un homomorphisme continu $\varphi : B \longrightarrow A$. Les éléments de I sont topologiquement nilpotents, donc aussi ceux de $\varphi(I)$ qui est donc inclus dans T.

De même pour tout entier n : $f^*(\mathcal{J}^n) = (f^*(\mathcal{J}))^n \subset \mathcal{T}^n$ d'où, si l'on pose $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{T}^{n+1})$ et $Y_n = (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{J}^{n+1})$ un système inductif de morphismes de schémas

$$f_n : X_n \longrightarrow Y_n$$

On notera $\mathrm{Hom\,ind}(X.,Y.)$ l'ensemble des morphismes de systèmes inductifs de schémas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Proposition</u> <u>L'application</u> $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \to \mathrm{Hom\,ind}(X.,Y.)$ <u>définie par</u> $f \longmapsto (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est une bijection.</u>

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence immédiate, par définition des limites inductives, de $\mathfrak{X} = \varinjlim X_n$ et $\mathfrak{Y} = \varinjlim Y_n$ dans la catégorie des schémas formels.

<u>Corollaire</u> <u>Cette application induit une bijection canonique</u>

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(X_n,Y_n) .$$

<u>Démonstration</u> : En effet, pour $m \leqslant n$, la donnée d'un morphisme $f_n : X_n \to Y_n$ détermine un morphisme et un seul $f_m : X_m \to Y_m$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{f_m} & Y_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array}$$

comme on le vérifie en se ramenant au cas affine. On a ainsi défini une application

$$\varphi_{mn} : \mathrm{Hom}(X_n,Y_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_m,Y_m)$$

d'où un système projectif d'ensembles. On a ainsi :

$$\mathrm{Hom\,ind}(X.,Y.) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}(X_n,Y_n)$$

§ 3. Complétion

3.1. Complété d'un schéma

Soient X un schéma localement noethérien et X' un fermé de l'espace topologique sous-jacent à X. Soit Φ l'ensemble des faisceaux cohérents d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tels que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = X'$. L'ensemble Φ est non vide et filtrant pour la relation $\supset$. On identifiera $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ à sa restriction à X', les $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ forment alors un système projectif de faisceaux d'anneaux dont la limite projective est un faisceau d'anneaux topologiques $(\mathcal{O}_X)_{/X'}$.

Proposition L'espace toplogiquement annelé $(X', (\mathcal{O}_X)_{/X'})$ est un schéma formel localement noethérien.

Démonstration : La question étant locale on peut supposer $X = \mathrm{Spec}\, A$, avec A noethérien et $\mathcal{J} = \tilde{I}$ où I est un idéal de A. Alors X' est l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent I.

Soient $\hat{A} = \varprojlim A/I^n$ le séparé-complété de A pour la topologie I-préadique et $\hat{I} = I\hat{A}$. On sait que $\hat{A}$ est un anneau $\hat{I}$-adique noethérien et que $\hat{A}/\hat{I}^n = A/I^n$; donc les idéaux premier ouverts de $\hat{A}$ sont des idéaux $\hat{p}$, où p est un idéal premier de A contenant I, d'où l'égalité d'espaces topologiques $X' = \mathrm{Spf}\, \hat{A}$. Par ailleurs $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n = (A/I^n)^\sim = (\hat{A}/\hat{I}^n)^\sim$, d'où l'égalité des espaces annelés $(X', (\mathcal{O}_X)_{/X'})$ et $\mathrm{Spf}\, \hat{A}$.

On appelle ce schéma formel le complété de X le long de X' et on le note $X_{/X'}$ ou $\hat{X}$.

Pour tout faisceau $\mathcal{J} \in \Phi$, la famille $(\mathcal{J}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est localement cofinale dans Φ. Pour tout $n \geqslant 0$, soit X'_n le schéma $(X', \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+1})$, on a alors :

$$\hat{X} = \varinjlim X'_n$$

la limite inductive étant prise dans la catégorie des schémas formels.

Les homomorphismes canonique $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ définissent par passage à la limite projective un morphisme canonique $i : \hat{X} \longrightarrow X$, qui induit l'inclusion sur les espaces topologiques sous-jacents.

3.2. <u>Complété d'un faisceau cohérent</u>

Soient comme précédemment X un schéma localement noethérien, X' un fermé de X et $\hat{X}$ le complété de X le long de X' .

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$- module <u>cohérent</u>, on appelle <u>complété de $\mathcal{F}$ le long de X'</u> , le $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -module topologique $\hat{\mathcal{F}}$ défini par :

$$\hat{\mathcal{F}} = \varprojlim_{\mathcal{J} \in \Phi} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$$

De tout homomorphisme de $\mathcal{O}_X$ - modules cohérents $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, on déduit un système projectif d'homomorphismes de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$-modules :

$$u_{\mathcal{J}} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$$

d'où, en passant à la limite projective un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -modules topologiques :

$$\hat{u} : \hat{\mathcal{F}} \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}$$

On vérifie immédiatement que l'on a ainsi défini un <u>foncteur additif covariant</u> $\mathcal{F} \longmapsto \hat{\mathcal{F}}$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ -modules topologiques.

Etant donné un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent $\mathcal{F}$, les homomorphismes canoniques $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ forment un système projectif (pour $\mathcal{J} \in \Phi$). D'où en passant à la limite projective un homomorphisme canonique ;

$$\mathcal{F} \longrightarrow i_* \hat{\mathcal{F}}$$

dont on déduit par adjonction un homomorphisme canonique :

$$i^*\mathcal{F} \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}$$

Théorème Avec les hypothèses et les notations précédentes :

(i) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \hat{\mathcal{F}}$ est exact.

(ii) L'homomorphisme canonique $i^*\mathcal{F} \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme.

Démonstration : L'assertion est locale et conséquence immédiate du lemme suivant (cf. BOURBAKI, Algèbre Commutative, chap.III, §3,n°4, Th.3), lui-même corollaire du théorème de Krull (ou du lemme d'Artin-Rees) :

Lemme Soient A un anneau noethénien et I un idéal de A. Pour tout A-module M, soit $\hat{M}$ le séparé-complété de M pour la topologie I-préadique. Alors :

(i) Le foncteur $M \longmapsto \hat{M}$ est exact dans la catégorie des A-modules de type fini.

(ii) L'application $\hat{A}$-linéaire canonique $M \otimes_A \hat{A} \to \hat{M}$ est un isomorphisme si M est un A-module de type fini.

Corollaire Le morphisme d'espaces annelés $i : \hat{X} \to X$ est plat.

Proposition Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, le noyau de l'homomorphisme canonique : $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X',\hat{\mathcal{F}})$ déduit de $\mathcal{F} \to i_* \mathcal{F}$ est formé des sections nulles dans un voisinage de X'

Démonstration : Par définition de $\hat{\mathcal{F}}$ l'image d'une telle section est nulle.

Réciproquement, soit $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ dont l'image dans $\Gamma(X',\hat{\mathcal{F}})$ est nulle ; montrons que pour tout $x \in X'$, $s_x = 0$ .La question étant locale, on peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$, où A est un anneau noethérien et $X' = V(I)$, où I est un idéal de A . Alors $\mathcal{F}$ est de la forme $\tilde{M}$, où M est un A-module de type fini.

L'homomorphisme $\Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X',\hat{\mathcal{F}})$ est l'homomorphisme canonique $M \to \hat{M}$, dont le noyau est l'ensemble des éléments de M annulés par un élément de $1 + I$. Il existe donc $f \in I$ tel que $(1+f)s = 0$

En tout point x de X' , on a : $(1_x + f_x)s_x = 0$

Mais $I_x \subset \operatorname{Rad} \mathcal{O}_x$; donc $1_x + f_x$ est inversible dans $\mathcal{O}_x$ et $s_x = 0$.

<u>Corollaire</u> Supp $\hat{\mathcal{F}} = (\operatorname{Supp} \mathcal{F}) \cap X'$

3.3. <u>Prolongement d'un morphisme aux complétés</u>

Soient X et Y deux schémas localement noethériens et $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Soient X' un fermé de X et Y' un fermé de Y tel que $f(X') \subset Y'$ .On peut toujours trouver un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ et un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{K}$ de $\mathcal{O}_Y$ tels que :

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = X' \qquad \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{K}) = Y' \qquad \text{et} \quad f^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{J} .$$

On a alors pour tout n $\quad f^*(\mathcal{K}^n) \subset \mathcal{J}^n$.

Soient $X'_n = (X',\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+1})$ et $Y'_n = (Y',\mathcal{O}_Y/\mathcal{K}^{n+1})$, on déduit de f un morphisme de schémas $f'_n : X'_n \longrightarrow Y'_n$.

Les morphismes $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système inductif, d'où à la limite un morphisme de schémas formels :

$$\hat{f} = \varinjlim f'_n \ : \ \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$$

On vérifie que $\hat{f}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ (il suffit de le constater dans le cas affine) et on dit que c'est le <u>prolongement de f aux complétés</u> de X et Y le long de X' et Y'. L'application continue sous-jacente à $\hat{f}$ est la restriction de f à X'.

On a : $(g\circ f)^\wedge = \hat{g}\circ\hat{f}$ et $\widehat{id_X} = id_{\hat{X}}$

On a ainsi défini un foncteur covariant $X \longmapsto \hat{X}$ de la catégorie des schémas dans celle des schémas formels.

<u>Proposition</u> <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux S-schémas localement noethériens avec</u> Y <u>de type fini sur</u> S. <u>Soient</u> X' <u>un fermé de</u> X <u>et</u> Y' <u>un fermé de</u> Y, f <u>et</u> g <u>deux S-morphismes de</u> X <u>dans</u> Y <u>tels que</u> $f(X')\subset Y'$ <u>et</u> $g(X')\subset Y'$.
<u>Alors</u> : $\hat{f}=\hat{g}$ <u>si et seulement si</u> f <u>et</u> g <u>coïncident dans un voisinage de</u> X'.

<u>Démonstration</u> : Si f et g coïncident dans un voisinage de X', on a d'après les définitions $\hat{f}=\hat{g}$.

Réciproquement supposons $\hat{f}=\hat{g}$, et montrons que f et g coïncident dans un voisinage de X'. La question étant locale, on peut supposer X et Y affines noethériens X = Spec B, Y = Spec C et S affine, S = Spec A, C étant une A-algèbre de type fini. Les morphismes f et g proviennent d'homomorphismes de A-algèbres ρ et $\sigma : C \to B$, qui ont même prolongement par continuité aux séparés-complétés.

D'après le paragraphe précédent, pour tout $s\in C$ $\rho(s)=\sigma(s)$ dans un voisinage de X' (dépendant de s). Par hypothèse C est de type fini sur A, il existe donc un voisinage V de X' tel que $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ coïncident dans pour tout $s\in C$. Alors f et g coïncident dans tout ouvert affine inclus dans X donc dans un voisinage de X'.

§ 0. Appendice : Anneaux topologiques

0.1. Quelques classes d'anneaux topologiques

On dit qu'un anneau topologique A est linéairement topologisé s'il existe un système fondamental de voisinages de zéro formé d'idéaux (nécessairement ouverts). On dit alors qu'un idéal I de A est un idéal de définition si I est ouvert et si pour tout voisinage V de zéro, il existe un entier $n>0$ tel que I^n soit inclus dans V.

Un anneau linéairement topologisé dans lequel existe un idéal de définition est dit préadmissible, les idéaux de définition forment alors un système fondamental de voisinages de zéro. Si de plus l'anneau est séparé et complet, on dit qu'il est admissible.

On dit qu'un anneau préadmissible est préadique s'il existe un idéal de définition dont les puissances forment un système fondamental de voisinages de zéro. Il en est alors de même pour les puissances de tout idéal de définition. Si de plus l'anneau est séparé et complet, on dit qu'il est adique.

Proposition Soient A un anneau admissible et I un idéal de définition de A, alors $I \subset \mathrm{Rad}\, A$.

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout $x \in I$, $1+x$ est inversible. Or par hypothèse A est séparé et complet et (I^n) tend vers zéro, donc la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$ est convergente dans A. Soit y sa somme, on a $y(1+x) = 1$.

0.2. Eléments topologiquement nilpotents

Dans un anneau topologique, on dit qu'un élément x est topologiquement nilpotent si 0 est une limite de la suite $(x^n)_{n>o}$. On vérifie immédiatemen les assertions suivantes :

Proposition Soient A un anneau préadmissible, I un idéal de définition et $x \in A$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) x est topologiquement nilpotent

(ii) l'image canonique de x dans A/I est nilpotente

(iii) x est contenu dans un idéal de définition

Corollaire 1. L'ensemble T des éléments topologiquement nilpotents est un idéal ouvert, l'image réciproque du nilradical de A/I.

Corollaire 2. Soit I_o un idéal de A ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) I_o est le plus grand idéal de définition de A

(ii) I_o est un idéal de définition maximal

(iii) I_o est un idéal de définition tel que A/I_o soit réduit

Et alors $I_o = T$.

Corollaire 3. Un anneau préadmissible noethérien possède un plus grand idéal de définition.

0.3. Anneaux complets de fractions

Soit A un anneau linéairement topologisé, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un système fondamental de voisinages de zéro formé d'idéaux et S une partie multiplicative de A. Alors $S^{-1}A$ est un anneau linéairement topologisé, les $S^{-1}I_\lambda$ formant un système fondamental de voisinages de zéro. On appelle <u>anneau complet des fractions</u> de A à dénominateurs dans S, noté $A\{S^{-1}\}$, le séparé complété de $S^{-1}A$ pour cette topologie :

$$A\{S^{-1}\} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} S^{-1}A/S^{-1}I_\lambda$$

L'application canonique $A \longrightarrow S^{-1}A$ est continue pour les topologies ci-dessus ; si on la compose avec l'application canonique $S^{-1}A \to A\{S^{-1}\}$, on obtient un homomorphisme canonique continu $A \to A\{S^{-1}\}$, limite projective des homomorphismes $A \to S^{-1}(A/I_\lambda)$.

Cet homomorphisme $A \to A\{S^{-1}\}$ est caractérisé par la propriété <u>universelle</u> suivante : Tout homomorphisme continu u de A dans un anneau linéairement topologisé B, séparé et complet, tel que $u(S)$ soit formé d'éléments inversibles de B, se factorise d'une manière unique en $A \to A\{S^{-1}\} \xrightarrow{u'} B$, où u' est continu.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si</u> A <u>est un anneau adique noethérien</u>, $A\{S^{-1}\}$ <u>est plat sur</u> A.

<u>Démonstration</u> : En effet $A\{S^{-1}\}$ est le séparé-complété de l'anneau noethérien $S^{-1}I$ pour la topologie $S^{-1}I$-préadique (où I est un idéal de définition de A), il est donc plat sur $S^{-1}A$, qui est lui-même plat sur A.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si</u> A <u>est admissible (resp. adique, resp. adique noethérien), il en est de même de</u> $A\{S^{-1}\}$.

<u>Démonstration</u> : cf. EGA 0 - 7.6.11.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal ouvert de A, alors $S^{-1}\mathfrak{A}$ est un idéal ouvert de

$S^{-1}A$; soit $\mathfrak{a}\{S^{-1}\} = \varprojlim S^{-1}\mathfrak{a}/S^{-1}I_\lambda$ son séparé-complété. C'est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$ et l'application canonique : $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a} \to A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est un isomorphisme.

Inversement si $\mathfrak{a}'$ est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$, il s'écrit : $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\{S^{-1}\}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de A. En particulier :

<u>Proposition 3. L'application</u> $\underline{p} \mapsto \underline{p}\{S^{-1}\}$ <u>est une bijection croissante de l'ensemble des idéaux premiers ouverts de</u> A <u>tels que</u> $\underline{p} \cap S = \emptyset$ <u>sur l'ensemble des idéaux premiers ouverts de</u> $A\{S^{-1}\}$.

<u>De plus les corps des fractions de</u> $A\{S^{-1}\}/\underline{p}\{S^{-1}\}$ <u>et de</u> $A/\underline{p}$ <u>sont canoniquement isomorphes.</u>

0.4. <u>Cas particuliers</u>

Soit A un anneau linéairement topologisé et $f \in A$, soit S_f la partie multiplicative $\{f^n / n \geq 0\}$ on notera $A_{\{f\}} = A\{S_f^{-1}\}$. Si $g \in A$, il y a un homomorphisme continu canonique $A_{\{f\}} \to A_{\{fg\}}$.

Ainsi si f parcoure une partie multiplicative S de A, les $A_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant ; on pose :

$$A_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}} .$$

Pour tout $f \in S$, on a un homomorphisme $A_{\{f\}} \to A\{S^{-1}\}$, d'où par passage à la limite inductive un homomorphisme canonique

$$A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\} .$$

<u>Proposition 1. Si</u> A <u>est adique noethérien,</u> $A\{S^{-1}\}$ <u>est plat</u>

<u>Démonstration</u> : D'après un résultat du paragraphe précédent, $A\{S^{-1}\}$ est plat

sur $A_{\{f\}}$ pour tout $f \in S$, donc sur la limite inductive.

<u>Remarque</u> : Contrairement au cas des anneaux de fractions usuels, on n'a pas en général $A_{\{S\}} = A\{S^{-1}\}$.

<u>Proposition 2.</u> <u>Soient</u> A <u>un anneau admissible</u>, $\underline{p}$ <u>un idéal premier ouvert de</u> A <u>et</u> $S = A - \underline{p}$. <u>Alors</u> :

(i) <u>les anneaux</u> $A\{S^{-1}\}$ <u>et</u> $A_{\{S\}}$ <u>sont locaux</u>,

(ii) <u>l'homomorphisme canonique</u> $A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\}$ <u>est local</u>,

(iii) <u>les corps résiduels de</u> $A_{\{S\}}$ <u>et</u> $A\{S^{-1}\}$ <u>sont canoniquement isomorphes au corps des fractions de</u> $A/\underline{p}$.

<u>Démonstration</u> :

a. <u>$A\{S^{-1}\}$ est local :</u> Soit $I \subset \underline{p}$ un idéal de définition de A , alors $A\{S^{-1}\}$ est le complété de A_p pour la topologie définie par l'idéal $S^{-1}I$ inclus dans l'idéal maximal $\underline{p}A_p$, il est donc local d'idéal maximal $\underline{p}\{S^{-1}\}$.

b. <u>$A_{\{S\}}$ est local</u> : Soit $\underline{m} = \varinjlim_{f \in S} \underline{p}_{\{f\}}$, on montre facilement (mais c'est ennuyeux à écrire), en remontant la limite inductive et en se servant du fait que $I \subset \mathrm{Rad}\, A$, qu'un élément de $A_{\{S\}}$ qui n'appartient pas à $\underline{m}$ est inversible. Donc $A_{\{S\}}$ est local d'idéal maximal $\underline{m}$.

c. <u>L'homomorphisme</u> $A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\}$ <u>est local</u> : En effet l'image de $\underline{p}_{\{f\}}$ dans $A\{S^{-1}\}$ est contenue dans $\underline{p}\{S^{-1}\}$; à fortiori il en est de même pour l'image de $\underline{m} = \varinjlim \underline{p}_{\{f\}}$.

d. <u>Les corps résiduels sont isomorphes</u> : En effet les homomorphismes canoniques $A_p \longrightarrow A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\}$ induisent par passage au quotient des homomorphismes $A_{\underline{p}}/pA_{p} \longrightarrow A_{\{S\}}/m \longrightarrow A\{S^{-1}\}/\underline{p}\{S^{-1}\}$ et on a vu plus haut que le composé est un isomorphisme.

<u>Corollaire</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau adique noethérien,</u> $\underline{p}$ <u>un idéal premier ouvert de</u> A <u>et</u> $S = A - \underline{p}$. <u>Alors les anneaux</u> $A\{S^{-1}\}$ <u>et</u> $A_{\{S\}}$ <u>sont noethériens et</u> $A\{S^{-1}\}$ <u>est fidèlement plat sur</u> $A_{\{S\}}$.

<u>Démonstration</u> : L'homomorphisme $A_{\{S\}} \longrightarrow A\{S^{-1}\}$ est local et plat, donc fidèlement plat. On a vu plus haut que $A\{S^{-1}\}$ est noethérien, par fidèle platitude il en est de même de $A_{\{S\}}$.

RE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE d'ORSAY
969/70

16036

Exposé n° 10 :
par A. BEAUVILLE

. - INTRODUCTION

Dans tout cet exposé, on considère un anneau noethérien A et un idéal définition I de A ; on posera $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = V(I)$. Pour tout schéma X opre sur S , on désignera par $\hat{X}$ le complété formel de X le long de la partie mée $X' = h^{-1}(S')$ (où h est le morphisme structural) ; en particulier, Spf A). Pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent $\underline{F}$, on notera $\hat{\underline{F}}$ le complété de $\underline{F}$ long de X' , qui est un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent. Pour tout morphisme (nécessaire- propre) $f : X \to Y$ de S-schémas propres, on désignera par $\hat{f}$ le prolongement f aux complétés.

osition 1.-

Soient $\underline{F}$ et $\underline{G}$ deux $\underline{O}_X$-Modules cohérents ; on a des isomorphismes :

$$H^i(X,\underline{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\hat{X},\hat{\underline{F}})$$
$$\mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}})$$

tout $i > 0$.

La première partie de la proposition résulte du théorème de comparaison et ait que les $H^i(X,\underline{F})$ sont des A-modules de type fini, donc complets pour la ogie I-adique. D'autre part, soit $i_X : \hat{X} \to X$ le morphisme canonique ; on a un hisme :

$$\varphi_o : i_X^* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{\hat{X}}}(i_X^*\underline{F},i_X^*\underline{G})$$

orphisme φ_o est défini en effet pour un morphisme plat i_X quelconque s annelés). On en déduit par l'algèbre homologique des homomorphismes :

$$\varphi_n : i_X^* \underline{\mathrm{Ext}}^n_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^n_{\underline{O}_{\hat{X}}}(i_X^*\underline{F}, i_X^*\underline{G})$$

Les φ_n sont en fait des isomorphismes ; on peut en effet, pour le vérifier, supposer X affine et choisir une résolution libre $\underline{L}_\circ$ de $\underline{F}$; $i_X^*(\underline{L}_\circ)$ est alors une résolution libre de $i_X^*(\underline{F})$, d'où le résultat.

Soit $E(\underline{F},\underline{G})$ (resp. $E(\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}})$) la suite spectrale des Ext sur X (resp. $\hat{X}$) associée à $\underline{F}$ et $\underline{G}$ (resp $\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}}$).

Le morphisme plat i_X définit un homomorphisme de suites spectrales :

$$\psi : E(\underline{F},\underline{G}) \to E(\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}})$$

qui se éduit en degré 2 et en degré infini à :

$$\psi_2^{pq} : H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G})) \to H^p(\hat{X},\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\hat{\underline{F}},\underline{G}))$$

$$\psi^n : \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G}) \to \mathrm{Ext}^n_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}})$$

Les ψ_2^{pq} sont des isomorphismes d'après les remarques précédentes ; les ψ^n sont donc eux-mêmes des isomorphismes, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1.

Le foncteur $\underline{F} \rightsquigarrow \hat{\underline{F}}$ de la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules cohérents dans la catégorie des $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules cohérents est pleinement fidèle.

C'est un cas particulier de la proposition 1.

§ 2. - LE THEOREME D'EXISTENCE

Théorème 1.-

Sous les hypothèses du §1, le foncteur $\underline{F} \rightsquigarrow \hat{\underline{F}}$ est une équivalence de la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules cohérents avec la catégorie des $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules cohérents.

A. Démonstration dans le cas projectif

En gardant les notations du §1, on pose en outre $S_k = \mathrm{Spec}(A/I^{k+1})$; pour tout $\hat{S}$-schéma formel propre $\mathfrak{X}$, et tout $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\underline{F}$, on pose

$\mathfrak{X}_k = \mathfrak{X} \times_{\hat{S}} Y_k \quad , \quad \underline{F}_k = \underline{F} \otimes_{\underline{O}_{\mathfrak{X}}} \underline{O}_{X_k} = F/_{I^{k+1}\underline{F}}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_o & \rightarrow & X_1 & \rightarrow \dots \rightarrow & X_k & \rightarrow \dots & \rightarrow & \mathfrak{X} \\
\downarrow f_o & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_k & & & \downarrow f \\
S_o & \rightarrow & S_1 & \rightarrow \dots \rightarrow & S_k & \rightarrow \dots & \rightarrow & S
\end{array}$$

Proposition 2.-

Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \hat{S}$ un morphisme propre de schémas formels, $\underline{L}$ un $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Module inversible ; on suppose que $\underline{L}_o = \underline{L}/_{I\underline{L}}$ est ample. Pour tout $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Module $\underline{F}$ et tout entier n, on pose $\underline{F}(n) = \underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n}$. Alors, pour tout $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\underline{F}$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$:

(i) L'homomorphisme canonique $H^o(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) \rightarrow H^o(X_k,\underline{F}_k(n))$ est surjectif pour tout $k \geqslant o$.

(ii) On a $H^q(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) = o$ pour tout $q > o$.

(iii) $\underline{F}(n)$ est engendré par ses sections au-dessus de $O_{\mathfrak{X}}$.

Posons $\underline{M}_k = I^k\underline{F}/_{I^{k+1}\underline{F}}$, $\underline{M}_k(n) = I^k\underline{F}(n)/_{I^{k+1}\underline{F}(n)} = \underline{M}_k \otimes_{\underline{O}_{X_o}} \underline{L}_o^{\otimes n}$; ces $\underline{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules, annulés par I, peuvent être considérés comme des $\underline{O}_{X_o}$-Modules cohérents. Comme est propre et que $\underline{L}_o$ est ample pour f_o, f_o est projectif. Appliquons à $\underline{O}_{X_o}$-algèbre graduée cohérente $\underline{S}_o = \underline{O}_{X_o} \otimes_{A/I} \left(\bigoplus_{k \geqslant o} I^k/_{I^{k+1}} \right)$ et au $\underline{S}_o$-Module gradué quasi-cohérent de type fini $\underline{M} = \bigoplus_{k \geqslant o} \underline{M}_k$ la généralisation du théorème de Serre déjà utilisée dans l'exposé précédent. On en déduit qu'il existe n_o tel que, pour $n \geqslant n_o$ et pour tout k, on ait :

$$H^q(X_o,\underline{M}_k(n)) = 0 \quad \text{pour tout } q > 0 \text{ .}$$

Donc aussi $H^q(\mathfrak{X},\underline{M}_k(n)) = 0$ pour $n \geqslant n_o$ et $q > 0$. Appliquons la suite exacte de cohomologie à :

$$0 \rightarrow I^k\underline{F}(n)/_{I^{k+1}\underline{F}(n)} \rightarrow I^h\underline{F}(n)/_{I^{k+1}\underline{F}(n)} \rightarrow I^h\underline{F}(n)/_{I^k\underline{F}(n)} \rightarrow 0$$

on trouve d'une part, pour $0 \leqslant h < k$, $n \geqslant n_0$, $q > o$, par récurrance sur $h-k$:

$$H^q\left(\mathfrak{X}, I^h\underline{F}(n)/_{I^k\underline{F}(n)}\right) = 0$$

et en particulier $\quad H^q(\mathfrak{X},\underline{F}_k(n)) = 0$ pour $n \geqslant n_0, k \geqslant o, q > o$;

d'autre part, une autre partie de la suite exacte de cohomologie donne, pour $h = 0$, la suite exacte :

$$H^o(\mathfrak{X},\underline{F}_k(n)) \to H^o(\mathfrak{X},\underline{F}_{k-1}(n)) \to 0$$

Il en résulte que, pour tout $q \geqslant o$, le système projectif $H^q(\mathfrak{X},\underline{F}_k)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, pour $n \geqslant n_0$.

Comme tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ est un ouvert dans chacun des X_k , donc est tel que $H^q(U,\underline{F}_k(n)) = 0$ pour tout $q > o$ et que $H^o(U,\underline{F}_k(n)) \to H^o(U,\underline{F}_h(n))$ est surjective pour $k \geqslant h$, on peut aplliquer à $\mathfrak{X}$ et aux $F_k(n)$ le théorème de commutation de la cohomologie aux limites projectives démontré dans l'exposé précédent : autrement dit, pour $n \geqslant n_o$ l'homomorphisme $H^q(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) \to \varprojlim H^q(\mathfrak{X},\underline{F}_k(n))$ est bijectif pour tout $q \geqslant o$. On en conclut que $H^q(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) = 0$ pour $n \geqslant n_0$, $q \geqslant 1$ et que l'homomorphisme $H^q(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) \to H^q(\mathfrak{X},\underline{F}_k(n))$ est surjectif pour tout k , c'est-à-dire (ii) et (i) . Par ailleurs, puisque L_o est ample, il existe n_1 tel que $\underline{F}_o(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus de X_o ; on peut supposer n_1 pris assez grand pour que l'homomorphisme $H^o(\mathfrak{X},\underline{F}(n)) \to H^o(X_o,\underline{F}_o(n))$ soit surjectif pour $n \geqslant n_1$.
Il existe donc un nombre fini de sections $S_i \in \Gamma(\mathfrak{X},\underline{F}(n))$ dont les images dans $\Gamma(\mathfrak{X},\underline{F}_o(n))$ engendrent $\underline{F}_o(n)$. Comme I est inclus dans l'idéal maximal de l'Anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte de Nakayama que les (S_i) engendrent $\underline{F}(n)$.

Nous dirons (provisoirement ...) qu'un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent est algébrisable s'il est isomorphe au complété d'un $\underline{O}_X$-Module cohérent.

Lemme 2.

Soient $\underline{F}'$, $\underline{G}'$ deux $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules algébrisables. Pour tout homomorphisme $u : \underline{F}' \to \underline{G}'$, Ker(u), Im(u) et Coker(u) sont algébrisables.

Si $\underline{F}' = \hat{\underline{F}}$, $\underline{G}' = \hat{\underline{G}}$, on sait que $u = \hat{V}$, avec $V \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{F}, \underline{G})$ (Corollaire 1). Le lemme des cinq montre alors que Ker(u), Im(u), Coker(u) sont isomorphes à (Ker V)^, (Im V)^, (C ker V)^.

Corollaire 2.

Le théorème 1 est vrai pour un schéma X projectif sur S.

Soit $\underline{L}$ un $\underline{O}_X$-Module ample, $\hat{\underline{L}}$ son complété ; $\hat{\underline{L}}_o = \underline{L}/I\underline{L}$ est un $\underline{O}_{X_o}$-Module ample, et on peut donc appliquer à tout $\underline{O}_{\hat{X}}$- Module cohérent $\underline{F}$ le théorème 2, (iii). On voit ainsi que $\underline{F}$ est quotient d'un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module de la forme $(\hat{\underline{L}}^{\otimes(-n)})^k$, puis, en réitérant l'opération, que $\underline{F}$ est conoyau d'un homomorphisme de deux tels $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules ; comme $(\hat{\underline{L}}^{\otimes(-n)})^k$ est le complété de $(\underline{L}^{\otimes(-n)})^k$, il résulte du lemme 2 ci-dessus que $\underline{F}$ est algébrisable.

B. Passage au cas général

On se place toujours dans les conditions du § 1.

Lemme 3.

Si $0 \to \underline{H}' \to \underline{F}' \to \underline{G}' \to 0$ est une suite exacte de $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules cohérents, si $\underline{H}'$ et $\underline{G}'$ sont algébrisables, $\underline{F}'$ est algébrisable.

On sait (Cartan-Eilenberg ...) que $\underline{F}'$ définit canoniquement un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\underline{G}',\underline{H}')$. Supposons que $\underline{G}' = \hat{\underline{G}}$, $\underline{H}' = \hat{\underline{H}}$; le A-module $\mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\hat{\underline{G}},\hat{\underline{H}})$ est isomorphe $\mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_X}(\underline{G},\underline{H})$ (prop.1) ; il existe donc une suite exacte $0 \to \underline{H} \to \underline{F} \to \underline{G} \to 0$ telle que l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\underline{G},\underline{H})$ correspondant à $\underline{F}$ ait pour image dans $\mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_{\hat{X}}}(\hat{\underline{G}},\hat{\underline{H}})$ l'élément correspondant à $\underline{F}'$; ceci entraîne que $\underline{F}'$ est isomorphe

Lemme 4.-

Soit $u : \underline{F} \to \underline{G}$ un homomorphisme de $\underline{O}_{\hat{X}}$-Modules cohérents. Si $\underline{G}$, Ker(u) et Coker(u) sont algébrisables, $\underline{F}$ est algébrisable.

En effet, ceci entraîne que Im(u) est algébrisable par le lemme 2, puis que $\underline{F}$ est algébrisable par le lemme 3.

Démonstration du théorème d'existence (cas général).

On va utiliser le principe de récurrence noethérienne, en supposant donc le théorème 1 vrai pour tout sous-schéma fermé de X d'espace sous-jacent distinct de X. Appliquons le lemme de Chow au morphisme propre $f : X \to \mathrm{Spec}(A)$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

il existe un A-Schéma projectif Z, un A-morphisme $g : Z \to X$ projectif et surjectif, et un ouvert non vide U de X tel que la restriction $g^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphiesme.

Soient $\underline{F}$ un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent, $\underline{N}$(resp. $\underline{C}$) le noyau (resp. le conoyau) de l'homomorphisme canonique $\rho_{\underline{F}} : \underline{F} \to \hat{g}_*(\hat{g}^*(\underline{F}))$; $\hat{g}^*(\underline{F})$ est algébrisable d'après le cas projectif, donc aussi $\hat{g}_*(\hat{g}^*(\underline{F}))$, par le théorème de comparaison. On va montrer qu'il existe un sous-schéma fermé T de X, ayant X-U pour espace sous-jacent, tel que, si $j : T \to X$ est l'injection canonique, on ait : $\underline{N} = \hat{j}_*(\hat{j}^*(\underline{N}))$ et $\underline{C} = \hat{j}_*(\hat{j}^*(\underline{C}))$. Comme $\hat{j}^*(\underline{N})$ et $\hat{j}^*(\underline{C})$ sont algébrisables par l'hypothèse de [illegible] (via le théorème de comparaison) que $\underline{N}$ et $\underline{C}$ sont [illegible] d'après le lemme 4 que $\underline{F}$ est algébrisable.

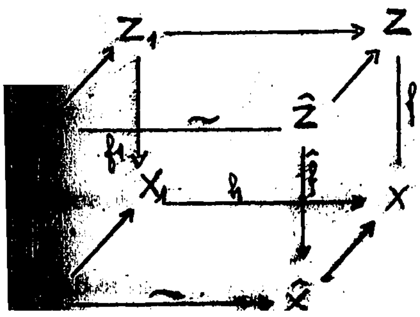
[illegible] $\underline{C}$; celle-ci revient à dire [illegible] annule $\underline{N}$ et $\underline{C}$

[illegible]

Lemme 5.-

Soient X un schéma noethérien, X' un fermé de X, $f = Z \to X$ un morphisme propre, $Z' = \overset{-1}{f}(X')$, $\hat{X}$(resp. $\hat{Z}$) le complété de X le long de X' (rep. de Z le long de Z'), $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Z}$ le prolongement de f aux complétés. Soit $\underline{M}$ un Idéal cohérent de $\underline{O}_X$ tel que, Si $U = X\text{-}\mathrm{Supp}(\underline{O}_X/\underline{M})$, la restriction $\overset{-1}{f}(U) \to U$ soit un isomorphisme. Alors, pour tout $\underline{O}_{\hat{X}}$- Module cohérent $\underline{F}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme canonique $\rho_{\underline{F}} : \underline{F} \to \hat{f}_*(\hat{f}^*(\underline{F}))$ soient annulés par $\hat{\underline{M}}^n$.

On peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$, avec B noethérien ; alors $X' = V(K)$. On va montrer qu'on peut supposer B complet pour la topologie K-adique. Soient en effet B_1 le séparé complété de B pour la topologie K-adique, $K_1 = K.B_1$, $X_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$, $h : X_1 \to X$ le morphisme canonique ; on a $\overset{-1}{h}(X') = V(K_1)$. Posons $Z_1 = Z \times_X X_1$, $f_1 = f_{(X_1)} : Z_1 \to X_1$; Soient $\hat{X}_1$ (resp. $\hat{Z}_1$) le complété de X_1 (resp. Z_1) le long du fermé X'_1 (resp. $Z'_1 = \overset{-1}{f_1}(X'_1)$). Le prolongement $\hat{h} : \hat{X}_1 \to \hat{X}$ de h aux complétés est un isomorphisme (correspondant



à l'identité de B_1), ainsi donc que $\hat{h}_{(\hat{Z})} : \hat{Z}_1 \to \hat{Z}$; ces isomorphismes identifient f et f_1. L'Idéal cohérent $h^*(\underline{M})$ de $\underline{O}_{X_1}$ et l'ouvert $U_1 = \overset{-1}{h}(U)$ vérifient les mêmes hypothèses que $\underline{M}$ et U ; il suffit donc de démontrer le lemme quand B est un anneau adique noethérien et K un idéal de définition.

Dans ce cas, on a $\hat{X} = \mathrm{Spf}(B)$, et on sait que le faisceau cohérent $\underline{F}$ est le faisceau associé à un B-module de type fini N, c'est-à-dire que $\underline{F} = \hat{\underline{G}}$, avec $\underline{G} = \tilde{N}$. Par suite $\hat{f}^*(\underline{F}) = (f^*(\underline{G}))^\wedge$ (puisque $\hat{\underline{G}} = i_X^*(\underline{G})$) , d'où $\hat{f}_*(\hat{f}^*(\underline{F})) = (f_*(f^*(\underline{G})))^\wedge$ d'après le théorème de comparaison. En outre, l'homorphisme :

$$\rho_{\underline{F}} : \underline{F} \to \hat{f}_*(\hat{f}^*(\underline{F}))$$

S'identifie canoniquement à l'homorphisme complété :

$$\widehat{\rho_{\underline{G}}} : \hat{G} \to (f_*(*(\underline{G})))^\wedge$$

Or le noyau et le conoyau de $\rho_{\underline{G}}$ sont des $\underline{O}_X$-Modules cohérents dont les restrictions à U sont nulles ; ils sont donc annulés par une puissance de l'idéal $\underline{M}$, il en résulte que leurs complétés, qui s'identifient à $\underline{N}$ et $\underline{C}$, sont annulés par une puissance de $\hat{\underline{M}}$, d'où le lemme. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

<u>Remarque.</u>

On sait que la donnée d'un $\underline{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent équivaut, avec les notations de la proposition 2 , à la donnée d'un système projectif de $\underline{O}_{X_k}$-Modules cohérents $\underline{F}_k$ tel que $\underline{F}_l = \underline{F}_k / I^l \underline{F}_k$ pour $l \leqslant k$. Lorsque A est un anneau local et I son idéal maximal, le théorème 1 (joint au théorème de comparaison de l'exposé précédent) permet de déduire des énoncés de géométrie algébrique sur A à partir d'énoncés analogues sur les anneaux locaux <u>artiniens</u> A/I^k

<u>Corollaire 3</u>

Sous les hypothèses du § 1, l'application $Z \to \hat{Z}$ est une bijection de l'ensembl[e] des sous-schémas fermés Z de X sur l'ensemble des sous-schémas formels fermés de

En effet, l'équivalence de catégorie $\underline{F} \mapsto \hat{\underline{F}}$ établit une bijection entre

[redacted] c'est-à-dire Idéaux cohérents de $\underline{O}_X$

[redacted] Corollaire résulte de la correspondance bijective

[redacted] (resp. de X) et Idéaux cohérents de $\underline{O}_X$ (resp. $\underline{O}_{\hat{X}}$) .

§ 3.- Un théorème de comparaison des morphismes.

Théorème 2.

Avec les notations de §1, soient X et Y deux A-schémas propres ; l'application :

$\mathrm{Hom}_S(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\hat{S}}(\hat{X},\hat{Y})$ est bijective.

$f \longmapsto \hat{f}$

On utilisera les lemmes suivants :

Lemme 6.-

X est le seul voisinage de X' dans X.

Soit U un voisinage ouvert de X' dans X ; comme f est propre, f(X-U) est un fermé de S qui ne rencontre pas S' : ceci est impossible si X - U n'est pas vide puisque, du fait que A est adique noethérien, S' contient tous les points fermés de S .

Lemme 7.-

Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas localement noethériens, Y' un fermé de Y, $X' = f^{-1}(Y')$, $\hat{Y}$ (resp. $\hat{X}$) le complété de X (resp. Y) le long de X' (resp. Y'), $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ le prolongement de f aux complétés. Pour que $\hat{f}$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de Y' tel que la restriction $f^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphisme.

La suffisance de la condition est immédiate ; pour montrer la nécessité, il suffit de prouver que pour tout $y \in Y'$, il existe un voisinage ouvert V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(V_y) \to V_y$ soit un isomorphisme. Par hypothèse, la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un point ; comme f est propre, le "Main Theorem" entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U de y tel que la restriction

$\overset{-1}{f}(U) \to U$ soit un morphisme fini. On est donc ramené à démontrer le lemme dans le cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, le morphisme f correspondant à un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ faisant de B une A-algèbre finie. Si $Y' = V(I)$, on a alors $\hat{Y} = \mathrm{Spf}(\hat{A})$, $\hat{X} = \mathrm{Spf}(\hat{B})$, $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$) étant le séparé complété de A (resp. B) pour la topologie I-adique (resp. IB-adique) ; par hypothèse $\varphi : \hat{A} \to \hat{B}$ est un isomorphisme. Mais comme B est un A-module de type fini, $\hat{B}$ est aussi le complété de B pour la topologie I-adique, et $\hat{\varphi}$ est aussi le prolongement continu de φ considéré comme homomorphisme de A-modules ; on sait alors (d'après un exposé précédent) qu'il existe un voisinage ouvert V de Y' tel que la restriction à V de l'homomorphisme de $\underline{O}_Y$-Modules $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ soit un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

<u>Démonstration du théorème 2.</u>-

Montrons que l'application $f \longmapsto \hat{f}$ est injective : d'après un exposé précédent deux morphismes f et g tels que $\hat{f} = \hat{g}$ coincident sur un voisinage ouvert de X', donc sur X d'après le lemme 6.

Montrons que $f \longmapsto \hat{f}$ est surjective : soit $h : \hat{X} \to \hat{Y}$ un $\hat{S}$-morphisme. Posons $Z = X \times_S Y$ et soient $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ les projections canoniques ; on sait que $\hat{Z}$ s'identifie canoniquement à $\hat{X} \times_{\hat{S}} \hat{Y}$, les projections canoniques s'identifiant aux prolongements $\hat{p}$ et $\hat{q}$. Le graphe Γ de h est une immersion fermée de $\hat{X}$ dans $\hat{Z}$, donc le composé d'un isomorphisme w de $\hat{X}$ sur un sous-schéma formel fermé $\mathcal{T}$ et de l'injection canonique j de $\mathcal{T}$ dans $\hat{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "w"] & \mathcal{T} \arrow[r, hook, "j"] & \hat{Z} \arrow[r, "\hat{q}"] \arrow[d, "\hat{p}"'] & \hat{Y} \arrow[d] \\
& & \hat{X} \arrow[r] & \hat{S}
\end{tikzcd}$$

Par le corollaire 3, il existe un sous-schéma fermé T de Z tel que $\mathfrak{T}$ et $\hat{\imath} = j$, où $i : T \to Z$ est l'injection canonique. Le morphisme : $T \to X$ a pour prolongement aux complétés $\hat{p} \circ j$, qui est l'isomorphisme [...]rse de w ; on déduit des lemmes 6 et 7 que $p \circ i$ est lui-même un isomor[...]sme. Soit $g : X \to T$ l'isomorphisme réciproque, dont le prolongement $\hat{g}$ est [...]essairement égal à w ; posant $f = q \circ i \circ g$, on trouve $\hat{f} = h$, ce qui achève [...]démonstration.

[...]arques.

[...] théorème 2 peut s'énoncer en disant que le foncteur $X \rightsquigarrow \hat{X}$ est une équivalence [...] catégorie des A-schémas propres avec la sous-catégorie pleine de la catégorie [...] A-schémas formels propres formée des schémas formels algébrisables (c'est-à-dire [...]morphes à un $\hat{X}$). Il existe en général des A-schémas formels propres qui ne sont [...]algébrisables.

[...]es énoncés de cet exposé se transposent tels quels lorsque $A = C$ et que l'on [...]place la notion de complétion formelle d'un faisceau (ou d'un schéma) par la [...]on de faisceau analytique (ou d'espace analytique) associé. Les démonstrations [...] d'ailleurs très analogues (cf. Serre, Géométrie Algébrique et Géométrie [...]ytique, Ann. Inst. Fourier, t.VI, 1955-56).