

1. Définition des surfaces de Riemann

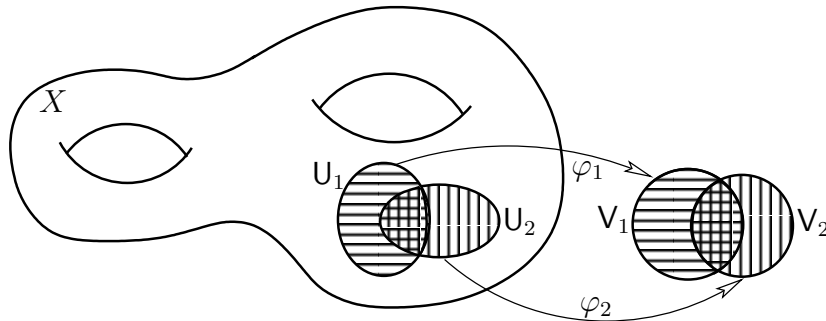
Dans ce chapitre, on définit les surfaces de Riemann, les fonctions holomorphes et méromorphes, ainsi que les applications holomorphes entre les surfaces de Riemann.

Les surfaces sont des variétés différentielles (abstraites) de dimension 2 munies d'une structure additionnelle, dite *holomorphe*, que nous allons introduire dans un instant. Rappelons qu'une *variété topologique réelle* de dimension $n \geq 1$ est un espace topologique séparé X tel que tout point $a \in X$ possède un voisinage ouvert U_a dans X qui est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition. Soit X une variété topologique de dimension 2. Une *carte complexe* sur X est un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow V$ d'un ouvert $U \subset X$ sur un ouvert $V = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$. Deux cartes complexes $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$, sont dites *holomorphiquement compatibles* si l'application de transfert :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est *biholorphe*, c'est-à-dire holomorphe, bijective, et d'inverse $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ qui est lui aussi holomorphe.



Un *atlas complexe* sur X est un système $\mathfrak{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i: i \in I\}$ de telles cartes qui sont holomorphiquement compatibles et qui recouvrent X , *i.e.* dont les domaines U_i satisfont $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Deux atlas complexes \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' sont dit *analytiquement équivalents* si toute carte de \mathfrak{A} est holomorphiquement compatible avec toute carte de \mathfrak{A}' .

Par simple restriction, si $\varphi: U \rightarrow V$ est une carte complexe, et si $U_1 \subset U$ est ouvert, en posant $V_1 := \varphi(U_1)$, on obtient une carte $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$ qui est holomorphiquement compatible avec $\varphi: U \rightarrow V$. Les applications biholomorphes étant stables par composition, on voit que la notion d'équivalence analytique entre atlas complexes est une notion d'équivalence, ce qui justifie la :

Définition. Une *structure complexe* sur une variété 2-dimensionnelle X est une classe d'équivalence d'atlas complexes sur X .

Ainsi, une structure complexe sur X est donnée par le choix d'un atlas complexe. Toute structure complexe Σ sur X contient un unique *atlas complexe maximal* \mathfrak{A}^* défini comme

suit : si \mathcal{A} est un atlas arbitraire dans Σ , alors \mathcal{A}^* consiste en toutes les cartes complexes sur X qui sont holomorphiquement compatibles avec chaque carte de \mathcal{A} .

Définition. Une *surface de Riemann* est une paire (X, Σ) , où X est une variété *connexe* de dimension 2 et où Σ est une structure complexe sur X .

Usuellement, on écrit X au lieu de (X, Σ) toutes les fois que la structure complexe est connue sans ambiguïté. Parfois aussi, on écrit aussi (X, \mathcal{A}) , où \mathcal{A} est un représentant de Σ . Par convention, et sans perte de généralité, toute carte sur X sera conçue comme appartenant d'emblée à l'atlas maximal de la structure complexe de X .

Ainsi, d'un point de vue local, une surface de Riemann n'est autre qu'un ouvert dans le plan complexe, puisque si $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ est une carte sur X , alors φ applique l'ouvert $U \subset \mathbb{C}$ bijectivement sur son image $V = \varphi(U)$ (toutefois, chaque point donné de X est contenu dans plusieurs telles cartes, et aucune d'entre elles ne se distingue par rapport aux autres). C'est pour cette raison que l'on peut transférer aux surfaces de Riemann toutes les notions de l'analyse complexe sur \mathbb{C} qui demeurent invariantes à travers toute application biholomorphe, *i.e.* les notions qui ne dépendent pas du choix d'une carte particulière.

Exemples de surfaces de Riemann.

(a) Le plan complexe \mathbb{C} . Sa structure complexe est définie par l'atlas dont la carte unique est l'application identité $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(b) Sous-domaines d'une surface. Si X est une surface de Riemann et si $Y \subset X$ est un sous-domaine, *i.e.* un sous-ensemble ouvert connexe, alors Y hérite d'une structure complexe naturelle qui en fait une surface de Riemann, à savoir on prend comme atlas toutes les cartes complexes $\varphi: U \rightarrow V$ sur X pour lesquelles U est un ouvert de Y . En particulier, tout sous-domaine $Y \subset \mathbb{C}$ est une surface de Riemann.

(c) La sphère de Riemann \mathbb{P}^1 . Soit $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ est le symbole d'un élément non contenu dans \mathbb{C} . On introduit la topologie suivante sur cet objet \mathbb{P}^1 . Ses ouverts sont tout d'abord les ouverts usuels $U \subset \mathbb{C}$ et ensuite les ensembles de la forme $V \cup \{\infty\}$, où $V \subset \mathbb{C}$ est le complémentaire d'un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$. Avec cette topologie, \mathbb{P}^1 devient un espace topologique compact séparé, homéomorphe à la sphère S^2 . Posons maintenant :

$$\begin{aligned} U_1 &:= \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}, \\ U_2 &:= \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

et définissons deux applications $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, comme suit : φ_1 est l'application identité, et :

$$\varphi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{pour } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{pour } z = \infty. \end{cases}$$

Alors chacune de ces deux applications est un homéomorphisme, donc \mathbb{P}^1 est une variété de dimension 2. Puisque U_1 et U_2 sont connexes et sont d'intersection $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ non vide, \mathbb{P}^1 est aussi connexe. La structure complexe sur \mathbb{P}^1 est alors définie par l'atlas constitué de ces deux cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, mais il reste encore à vérifier qu'elles sont holomorphiquement compatibles : on a $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ et l'application de transfert :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto 1/z,$$

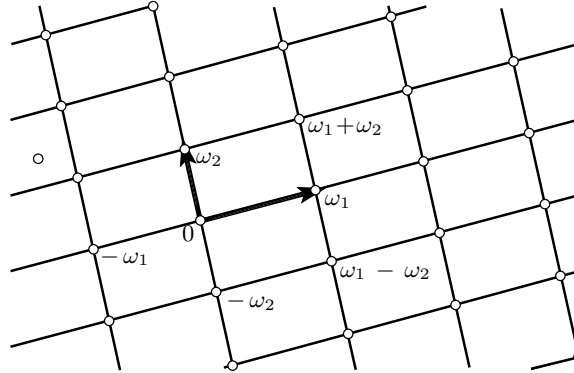
est en effet clairement biholomorphe (c'est une involution !). Ici, la notation \mathbb{P}^1 provient du fait que l'on peut considérer \mathbb{P}^1 comme l'unique (à isomorphisme près) espace projectif

de dimension 1 sur le corps des nombres complexes, constitué des couples de nombres complexes $[\zeta_0 : \zeta_1]$ non tous nuls, considérés à un facteur multiplicatif près.

(d) Les tores complexes. Supposons que $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} et définissons le réseau qu'ils engendrent :

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Deux nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$ sont dits *équivalents mod Γ* si $z - z' \in \Gamma$. L'ensemble des classes d'équivalences est alors noté \mathbb{C}/Γ . Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la projection canonique, *i.e.* l'application qui associe à tout point $z \in \mathbb{C}$ sa classe d'équivalence mod Γ .

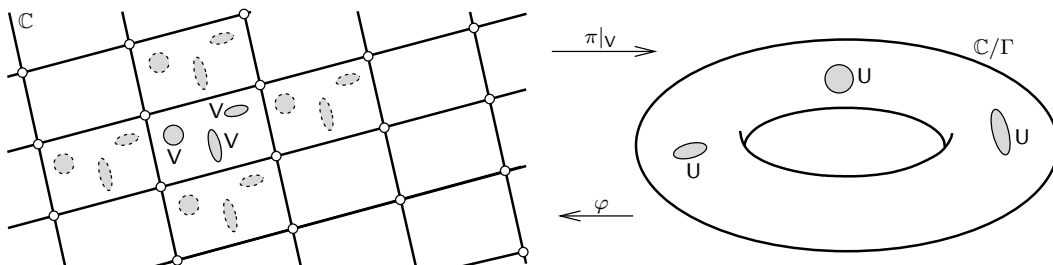


On introduit la topologie suivante, dite *topologie quotient*, sur \mathbb{C}/Γ . Par définition, un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ est ouvert précisément lorsque $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ est ouvert. Avec cette topologie, \mathbb{C}/Γ est un espace topologique séparé et l'application quotient $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ est continue. Puisque \mathbb{C} est connexe, \mathbb{C}/Γ est aussi connexe. De plus, \mathbb{C}/Γ est compact, puisqu'il est recouvert par l'image à travers π du parallélogramme compact :

$$\{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \in \mathbb{C} : \lambda, \mu \in [0, 1]\}.$$

L'application π est aussi ouverte, *i.e.* l'image de tout ouvert $V \subset \mathbb{C}$ est aussi un ouvert, et pour se convaincre que $\pi(V)$ est ouvert, on doit, par définition, vérifier que $\pi^{-1}(\pi(V))$ est ouvert, mais cela est clair puisque l'on a :

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Gamma} \underbrace{(\omega + V)}_{\text{ouvert translaté}}.$$



Maintenant, la structure complexe sur \mathbb{C}/Γ est définie comme suit. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert dans lequel aucun couple de points distincts n'est équivalent mod Γ . Alors $U := \pi(V)$ est ouvert et $\pi|_V : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme (bijectif, continu, d'inverse continu). Son inverse $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte complexe sur \mathbb{C}/Γ . Soit \mathfrak{A} l'ensemble de toutes les cartes obtenues de cette façon. On doit vérifier que deux telles cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$,

appartenant à \mathfrak{A} sont holomorphiquement compatibles. Considérons donc l'application :

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Pour tout $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, on a $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, d'où $\psi(z)$ et z ont même image par π , et donc $\psi(z) - z \in \Gamma$. Puisque Γ est discret et que ψ est continue, cela implique que $\psi(z) - z$ est constant sur chaque composante connexe de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Ainsi, ψ est holomorphe. On vérifie de même que ψ^{-1} est aussi holomorphe. En conclusion, on équipe \mathbb{C}/Γ de la structure complexe définie par cet atlas \mathfrak{A} . \square

Scholie. Soit $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité. L'application qui, à un point quelconque de \mathbb{C}/Γ représenté par $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), le point :

$$(e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}) \in S^1 \times S^1$$

est un homéomorphisme (exercice) de \mathbb{C}/Γ sur le produit $S^1 \times S^1$. \square

Définition. Soit X une surface de Riemann et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble ouvert. Une fonction $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si, pour toute carte¹ $\psi: U \rightarrow V$ sur X , la fonction conjuguée :

$$f \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap Y) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe au sens usuel sur l'ouvert $\psi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. L'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur Y sera noté $\mathcal{O}(Y)$: c'est un anneau.

La somme et le produit de fonctions holomorphes sont à nouveau holomorphes. Toutes les fonctions constantes sont holomorphes. Donc $\mathcal{O}(Y)$ est une \mathbb{C} -algèbre.

Remarque. Toute carte local $\psi: U \rightarrow V = \psi(U) \subset \mathbb{C}$ sur X est, en particulier, une fonction à valeurs complexes sur U , qui est visiblement holomorphe. Usuellement, on appelle ψ une *coordonnée locale*, ou un *paramètre uniformisant*, et (U, ψ) un *système de coordonnées locales* (au voisinage de tout point $a \in U$). Dans ce contexte, on utilise habituellement la lettre z et parfois aussi la lettre w (à la place de $\psi: U \rightarrow V$) pour désigner les coordonnées dans lesquelles on travaille. \square

Théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann. ([?]) Soit U un sous-ensemble ouvert d'une surface de Riemann et soit $a \in U$. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a , alors f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe définie sur U tout entier. \square

Définition. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application continue $f: X \rightarrow Y$ est dite *holomorphe* si, pour toute paire de cartes :

$$\psi_1: U_1 \rightarrow V_1 = \psi_1(U_1) \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \psi_2: U_2 \rightarrow V_2 = \psi_2(U_2) \subset \mathbb{C}$$

sur X avec $f(U_1) \subset U_2$, l'application conjuguée :

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}: V_1 \longrightarrow V_2$$

est holomorphe au sens usuel.

Dans le cas spécial où $Y = \mathbb{C}$, les applications holomorphes $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifient clairement aux *fonctions* holomorphes. On vérifie aisément que si X, Y et Z sont trois

¹ Bien entendu, la condition n'a pas à être vérifiée pour toutes les cartes d'un atlas maximal sur X , il suffit juste de la vérifier pour une famille de cartes qui recouvrent Y , puisqu'elle est alors automatiquement satisfaite pour toutes les autres cartes compatibles.

surfaces de Riemann, et si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont deux applications holomorphes, alors leur composition $g \circ f: Y \rightarrow Z$ est aussi une application holomorphe.

Définition. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite *biholorphe* si elle est bijective, si elle est holomorphe, et si son inverse $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est elle aussi holomorphe. Deux surfaces de Riemann X et Y sont dites *isomorphes* s'il existe une application biholorphe $f: X \rightarrow Y$.

Homomorphisme d'anneaux induit par composition. Une application continue $f: X \rightarrow Y$ entre deux surfaces de Riemann est holomorphe précisément lorsque pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute application holomorphe $\psi \in \mathcal{O}(V)$, la fonction « ψ tirée en arrière par f » :

$$f^*(\psi) := \psi \circ f: f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$$

est contenue dans $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$: cela découle des définitions (exercice).

$$\begin{array}{ccc} X \supset f^{-1}(V) & & \\ f \downarrow & \searrow f^*(\psi) & \\ Y \supset V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \end{array}$$

De cette manière-là, pour tout ouvert² $V \subset Y$, une telle application holomorphe $f: X \rightarrow Y$ induit une application :

$$f^*: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)),$$

qui est un *homomorphisme d'anneaux* (exercice).

Si $g: Y \rightarrow Z$ est une autre application holomorphe, si W est ouvert dans Z , en posant $V := g^{-1}(W)$ et $U := f^{-1}(V)$, alors l'homomorphisme :

$$(g \circ f)^*: \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$$

est la composition $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ des deux homomorphismes :

$$g^*: \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V) \quad \text{et} \quad f^*: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U).$$

Théorème d'identité. Soient X et Y deux surfaces de Riemann³ et soient $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ deux applications holomorphes dont les valeurs coïncident sur un sous-ensemble $A \subset X$ possédant un point d'accumulation $a \in X$. Alors f_1 et f_2 sont identiquement égales.

DÉMONSTRATION. Soit G l'ensemble de tous les points $x \in X$ possédant un voisinage ouvert W sur lequel $f_1|_W = f_2|_W$. Par définition, G est ouvert. Nous allons montrer que G est aussi fermé.

En effet, soit b un point du bord de G . Alors $f_1(b) = f_2(b)$, puisque f_1 et f_2 sont continues. Choisissons ensuite deux cartes sur X et sur Y :

$$\varphi: U \rightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \psi: U' \rightarrow V' = \psi(U') \subset \mathbb{C}$$

avec $b \in U$, avec $f_i(b) \in U'$, et avec $f_i(U) \subset U'$ ($i = 1, 2$). Sans perte de généralité, on peut supposer aussi que U est connexe. Par définition, les deux applications conjuguées :

$$g_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

² On anticipe ainsi quelque peu ici l'utilisation du langage de la théorie des faisceaux, voir ci-dessous.

³ Rappelons que par définition, X et Y sont alors connexes.

sont holomorphes. Puisque $U \cap G \neq \emptyset$, le théorème d'identité pour les applications holomorphes dans des domaines du plan complexe implique que g_1 et g_2 sont égales. Donc $f_1|_U = f_2|_U$. Ainsi $b \in G$ et G est fermé.

Maintenant, puisque X est connexe, on a ou bien $G = \emptyset$, ou bien $G = X$. Mais le premier cas est exclu, car $a \in G$ (en appliquant à nouveau le théorème d'identité dans le plan complexe). En conclusion, f_1 et f_2 coïncident sur X tout entier. \square

Définition. Soit X une surface de Riemann et soit Y un sous-ensemble ouvert de X . On appelle *fonction méromorphe* sur Y toute fonction holomorphe $f: Y' \rightarrow \mathbb{C}$, où $Y' \subset Y$ est un sous-ensemble ouvert, satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $Y \setminus Y'$ consiste seulement en des points isolés ;
- (ii) pour tout point $a \in Y \setminus Y'$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty.$$

Les points de $Y \setminus Y'$ sont alors appelés les *pôles* de f . L'ensemble de toutes les applications méromorphes sur Y sera noté $\mathcal{M}(Y)$.

Si (U, z) est un système de coordonnées locales au voisinage d'un pôle a de f satisfaisant $z(a) = 0$, alors f peut être développée en série de Laurent :

$$f = \sum_{k=-k_a}^{\infty} c_k z^k,$$

pour tout z dans un certain voisinage ouvert de a .

De plus, $\mathcal{M}(Y)$ possède une structure naturelle de \mathbb{C} -algèbre : la somme et le produit de deux fonctions méromorphes $f, g \in \mathcal{M}(Y)$ sont holomorphes en tous les points où f et g sont simultanément holomorphes ; grâce au théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann, on peut par ailleurs prolonger $f + g$ ou fg holomorphiquement là où leurs singularités sont localement bornées.

Exemple. Supposons $n \geq 1$ et soit :

$$F(z) := z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

un polynôme de degré n . Alors F définit une application holomorphe $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si l'on voit \mathbb{C} comme un sous-ensemble de \mathbb{P}^1 , alors $\lim_{z \rightarrow \infty} |F(z)| = \infty$. Donc tout polynôme $F \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ définit une application méromorphe sur \mathbb{P}^1 .

Nous pouvons maintenant interpréter les fonctions méromorphes définies ci-dessus comme des applications *holomorphes* à valeurs dans la sphère de Riemann.

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $F \in \mathcal{M}(X)$ une fonction méromorphe sur X . Pour tout pôle a de f , si on définit $f(a) := \infty$, alors l'application ainsi prolongée $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann.

Réciproquement, si $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une application holomorphe, alors ou bien f est identiquement égale à ∞ , ou bien $f^{-1}(\infty)$ consiste seulement en des points isolés, et dans ce cas :

$$f: X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

est une fonction méromorphe sur X au sens de la définition initiale.

Par conséquent, il est justifié (et conseillé) d'identifier dans la suite toute fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ à l'application holomorphe correspondante $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, ce qui fournit une seconde définition équivalente mais plus naturelle.

DÉMONSTRATION. Dans le sens direct, soit donc $f \in \mathcal{M}(X)$ une fonction méromorphe au sens de la définition et soit P l'ensemble des pôles de f . Alors f induit une application $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui est clairement continue. Supposons que $\varphi: U \rightarrow V$ et $\psi: U' \rightarrow V'$ sont deux cartes locales sur X avec $V' \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, et sur \mathbb{P}^1 avec $f(U) \subset U'$. On doit démontrer que l'application :

$$g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \longrightarrow V'$$

est holomorphe. Mais comme f est par hypothèse holomorphe sur $X \setminus P$, il est clair que g est déjà holomorphe sur $V \setminus \varphi(P)$. De plus g est continue grâce à la continuité de f , et le théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann achève d'établir que g est holomorphe sur V tout entier.

Pour la réciproque, on utilise le théorème d'identité (exercice). \square

Il découle des résultats qui précèdent que le théorème d'identité est aussi satisfait par les applications méromorphes $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Par conséquent, toute fonction non identiquement nulle $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ a des zéros qui sont isolés.

Corollaire. L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann X est un corps. \square

Exercices

Exercice 1.1. (a) Compactification d'Alexandrov de \mathbb{R}^n . Pour $n \geq 1$, soit ∞ le symbole d'un élément n'appartenant pas à \mathbb{R}^n . On introduit une topologie sur $X := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$: un sous-ensemble $U \subset X$ est ouvert, par définition, si l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $\infty \notin U$ et U est ouvert dans \mathbb{R}^n (pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^n);
- (ii) $\infty \in U$ et $X \setminus U$ est compact dans \mathbb{R}^n .

Montrer que X est un espace topologique séparé compact.

(b) *Projection stéréographique.* On considère la sphère unité n -dimensionnelle :

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

ainsi que la projection stéréographique $\sigma: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ donnée par :

$$\sigma(x_1, \dots, x_{n+1}) := \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) & \text{si } x_{n+1} \neq 1, \\ \infty & \text{si } x_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Montrer que σ est un homéomorphisme de S^n sur X .

Exercice 1.2. Pour toute matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

montrer que l'application fractionnelle linéaire associée :

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : cz + d \neq 0\}$ et qu'elle peut être prolongée en une fonction méromorphe sur \mathbb{P}^1 , à nouveau dénotée f . Montrer que $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est biholomorphe, i.e. que f est un automorphisme de \mathbb{P}^1 .

Exercice 1.3. On identifie \mathbb{P}^1 à la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ grâce à la projection stéréographique :

$$\sigma: S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1$$

définie ci-dessus. Soit $SO_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales 3×3 de déterminant 1, à savoir :

$$SO_3(\mathbb{R}) := \{A \in GL_3(\mathbb{R}) : A^t A = \text{Id}, \det A = 1\}.$$

Pour toute $A \in SO_3(\mathbb{R})$, montrer que l'application conjuguée :

$$\sigma \circ A \circ \sigma^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

est biholomorphe ; à cette fin, on admettra ou on démontrera indépendamment que toute matrice $A \in SO_3(\mathbb{R})$ peut être écrite comme un produit fini $A = A_1 \cdots A_k$ de matrices qui sont ou bien de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou bien de la forme suivante, avec $B \in SO_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4. Soient $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $\Gamma' = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$ deux réseaux dans \mathbb{C} . Montrer que $\Gamma = \Gamma'$ si et seulement si il existe une matrice :

$$A \in SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in GL_2(\mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5. (a) Soient $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$. Montrer que l'application $z \mapsto \alpha z$ de \mathbb{C} dans lui-même induit une application holomorphe :

$$\mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma'$$

et que cette application est biholomorphe si et seulement si $\alpha\Gamma = \Gamma'$.

(b) Montrer que tout tore complexe $X = \mathbb{C}/\Gamma$ est isomorphe à un tore de la forme :

$$X(\tau) := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau),$$

où $\tau \in \mathbb{C}$ satisfait $\text{Im}(\tau) > 0$.

(b) On suppose que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et que $\text{Im}(\tau) > 0$. Soit l'application associée :

$$\tau' := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Montrer que les deux tores complexes $X(\tau)$ et $X(\tau')$ sont isomorphes.

2. Propriétés élémentaires des applications holomorphes

Dans ce chapitre, nous énonçons et nous démontrons quelques propriétés topologiques simples des applications holomorphes entre surfaces de Riemann qui permettent de déduire aisément quelques-uns des plus fameux résultats frappants de l'analyse complexe à une variable : théorème de Liouville ; théorème fondamental de l'algèbre (D'Alembert-Gauss) ; surjectivité des applications holomorphes $f: X \rightarrow Y$ non constantes dont la source X est compacte.

Théorème (comportement local des applications holomorphes). Soient X et X' deux surfaces de Riemann et soit $f: X \rightarrow X'$ une application holomorphe non constante. Soit $a \in X$ et posons $a' := f(a)$. Alors il existe un entier $k \geq 1$ — dépendant de a — et deux cartes locales $\varphi: U \rightarrow V$ sur X et $\varphi': U' \rightarrow V'$ sur Y satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $a \in U$ avec $\varphi(a) = 0$ et $a' \in U'$ avec $\varphi'(a') = 0$;
- (ii) $f(U) \subset U'$;

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & U' \subset X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & V' \end{array}$$

- (iii) l'application conjuguée $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$ est normalisée comme une simple puissance k -ème de la coordonnée ambiante :

$$\boxed{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k \quad \text{pour tout } z \in V}.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on note qu'en partant de deux cartes $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ sur X et $\varphi': U' \rightarrow V'$ sur X' avec $a \in U_1$ et $a' \in U'$ qui satisfont $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a') = 0$ (il en existe évidemment toujours), quitte à restreindre le domaine U_1 en un sous-domaine — toujours noté U_1 — contenant encore le point a , on peut assurer que $f(U_1) \subset U'$, puisque $f(a) = a'$ et que f est continue, ce qui donne gratuitement (i) et (ii).

Maintenant, il découle du théorème d'identité que la fonction holomorphe standard :

$$f_1 := \varphi' \circ f \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{C} \supset V_1 \longrightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

n'est pas constante, puisque f ne l'est pas. Comme $f_1(0) = 0$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f_1(z) = z^k g(z)$, où g est une fonction holomorphe sur V_1 satisfaisant $g(0) \neq 0$. Par conséquent, il existe une racine k -ème $\sqrt[k]{g(z)}$ de ce reste $g(z)$ qui est holomorphe dans un certain voisinage ouvert $V_2 \subset V_1$ (peut-être plus petit) de 0, par exemple la fonction $e^{\frac{1}{k} \log g(z)}$, où $\log w$ est la détermination principale du logarithme de $w \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. La correspondance $z \mapsto z \sqrt[k]{g(z)}$ définit alors une application holomorphe :

$$\chi: V_2 \rightarrow \chi(V_2) =: V \subset \mathbb{C}$$

fixant 0 et de dérivée non nulle égale à $\sqrt[k]{g'(0)}$ en 0. Donc quitte à restreindre encore V_2 — tout en conservant la même notation —, on peut supposer que χ est un biholomorphisme sur son image. Soit alors $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$ et remplaçons la carte $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ par la carte $\varphi: U \rightarrow V$, où $\varphi := \chi \circ \varphi_1$ et où $V = \chi(V_2)$. Alors par construction, l'application conjuguée $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(z)$ est égale à z^k pour tout $z \in V$. \square

Interprétation géométrique. Le nombre k du théorème peut être caractérisé de la manière suivante. Pour tout voisinage ouvert U_a de a , il existe un sous-voisinage ouvert $U_{1,a} \subset U_a$ de a et un voisinage ouvert U' de $a' := f(a)$ tel que l'ensemble $f^{-1}(y) \cap U_{1,a}$ contient exactement k éléments distincts deux à deux, pour tout $y \in U' \setminus \{a'\}$, puisqu'il y a exactement k racines k -èmes de l'unité. On appelle k la *multiplicité* avec laquelle l'application f prend la valeur a' au point a , ou l'on dit simplement que f est de *multiplicité* k au point a .

Exemple. Soit $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \dots + c_k$ un polynôme de degré k . On sait que f peut être considéré comme une application holomorphe $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui satisfait $f(\infty) = \infty$. En utilisant deux cartes au voisinage des deux ∞ , on peut facilement voir que f est de multiplicité k en ∞ (exercice).

Corollaire. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante. Alors f est ouverte, i.e. l'image par f de tout sous-ensemble ouvert de X est aussi un sous-ensemble ouvert de Y .

DÉMONSTRATION. Il découle directement du type de forme normale locale $z \mapsto z^{k_a}$ du théorème précédent que si U_a est un voisinage ouvert d'un point $a \in X$, alors $f(U_a)$ est aussi un voisinage ouvert du point $f(a)$. Ceci implique que f est ouverte. \square

Corollaire. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe injective. Alors f est un biholomorphisme de X sur son image $f(X) \subset Y$.

DÉMONSTRATION. Puisque f est injective, dans la description locale énoncée par le théorème précédent, on doit toujours avoir $k_a = 1$, d'où la différentielle de f est inversible. Donc par le théorème d'inversion locale analytique, l'application inverse $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ est elle aussi holomorphe. \square

L'ouverture des applications holomorphes a encore d'autres conséquences fondamentales.

Corollaire (Principe du maximum). Soient X une surface de Riemann et soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors la valeur absolue de f n'atteint pas son maximum sur X .

DÉMONSTRATION. Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $a \in X$ tel que :

$$R := |f(a)| = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}.$$

Alors immédiatement, l'image complète de f est contenue dans le disque de rayon R :

$$f(X) \subset \overline{D}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Puisque l'ensemble $f(X)$ est ouvert, il est contenu dans l'intérieur de K . Ceci contredit le fait que $f(a) \in \partial \overline{D}_R$. \square

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. On suppose que X est compacte et que $f: X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante. Alors Y est compacte et f est surjective.

DÉMONSTRATION. On sait que $f(X)$ est un sous-ensemble ouvert de Y . Puisque X est compacte, son image $f(X)$ est elle aussi compacte, donc fermée. Mais comme les seuls sous-ensembles d'un espace topologique connexe qui sont à la fois fermés et ouverts sont l'ensemble vide et l'espace tout entier, il en découle que $f(X) = Y$. Ainsi f est surjective et Y est compacte. \square

Corollaire. Toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante.

DÉMONSTRATION. En effet, partant de $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante, le théorème forcerait \mathbb{C} à être compact, ce qui n'est pas. Une autre démonstration plus directe consisterait à observer qu'il existe un point a du compact X en lequel $|f|$ atteint son maximum, ce qui la force à être constante, à cause du principe du maximum. \square

Corollaire. Toute fonction méromorphe f sur \mathbb{P}^1 est rationnelle, i.e. elle peut être écrite comme quotient de deux polynômes.

DÉMONSTRATION. La fonction f possède seulement un nombre fini de pôles, puisque si leur nombre était infini, par compacité de \mathbb{P}^1 , ils auraient un point limite, et le théorème d'identité impliquerait alors que f serait identiquement égale à ∞ .

Ensuite, on peut supposer que ∞ n'est pas un pôle de f , car sinon, il suffirait de considérer $1/f$ au lieu de f (la conclusion désirée resterait inchangée). Maintenant, supposons que a_1, \dots, a_n sont les pôles de f et soient :

$$h_\nu(z) = \sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j} (z - a_\nu)^j \quad (\nu = 1 \dots n)$$

les parties principales de f en ses pôles a_ν pour $\nu = 1, \dots, n$. Alors la fonction :

$$g := f - (h_1 + \dots + h_n)$$

est holomorphe sur \mathbb{P}^1 et donc elle est constante, grâce au corollaire vu à l'instant. Par réduction au même dénominateur, il en découle que f est rationnelle. \square

Théorème de Liouville. Toute fonction holomorphe $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur \mathbb{C} tout entier qui est bornée est en fait forcément constante.

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann, l'application f peut alors être prolongée holomorphiquement comme une application $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Or \mathbb{P}^1 est compact, et le corollaire pénultième a déjà fait voir que ce prolongement doit alors être constant. \square

Théorème fondamental de l'algèbre. Soit $n \geq 1$ un entier et soit :

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

un polynôme à coefficients complexes $c_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, \dots, n$. Alors il existe au moins un point $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$.

DÉMONSTRATION. Le polynôme f peut être considéré comme une application holomorphe $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ fixant ∞ , i.e. $f(\infty) = \infty$, avec la multiplicité n . D'après le théorème qui précède, cette application est alors nécessairement surjective. Donc $0 \in f(\mathbb{C})$. \square

Fonctions doublement périodiques. Supposons que $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} et considérons le réseau $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ qu'ils engendrent. Une fonction méromorphe $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ est dite *doublement périodique* par rapport à Γ si l'on a :

$$f(z) = f(z + \omega) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ et tout } \omega \in \Gamma.$$

Évidemment, il suffit pour cela que :

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, soit $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la projection canonique. Alors la fonction doublement périodique f induit une fonction $F: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ satisfaisant $f = F \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & \nearrow F & \\ \mathbb{C}/\Gamma & & \end{array}$$

Il découle directement de la définition de la structure complexe sur \mathbb{C}/Γ que F est une fonction méromorphe sur \mathbb{C}/Γ .

Réciproquement, pour toute fonction méromorphe $F: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$, la composition $f := F \circ \pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} qui est doublement périodique par rapport au réseau Γ . En définitive : *les fonctions méromorphes sur le tore \mathbb{C}/Γ sont en correspondance biunivoque avec les fonctions méromorphe sur \mathbb{C} qui sont doublement périodiques par rapport à Γ .*

Des résultats qui précèdent découle l'énoncé suivant (exercice).

Théorème. *Toute fonction holomorphe doublement périodique $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est constante. Toute fonction méromorphe non constante doublement périodique $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ atteint toute valeur $c \in \mathbb{P}^1$.* \square

Exercices

Exercice 2.1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau. La fonction de Weierstrass \wp associée à Γ est définie par la série :

$$\wp_{\Gamma}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

(a) Montrer que \wp_{Γ} est une fonction méromorphe doublement périodique par rapport à Γ qui a des pôles aux points de Γ . *Indication* : considérer d'abord sa dérivée terme à terme :

$$\wp'_{\Gamma}(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction doublement périodique par rapport à Γ qui a des pôles aux points de Γ et qui possède le développement de Laurent suivant à l'origine :

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{où } c_{-2} = 1 \text{ et où } c_{-1} = c_0 = 0.$$

Montrer qu'alors $f = \wp_{\Gamma}$.

Exercice 2.2. Soit X une surface de Riemann et soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Montrer que $\operatorname{Re}(f)$ n'atteint pas son maximum.

Exercice 2.3. Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont la partie réelle est bornée supérieurement. Montrer que f est constante.

Exercice 2.4. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante et soit l'homomorphisme d'anneaux :

$$f^*: \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

induit par composition. Montrer qu'il est injectif.

Exercice 2.5. Soient p_1, \dots, p_n des points distincts deux à deux sur une surface de Riemann compacte X . On pose $X' := X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ et on suppose que :

$$f: X' \rightarrow \mathbb{C}$$

est une application holomorphe non constante. Montrer qu'il existe des points de son image $f(X')$ qui sont arbitrairement proches de tout $c \in \mathbb{C}$.

3. Homotopies entre courbes continues et groupe fondamental d'un espace topologique

Dans ce chapitre, on présente des résultats topologiques de base concernant l'homotopie entre courbes continues afin de définir la notion importante de groupe fondamental d'un espace topologique. On donne ensuite quelques exemples de surfaces de Riemann qui sont des espaces simplement connexes, *i.e.* dont le groupe fondamental réduit à l'élément neutre.

Définition. Dans un espace topologique X , une *courbe continue* est une application continue $u: [0, 1] \rightarrow X$. Le point $a := u(0)$ est le *point initial* et $b := u(1)$ le *point final*. On dira que u est une *courbe continue de a vers b* , ou que la courbe u *joint a à b* .

Définition. Un espace topologique X est *connexe par arcs* si deux points quelconques $a, b \in X$ peuvent toujours être joints par une courbe continue.

Proposition. *Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in X$ fixé. Il suffit de vérifier (exercice) que l'ensemble X_a des points $x \in X$ tels qu'il existe une courbe continue de a vers x est à la fois ouvert et fermé. □

Exemple. Le graphe dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ auquel on ajoute le singleton $\{0\}$ est connexe, mais pas connexe par arcs (exercice).

Définition. Un espace topologique X est dit *localement connexe par arcs* si chacun de ses points possède une base de voisinages qui sont tous connexes par arcs.

Exemple. Toute variété est localement connexe par arcs. □

Proposition. *Tout espace topologique connexe qui est localement connexe par arcs est aussi (globalement) connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. À nouveau, il suffit de vérifier (exercice) que l'ensemble des points $x \in X$ qui peuvent être joints au moyen d'une courbe continue à un point $a \in X$ fixé à l'avance est à la fois ouvert et fermé. □

Exemple. En modifiant l'exemple précédent, trouver (exercice géométrique) un exemple d'espace globalement connexe par arcs qui n'est pas connexe par arcs.

Définition. Soit X un espace topologique et soient $a, b \in X$ deux points quelconques de X . Deux courbes continues $u, v: [0, 1] \rightarrow X$ de a vers b sont dites *homotopes* — ce qui sera noté $u \sim v$ — s'il existe une application continue :

$$A: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

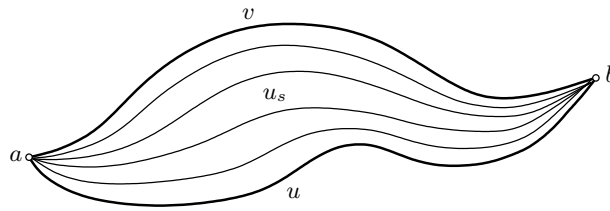
qui *interpole u et v en les déformant continûment l'une vers l'autre tout en maintenant fixes leurs extrémités*, au sens précis où les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $A(t, 0) = u(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- (ii) $A(t, 1) = v(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- (iii) $A(0, s) = a$ et $A(1, s) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$.

En termes de cette définition, si l'on pose :

$$u_s(t) := A(t, s),$$

alors chaque application $u_s : [0, 1] \rightarrow X$ est une courbe continue de a vers b . La famille de courbes $(u_s)_{0 \leq s \leq 1}$ est appelée une *déformation continue dans X de la courbe u vers la courbe v* , ou une *homotopie* entre u et v .



C'est alors la continuité de l'application A qui constitue l'hypothèse cruciale, car les déformations intermédiaires u_s sont censées rester toutes dans X .

Théorème. Soit X un espace topologique et soient deux points $a, b \in X$. Alors la notion d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes continues allant de a à b .

DÉMONSTRATION. La réflexivité et la symétrie de cette relation (notée \sim) sont immédiates. Pour ce qui est de la transitivité, on doit montrer que si $u, v, w : [0, 1] \rightarrow X$ sont trois courbes continues de a vers b telles que u et v , ainsi que v et w , sont homotopes, i.e. telles que $u \sim v$ et $v \sim w$, alors u et w sont elles aussi homotopes, i.e. $u \sim w$.

Par hypothèse, il existe donc deux applications continues :

$$A \text{ et } B : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

d'extrémités fixées pour tout $s \in [0, 1]$:

$$A(0, s) = B(0, s) = a \quad \text{et} \quad A(1, s) = B(1, s) = b,$$

qui jouissent des propriétés suivantes pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{array}{ll} A(t, 0) = u(t) & \text{[départ],} \\ A(t, 1) = B(t, 0) = v(t) & \text{[coïncidence intermédiaire],} \\ B(t, 1) = w(t) & \text{[arrivée].} \end{array}$$

Afin de « recoller » la seconde homotopie à la première, puisque par définition le paramètre de déformation s doit toujours appartenir à $[0, 1]$, il suffit de le renormaliser par un facteur 2 en définissant :

$$C(t, s) := \begin{cases} A(t, 2s) & \text{pour } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ B(t, 2s - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Alors C est continue et produit visiblement une homotopie entre u et w . □

Lemme. Soit $u : [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue dans un espace topologique X et soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue quelconque fixant les extrémités : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Alors les deux courbes u et $u \circ \varphi$ sont homotopes.

DÉMONSTRATION. En effet, définissons une application $A: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ par simple interpolation convexe entre les deux arguments temporels t et $\varphi(t)$:

$$A(t, s) := u((1 - s)t + s\varphi(t)).$$

Alors A est continue et satisfait visiblement, pour tous $t, s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} A(t, 0) &= u(t), & A(t, 1) &= (u \circ \varphi)(t), \\ A(0, s) &= u(0), & A(1, s) &= u(1). \end{aligned}$$

Donc A produit une homotopie entre la courbe u et sa composée $u \circ \varphi$. □

Définition. Soient a, b, c trois points d'un espace topologique X , soit $u: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe de a vers b et soit $v: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe de b vers c .

- La *courbe concaténée* $u \cdot v: [0, 1] \rightarrow X$ de a vers c est celle qui parcourt d'abord tous les points de u puis ceux de v et qui se définit comme suit en renormalisant le facteur temporel :

$$(u \cdot v)(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ v(2t - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- La *courbe inverse* $u^-: [0, 1] \rightarrow X$ de b vers a parcourt les points de u en sens opposé :

$$u^-(t) := u(1 - t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Lemme. Sous les mêmes hypothèses, soient $u_1, u_2: [0, 1] \rightarrow X$ deux courbes homotopes de a vers b et soient aussi $v_1, v_2: [0, 1] \rightarrow X$ deux autres courbes homotopes de b vers c . Alors l'homotopie est conservée par concaténation et par inversion :

$$u_1 \cdot v_1 \sim u_2 \cdot v_2 \quad \text{et} \quad u_1^- \sim u_2^-.$$

DÉMONSTRATION. Laissez en exercice. □

Définition. Soit X un espace topologique et soit $a \in X$ un point. La *courbe constante* est l'application (unique) $u_0: [0, 1] \rightarrow X$ qui reste en a , i.e. $u(t) = a$ pour tout t .

Théorème. Soit X un espace topologique et soient trois points $a, b, c, d \in X$. On suppose que $u, v, w: [0, 1] \rightarrow X$ sont trois courbes continues dans X qui satisfont :

$$u(0) = a, \quad u(1) = b = v(0), \quad v(1) = c = w(0), \quad w(1) = d.$$

De plus, soit u_0 la courbe constante en a et soit v_0 la courbe constante en b . Alors on a les homotopies suivantes :

- (i) $u_0 \cdot u \sim u \sim u \cdot v_0$;
- (ii) $u \cdot u^- \sim u_0$;
- (iii) $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$.

DÉMONSTRATION. (i) : Par définition de la concaténation de deux courbes, on a :

$$(u_0 \cdot u)(t) = \begin{cases} u_0(2t) = u(0) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ u(2t - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Autrement dit, on a $u_0 \cdot u = u \circ \psi$, où $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est le changement de paramètre temporel défini par $\psi(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\psi(t) = 2t - 1$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Il découle donc immédiatement du Lemme p. 15 que $u_0 \cdot u \sim u$. De manière similaire : $u \cdot v_0 \sim u$.

(ii) : À nouveau par définition, on a :

$$(u \cdot u^-)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ u(2 - 2t) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Définissons alors une application $A: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ par :

$$A(t, s) := \begin{cases} u(2t(1 - s)) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ u(2(1 - t)(1 - s)) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

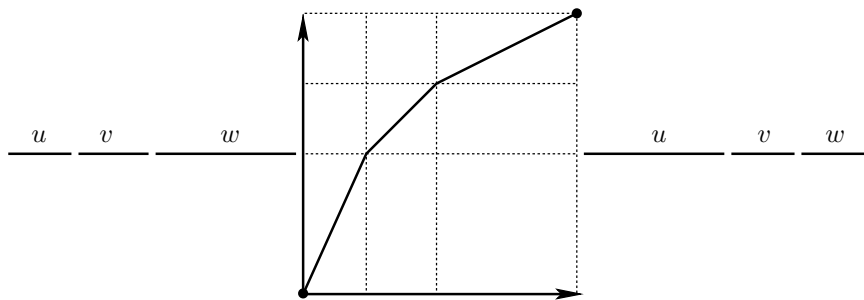
Alors on voit aisément que A fournit une homotopie entre $u \cdot u^-$ et la courbe constante u_0 .

(iii) : En résumant quelque peu la preuve, il est aisé de se convaincre (exercice instructif et recommandé) que l'on a :

$$(u \cdot v) \cdot w = (u \cdot (v \cdot w)) \circ \psi,$$

où l'application $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est le changement de paramètre temporel défini par :

- $\psi(0) = 0, \psi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \psi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, \psi(1) = 1$;
- ψ est affine par morceaux sur chacun des trois intervalles $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$.



Donc à nouveau, le résultat découle du Lemme p. 15. □

La propriété (iii) établit donc l'associativité du produit de concaténation des courbes, à homotopie près. Plus généralement, si u_1, \dots, u_n sont des courbes dans X telles que le point initial de u_{k+1} est égal au point final de u_k , i.e. $u_k(1) = u_{k+1}(0)$ pour $k = 1, \dots, n-1$, alors tous les parenthésages possibles du produit formel $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ qui définissent des concaténations diverses fournissent des courbes qui sont homotopes entre elles au moyen de changements de paramètres appropriés $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui généralisent celui vu à l'instant.

Définition. Une courbe continue $u: [0, 1] \rightarrow X$ dans un espace topologique X est dite fermée si l'on a $u(0) = u(1)$. Les courbes continues fermées sont parfois appelées des lacets (dans X). Une courbe fermée $u: [0, 1] \rightarrow X$ ayant un point $a \in X$ comme point initial et point final est dite homotope à zéro lorsqu'elle est homotope à la courbe constante en a .

Théorème et Définition. Soit X un espace topologique et soit $a \in X$ un point. L'ensemble $\pi_1(X, a)$ des classes d'équivalence, à homotopie près, de courbes fermées dans X ayant a comme point initial et final forme un groupe pour l'opération induite par le produit de concaténation des courbes.

Ce groupe est appelé le groupe fondamental de X de point-base a .

DÉMONSTRATION. Le fait que l'opération concaténation ne dépend que de la classe d'homotopie des lacets en a et passe donc au quotient a déjà été vu dans le Lemme p. 16. Le théorème précédent montre ensuite que cette opération quotient est associative (iii), que la classe des courbes homotopes à zéro devient naturellement l'élément neutre, et que l'inverse de la classe d'une courbe correspond naturellement à la classe de la courbe parcourue en sens inverse. \square

Si $u: [0, 1] \rightarrow X$, $u(0) = u(1) = a$, est un lacet en a dans X , on notera :

$$\text{cl}(u) \in \pi_1(X, a)$$

sa classe d'équivalence à homotopie près. On aura donc :

$$\text{cl}(u \cdot v) = \text{cl}(u) \text{cl}(v) \quad \text{et} \quad \text{cl}(u^-) = \text{cl}(u)^-.$$

Dépendance par rapport au point-base. Maintenant, le choix d'un point-base pour définir le groupe fondamental n'a rien de canonique. Supposons donc que $b \in X$ soit un autre point-base. Si l'espace topologique X est connexe par arcs, il existe une courbe continue w de a vers b . Alors on peut définir une application :

$$f: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, b)$$

par conjugaison de la manière suivante :

$$f(\text{cl}(u)) := \text{cl}(w^- \cdot u \cdot w).$$

Cette application est un isomorphisme (exercice). Par conséquent, dans un espace topologique X connexe par arcs, le groupe fondamental est essentiellement indépendant du point-base, et l'on s'autorise fréquemment à écrire juste $\pi_1(X)$ au lieu de $\pi_1(X, a)$, sans préciser le point-base.

Toutefois, il importe d'observer que l'isomorphisme ci-dessus $\pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ dépend en général de la courbe w qui joint a à b . En effet, si w_1 est une autre courbe de a vers b et si $f_1: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ est l'isomorphisme associé que l'on définit de la même manière par :

$$f_1(\text{cl}(u)) := \text{cl}(w_1^- \cdot u \cdot w_1),$$

alors l'automorphisme :

$$F := f_1^{-1} \circ f: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

n'est en général par l'identité et il satisfait $F(\text{cl}(u)) = \text{cl}(w_1 \cdot w^- \cdot u \cdot w \cdot w_1^-)$, c'est-à-dire en d'autres termes :

$$F(\alpha) = \gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1} \quad \text{pour tout } \alpha \in \pi_1(X, a),$$

si l'on désigne pour abréger par γ la classe d'homotopie du lacet $w_1 \cdot w^-$ en a . Ainsi donc, deux isomorphismes $\pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ associés à deux courbes continues w, w_1 de a vers b ne coïncident que lorsque w et w_1 sont homotopes. Cas particulier : observons que si $\pi_1(X, a)$ est abélien (ce qui est très rare), alors $F(\alpha) = \alpha$, donc $\pi_1(X, a)$ et tout autre $\pi_1(X, b)$ sont canoniquement isomorphes.

Définition centrale. Un espace topologique connexe par arcs X est dit *simplement connexe* si l'on a $\pi_1(X) = 0$, i.e. si tout lacet tracé dans X est homotope à zéro.

Ici, bien que l'opération de groupe dans $\pi_1(X)$ ait été notée *multiplicativement* ci-dessus, l'élément neutre du groupe fondamental est habituellement noté 0 dans la littérature.

Théorème. *Soit X un espace topologique connexe par arcs et simplement connexe, et soient a, b deux points dans X . Alors deux courbes quelconques $u, v: [0, 1] \rightarrow X$ de a vers b sont toujours homotopes l'une à l'autre.*

DÉMONSTRATION. En effet, soit u_0 (resp. v_0) la courbe constante en a (resp. b). L'hypothèse $\pi_1(X, b) = 0$ implique que le lacet $v^- \cdot u$ en b est homotope au lacet constant v_0 , à savoir :

$$v_0 \sim v^- \cdot u \quad \text{ce qui implique : } v \cdot v_0 \sim v \cdot (v^- \cdot u)$$

Mais par associativité, on a :

$$v \cdot (v^- \cdot u) \sim (v \cdot v^-) \cdot u \sim u_0 \cdot u \sim u,$$

Ceci montre que $v \cdot v_0 \sim u$, c'est-à-dire $v \sim u$, comme annoncé. \square

Assertion. *Tout sous-ensemble étoilé $E \subset \mathbb{R}^n$ est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Rappelons qu'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à l'un de ses points $e \in E$ si pour tout autre point $x \in E$, le segment de droite :

$$\lambda e + (1 - \lambda)x \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

de e à x est contenu dans E . Supposons donc que $u: [0, 1] \rightarrow E$ soit une courbe continue fermée partant et aboutissant en un tel point e par rapport auquel E est étoilé (il peut en exister plusieurs). Alors l'application :

$$A: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X, \quad A(s, t) := se + (1 - s)u(t),$$

fournit une homotopie entre u et la courbe constante en e (noter que tous les points intermédiaires $A(s, t)$ appartiennent à X). Ainsi, $\pi_1(X, e) = 0$. \square

Exemples. En particulier, le plan complexe \mathbb{C} ainsi que tous les disques (ouverts ou fermés) qu'il contient sont simplement connexes, car tous sont étoilés par rapport à n'importe lequel de leurs points. De même, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sont simplement connexes.

Assertion. *La sphère de Riemann \mathbb{P}^1 est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. En effet, soient les deux ouverts $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ et $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ qui recouvrent \mathbb{P}^1 . Puisqu'ils sont tous deux homéomorphes à \mathbb{C} , ils sont simplement connexes. Maintenant, supposons que $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^1$ soit une courbe fermée quelconque partant et aboutissant à l'origine $0 \in \mathbb{P}^1$. Puisque l'intervalle $[0, 1]$ est compact et puisque u est continue, on peut trouver un nombre fini de courbes $u_1, u_2, \dots, u_{2n}, u_{2n+1}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^1$ non nécessairement fermées qui satisfont les trois propriétés suivantes :

- la courbe concaténée :

$$v := u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{2n+1}$$

est, à un changement de paramètre temporel près, égale à la courbe u , et donc elle est homotope à u ;

- les courbes u_{2k+1} , $k = 0, \dots, n$, se trouvent entièrement dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$;
- les courbes u_{2k} , $k = 1, \dots, n$, se trouvent entièrement dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ et leurs points initiaux et finaux sont tous distincts de ∞ .

Alors, grâce au Théorème précédent, on peut, pour tout $k = 1, \dots, n$, déformer homotopiquement chaque courbe u_{2k} dans l'ouvert simplement connexe $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ en une autre courbe u'_{2k} qui évite ∞ , i.e. qui se trouve entièrement dans $\mathbb{P}^1 \setminus (\{0\} \cup \{\infty\})$. Clairement, la courbe ainsi perturbée :

$$v' := u_1 \cdot u'_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u'_{2n} \cdot u_{2n+1}$$

est homotope à v , et donc on a $u \sim v \sim v'$. Enfin, puisque :

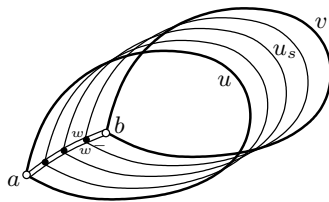
$$u'_{2k}([0, 1]) \subset \mathbb{P}^1 \setminus (\{0\} \cup \{\infty\}) \subset \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\},$$

cette courbe concaténée v' a toutes ses composantes $u_1, u'_2, u_3, \dots, u'_{2n}, u_{2n+1}$ qui se trouvent alors entièrement dans l'ouvert simplement connexe $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$, et par conséquent, elle — et donc u aussi — est homotope à zéro, ce qui montre bien que $\pi_1(\mathbb{P}^1) = 0$. \square

Définition. Soit X un espace topologique et soient $u, v: [0, 1] \rightarrow X$ deux courbes continues fermées dans X qui n'ont pas nécessairement le même point-base. Alors u et v sont dites *librement homotopiques* s'il existe une application continue $A: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ satisfaisant :

- (i) $A(t, 0) = u(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- (ii) $A(t, 1) = v(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$;
- (iii) $A(0, s) = A(1, s)$ pour tout $s \in [0, 1]$.

Si l'on pose alors $u_s(t) := A(t, s)$, alors toute application $u_s: [0, 1] \rightarrow X$ est une courbe continue fermée dans X , avec $u_0 = u$ et $u_1 = v$. La famille des courbes u_s , $0 \leq s \leq 1$, donne alors une déformation continue de la courbe u vers la courbe v . Soit $w(t) := A(0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Alors w est une courbe continue qui joint $a := u(0) = u(1)$ à $b := v(0) = v(1)$. On observera que pour tout s , le point $w(s)$ est le point initial et final de la courbe continue fermée u_s . On peut se convaincre (exercice) que u est homotope, en conservant fixe son point initial-final a , à la courbe $w \cdot v \cdot w^-$.



Théorème. Un espace topologique connexe par arcs X est simplement connexe si et seulement si deux courbes continues fermées quelconques dans X sont librement homotopiques.

DÉMONSTRATION. Exercice mental laissé au lecteur. \square

Comportement fonctoriel. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y . Si $u: [0, 1] \rightarrow X$ est une courbe continue dans X , alors $f \circ u: [0, 1] \rightarrow Y$ est une courbe continue dans Y . De plus, si deux courbes $u, u': [0, 1] \rightarrow X$ sont homotopes entre elles, alors les deux courbes images $f \circ u$ et $f \circ u'$ sont elles aussi homotopes entre elles (exercice). Par conséquent, f induit une application :

$$f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$

entre groupes fondamentaux. De plus, cette application est un *homomorphisme de groupes*, puisque l'on vérifie immédiatement que :

$$f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v) \quad \text{et} \quad f \circ (u^-) = (f \circ u)^-.$$

Enfin, si $g: Y \rightarrow Z$ est une autre application continue à valeurs dans un troisième espace topologique, alors on a naturellement :

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Exercices

Exercice 3.1. Soit X une variété et soient $U_1, U_2 \subset X$ deux sous-ensembles ouverts connexes et simplement connexes tels que $U_1 \cap U_2$ est connexe. Montrer que la réunion $U_1 \cup U_2$ est elle aussi simplement connexe.

Exercice 3.2. Soient X et Y deux espaces topologiques connexes par arcs. Montrer que :

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Exercice 3.3. Soient (X, a) et (Y, b) deux espaces topologiques pointés, avec $a \in X$ et $b \in Y$. Si $f, g: X \rightarrow Y$ sont deux applications continues satisfaisant $f(a) = g(a) = b$, on dit qu'elles sont *homotopes* s'il existe une application continue :

$$F: X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$ et telle que $F(a, t) = b$ pour tout $t \in [0, 1]$. On considère les deux applications induites :

$$f_*, g_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b).$$

Montrer que l'on a $f_* = g_*$ si f et g sont homotopes.

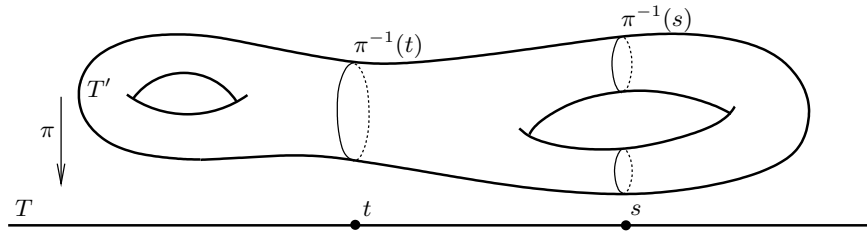
4. Revêtements purs et revêtements ramifiés

Les applications holomorphes non constantes entre surfaces de Riemann sont des revêtements, parfois avec des points de ramification. C'est pour cette raison que l'on doit étudier d'abord la théorie générale des revêtements entre variétés avant de pouvoir l'appliquer aux surfaces de Riemann dans le prochain chapitre.

Définition. Soient T et T' deux espaces topologiques et soit $\pi: T' \rightarrow T$ une application continue. Si $t \in T$ est un point, le sous-ensemble :

$$\pi^{-1}(t) := \{t' \in T' : \pi(t') = t\}$$

est appelé la *fibres* de π au-dessus de t .



Définition. Avec $\pi: T' \rightarrow T$ comme ci-dessus, si $\tau: T'' \rightarrow T$ est une seconde application continue entre espace topologiques de même but T , alors une application continue $\phi: T' \rightarrow T''$ est dite *préservé les fibres* si l'on a $\pi = \tau \circ \phi$:

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\phi} & T'' \\ \pi \downarrow & \searrow \tau & \\ T & & \end{array}$$

En effet, on voit, pour tout point $t' \in \pi^{-1}(t)$ dans la fibre au-dessus d'un point $t \in T$ quelconque, que $\phi(t') \in T''$ appartient à la fibre $\tau^{-1}(t)$ de la seconde application *au-dessus du même point*, puisque :

$$\pi(t') = t = \tau(\phi(t')).$$

Géométriquement, ces inclusions :

$$\phi(\pi^{-1}(t)) \subset \tau^{-1}(t) \quad (\forall t \in T)$$

signifient donc que ϕ envoie les fibres de π dans les fibres de τ sans en changer les points de base.

Définition. Un sous-ensemble A d'un espace topologique T est dit *discret* si tout point $a \in A$ possède un voisinage ouvert $V_a \ni a$ tel que $V_a \cap A = \{a\}$. Une application $\pi: T' \rightarrow T$ entre deux espaces topologiques T' et T est dite *discrète* si la fibre $\pi^{-1}(t) \subset T'$ de tout point $t \in T$ est un sous-ensemble discret de T' .

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $p: Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante. Alors p est ouverte et à fibres discrètes.

DÉMONSTRATION. Puisque p est holomorphe, on sait qu'elle est ouverte. Par contradiction, si la fibre d'un point $a \in X$ n'était pas discrète, alors par le théorème d'identité, p serait identiquement égale à la constante a . \square

Définition. Si $p: Y \rightarrow X$ est une application holomorphe non constante, on dira que Y est un *domaine au-dessus de* X .

Dans une telle circonstance, une fonction holomorphe (resp. méromorphe) $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ (resp. $f: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$) peut alors aussi être considérée comme une application holomorphe (resp. méromorphe) *multivaluée* sur X , en raisonnant comme suit.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \\ p \downarrow & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

Si $x \in X$ et si $p^{-1}(x) = \{y_j \in Y: j \in J\}$ est sa fibre (discrète), alors les $f(y_j)$, $j \in J$, seront par définition les différentes valeurs au point x de cette application multivaluée associée (bien entendu, il se peut que $p^{-1}(x)$ se réduise à un seul point ou soit même vide). Inversement, la théorie des surfaces de Riemann vise à construire Y lorsqu'une application multivaluée apparaît naturellement.

Exemple. Soit $Y := \mathbb{C}$, soit $X := \mathbb{C}^*$ et soit $p = \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Alors l'application identité $\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspond au logarithme complexe (multivalué) sur \mathbb{C}^* .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & \nearrow \log & \\ \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

En effet, pour $z \in \mathbb{C}^*$ quelconque, l'ensemble $\exp^{-1}(z)$ consiste précisément en les différentes valeurs du logarithme de z .

Définition. Soient T et T' deux espaces topologiques. Une application $\pi: T' \rightarrow T$ est un *homéomorphisme local* si tout point $t' \in T'$ possède un voisinage ouvert U' dont l'image $\pi(U') =: U \subset T$ est ouverte dans T et tel que la restriction :

$$\pi|_{U'}: U' \longrightarrow U$$

est un homéomorphisme. Il en découle que la fibre $\pi^{-1}(t)$ de tout point $t \in T$ est un sous-ensemble discret de T' .

Définition. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $p: Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante. Un point $y \in Y$ est appelé *point de branchement* ou *point de ramification* de p s'il n'existe pas de voisinage V de y tel que la restriction $p|_V$ soit injective. Une telle application p est dite *non ramifiée* s'il elle n'a aucun point de branchement dans Y .

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application holomorphe non constante $p: Y \rightarrow X$ n'a aucun point de branchement si et seulement si c'est un homéomorphisme local. Plus concrètement, tel est le cas si et seulement si sa forme normale locale $z \mapsto z^{k_y}$ au voisinage de tout point $y \in Y$ (dans de bonnes coordonnées) est d'exposant $k_y = 1$.

DÉMONSTRATION. En effet, supposons d'abord que $p: Y \rightarrow X$ n'a pas de point de branchement et soit $y \in Y$ un point arbitraire. Puisque y n'est pas point de branchement, il existe un voisinage ouvert V de y dans Y tel que $p|_V$ est injective. Le Théorème de comportement local des applications holomorphe implique alors que l'exposant k_y attaché à y est égal à 1, puisque $z \mapsto z^k$ n'est pas injective dès que $k \geq 2$, d'où la différentielle de p en y ne s'annule pas, ce qui implique que p est un biholomorphisme local d'un voisinage de y sur son image.

Réciproquement, supposons que $p: Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme local. Alors pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V de y dans Y qui est envoyé homéomorphiquement sur un voisinage ouvert de $p(y)$ dans X . En particulier, $p|_V$ est injective, et donc y n'est pas un point de branchement pour p . \square

Exemples.

(a) Puissance canonique : Supposons que $k \geq 2$ est un entier et soit $p_k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $p_k(z) := z^k$. Alors $0 \in \mathbb{C}$ est un point de branchement pour p_k mais la restriction $p_k|_{\mathbb{C}^*}$ de cette puissance k -ème à \mathbb{C}^* est non ramifiée.

(b) Supposons que $p: Y \rightarrow X$ est une application holomorphe non constante, et soient $y \in Y$, puis $x := p(y)$. Alors y est un point de branchement pour p précisément lorsque l'application p prend la valeur x au point y avec une multiplicité ≥ 2 , au sens d'une définition qui précède. On a déjà vu que le comportement local de p au voisinage de y est le même que celui de l'application $z \mapsto z^k$ pour un certain $k = k_y$ qui dépend de y .

(c) L'application $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une application holomorphe non ramifiée, puisque \exp est injective sur tout sous-ensemble $V \subset \mathbb{C}$ qui ne contient pas deux points qui diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$. Une autre manière de s'en convaincre est de rappeler que la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule jamais et de constater que :

Lemme. Un point $y \in Y$ est de branchement pour une application holomorphe $p: Y \rightarrow X$ entre deux surfaces de Riemann si et seulement si sa différentielle complexe :

$$D^{\mathbb{C}}p: T_y^{\mathbb{C}}Y \longrightarrow T_{p(y)}^{\mathbb{C}}X$$

entre espace tangents complexes (tous deux de dimension complexe égale à 1) est nulle au point y .

DÉMONSTRATION. Laissée au lecteur : il faut se convaincre que la notion d'espace tangent réel à une variété réelle connue en géométrie différentielle *réelle* a un sens *complexe* pour les surfaces de Riemann. \square

(d) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau et soit $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la surjection canonique sur l'espace quotient. Alors π est non ramifiée. \square

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit Y un espace topologique séparé et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Alors il existe une unique structure complexe sur Y qui rend p holomorphe, et même, localement biholomorphe.

DÉMONSTRATION. Idée : il s'agit tout simplement de relever à X la structure complexe disponible sur X grâce à l'existence d'inverses locaux à p .

Plus précisément, supposons que $\varphi_1: U_1 \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ est une carte pour la structure complexe de X telle qu'il existe un ouvert $U \subset Y$ tel que $p|_U: U \rightarrow U_1$ est un homéomorphisme (il en existe toujours, pourvu que U_1 soit assez petit). Alors $\psi_1 := \varphi_1 \circ p: U \rightarrow V$ est une carte complexe sur Y . Soit \mathfrak{A} l'ensemble de toutes les cartes complexes sur Y obtenues de cette manière. Alors ces cartes recouvrent Y et sont holomorphiquement compatibles entre elles : si $\psi_1 = \varphi_1 \circ p$ et si $\psi_2 = \varphi_2 \circ p$, on a $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, application qui est clairement holomorphe sur son ensemble de définition par hypothèse. Si l'on munit Y de la structure complexe définie par cet atlas \mathfrak{A} , alors la 'projection' p est localement biholomorphe (par construction !), et donc en particulier, c'est une application holomorphe.

Quant à l'unicité de la structure, raisonnons comme suit. Si \mathfrak{A}' est un autre atlas complexe sur Y tel que l'application $p: (Y, \mathfrak{A}') \rightarrow X$ est holomorphe, et donc localement biholomorphe puisque c'est un homéomorphisme local, alors l'application identité $(Y, \mathfrak{A}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A}')$ est aussi localement biholomorphe, ce qui implique que \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' définissent la même structure complexe. \square

Relèvement des applications. Supposons maintenant que X, Y et Z sont des espaces topologiques et que $p: Y \rightarrow X$ et $f: Z \rightarrow X$ sont des applications continues.

Définition. On appelle *relèvement* de f relativement à p toute application continue $g: Z \rightarrow Y$ telle que $f = p \circ g$, i.e. telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Géométriquement parlant, tout point $z_0 \in Z$ est envoyé par g sur l'un des points qui se situent *au-dessus* de $f(z_0)$ dans Y , à savoir : $g(z_0)$ est l'un des points de la fibre $p^{-1}(f(z_0))$.

L'unicité d'un relèvement ne demande quasiment aucune hypothèse — juste la connexité de Z —, mais l'existence d'un relèvement (voir ci-dessous) requiert des hypothèses topologiques significatives, comme par exemple la simple connexité de Z .

Théorème (Unicité des relèvements de source connexe). Soient X et Y des espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local, par exemple un revêtement (voir définition ci-dessous). Soit Z un espace topologique connexe et soit $f: Z \rightarrow X$ une application continue. Si $g_1, g_2: Z \rightarrow Y$ sont deux relèvements de f dont les valeurs $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ coïncident en au moins un point $z_0 \in Z$, alors $g_1 = g_2$ identiquement.

DÉMONSTRATION. Idée : l'hypothèse d'homéomorphisme local, et donc l'existence d'inverses locaux p^{-1} , force les relèvements qui satisfont par définition $f = p \circ g_i$, $i = 1, 2$, à être localement égaux à $g_i := p^{-1} \circ f$, donc à coïncider ; géométriquement parlant, lorsque p est un revêtement (voir définition ci-dessous), g_1 et g_2 sont forcées de se déplacer localement dans le même étage.

Plus précisément, considérons l'ensemble de coïncidence :

$$\mathcal{C}_Z := \{z \in Z: g_1(z) = g_2(z)\},$$

qui est non vide puisque z_0 lui appartient. Tout d'abord, \mathcal{C}_Z est fermé, puisque c'est la préimage de la diagonale :

$$\Delta := \{(y, y) \in Y \times Y : y \in Y\}$$

par l'application continue $(g_1, g_2): Z \rightarrow Y \times Y, z \mapsto (g_1(z), g_2(z))$.

Nous affirmons que \mathcal{C}_Z est aussi ouvert. En effet, soit $z \in \mathcal{C}_Z$ et posons $y := g_1(z) = g_2(z)$. Puisque p est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V de y dans Y qui est appliqué homéomorphiquement par p sur un voisinage ouvert U de $p(y) = f(z)$ dans X . Mais comme g_1 et g_2 sont toutes deux continues, il existe un voisinage ouvert W de z dans Z tel que $g_i(W) \subset V$, pour $i = 1, 2$. Maintenant, soit $\varphi: U \rightarrow V$ l'inverse de $p|_V: V \rightarrow U$, qui est continu. Parce que $p \circ g_i = f$, on a :

$$g_i|_W = \varphi \circ (f|_W) \quad (i=1,2),$$

ce qui implique $g_1|_W = g_2|_W$, et donc \mathcal{C}_Z est ouvert ;

En conclusion, puisque l'ensemble de coïncidence $\mathcal{C}_Z \subset Z$ non vide est à la fois ouvert et fermé, et puisque Z est connexe, on a bien $\mathcal{C}_Z = Z$, donc $g_1 = g_2$ identiquement. \square

Voici une autre illustration du fait que les relèvements sont localement canalisés.

Théorème. Soient X, Y et Z trois surfaces de Riemann, soit $p: Y \rightarrow X$ une application holomorphe non ramifiée et soit $f: Z \rightarrow X$ une application holomorphe quelconque. Alors tout relèvement continu $g: Z \rightarrow Y$ de f est nécessairement holomorphe.

DÉMONSTRATION. Soit $c \in Z$ un point arbitraire, soit $b := g(c)$ et soit $a := p(b) = f(c)$. Il existe des voisinages ouverts V de b et U de a tels que $p|_V: V \rightarrow U$ est biholomorphe. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ l'application inverse. Puisque g est continue, il existe un voisinage ouvert W de c tel que $g(W) \subset V$. Mais comme $f = p \circ g$, on déduit $g|_W = \varphi \circ (f|_W)$, et donc g est holomorphe au voisinage du point c . \square

Corollaire. Soient X, Y et Z trois surfaces de Riemann et soient deux applications holomorphes non ramifiées $p: Y \rightarrow X$ et $q: Z \rightarrow X$. Alors toute application continue $f: Y \rightarrow Z$ qui préserve les fibres, i.e. satisfait $p = q \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow p & \searrow q & \\ X & & \end{array}$$

est holomorphe.

DÉMONSTRATION. En effet, un changement de perspective dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow f & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

montre que f est un relèvement de p relativement à q , donc le théorème s'applique. \square

Relèvement des courbes. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Pour traiter de la question de l'existence de relèvements, il est approprié de traiter d'abord la question dans le cas où $Z = [0, 1]$ est un intervalle fermé. Ainsi, intéressons-nous d'abord à l'existence de relèvements pour des courbes $u: [0, 1] \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow ? & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Nous savons déjà que si un tel relèvement $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow Y$ existe, alors il est nécessairement unique dès que le relèvement du point initial $\hat{u}(0) \in Y$ est choisi.

Théorème (Relèvement des homotopies entre courbes). Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Soient deux points $a, b \in X$ et soit $\hat{a} \in Y$ un point au-dessus de a , i.e. tel que $p(\hat{a}) = a$. Enfin, soit $A: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une application continue telle que $A(0, s) = a$ et $A(1, s) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$ qui effectue une homotopie à extrémités fixées entre deux courbes u_0 et u_1 de a vers b , où l'on pose :

$$u_s(t) := A(t, s).$$

Si toute courbe $u_s: [0, 1] \rightarrow X$ peut être relevée en une courbe continue $\hat{u}_s: [0, 1] \rightarrow Y$ de point initial $\hat{u}_s(0) = \hat{a}$, alors :

- (i) \hat{u}_0 et \hat{u}_1 ont même point final $\hat{u}_0(1) = \hat{u}_1(1)$;
- (ii) l'application $(t, s) \mapsto \hat{u}_s(t)$ est continue et elle produit une homotopie dans Y entre les deux courbes relevées \hat{u}_0 et \hat{u}_1 .

DÉMONSTRATION. Définissons une application $\hat{A}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ par $\hat{A}(t, s) := \hat{u}_s(t)$.

Lemme. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que \hat{A} est continue sur $[0, \varepsilon] \times [0, 1]$.

PREUVE. Par hypothèse, il existe deux voisinages ouverts V de \hat{a} et U de a tels que $p|_V: V \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ l'application inverse. Puisque $A(0 \times [0, 1]) = \{a\}$, et que A est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A([0, \varepsilon] \times [0, 1]) \subset U$. Grâce à l'unicité du relèvement des courbes, on a :

$$\hat{u}_s|_{[0, \varepsilon]} = \varphi \circ u_s|_{[0, \varepsilon]} \quad \text{pour tout } s \in [0, 1].$$

Ainsi donc, on a $\hat{A} = \varphi \circ A$ sur $[0, \varepsilon] \times [0, 1]$ et ceci implique que \hat{A} est bel et bien continue sur $[0, \varepsilon] \times [0, 1]$. \square

Lemme. L'application \hat{A} est continue sur le produit complet $[0, 1] \times [0, 1]$.

PREUVE. Supposons au contraire par l'absurde qu'il existe un point $(t_0, \sigma_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ en lequel l'application \hat{A} n'est pas continue. Sans perte de généralité, on peut supposer que t_0 est le minimum de tous les $t \in [0, 1]$ tels que \hat{A} n'est pas continue en (t, σ_0) . D'après le lemme qui précède, on a $t_0 \geq \varepsilon$.

Par hypothèse, il existe des voisinages ouverts V de $\widehat{A}(t_0, \sigma_0) = \widehat{u}_{\sigma_0}(t_0)$ et U de $A(t_0, \sigma_0)$ tels que $p|_V \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Soit donc $\varphi: U \rightarrow V$ son inverse. Puisque A est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$A(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times]\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon[) \subset U.$$

En particulier, $u_{\sigma_0}(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[) \subset U$ et donc par unicité du relèvement des courbes :

$$\widehat{u}_{\sigma_0}|_{]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} = \varphi \circ u_{\sigma_0}|_{]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[}.$$

Choisissons maintenant un point $t_1 \in]t_0 - \varepsilon, t_0[$. Alors :

$$\widehat{A}(t_1, \sigma_0) = \widehat{u}_{\sigma_0}(t_1) \in V.$$

Puisque \widehat{A} est continue en (t_1, σ_0) , il existe $\delta > 0$ avec $\delta \leq \varepsilon$ tel que :

$$\widehat{A}(t_1, s) = \widehat{u}_s(t_1) \in V \quad \text{pour tout } s \in]\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta[.$$

Mais grâce à l'unicité des relèvements, il s'ensuit maintenant que pour tout $s \in]\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta[$, on doit avoir :

$$\widehat{u}_s|_{]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} = \varphi \circ u_s|_{]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[}.$$

Donc $\widehat{A} = \varphi \circ A$ sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times]\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta[$, composition qui est continue. Mais ceci contredit la définition de (t_0, σ_0) . En définitive, \widehat{A} est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$. \square

La fin de la démonstration du théorème est maintenant aisée. Puisque $A = p \circ \widehat{A}$ et que $A(\{1\} \times [0, 1]) \subset \{b\}$, on déduit que $\widehat{A}(\{1\} \times [0, 1]) \subset p^{-1}(b)$. Mais puisque par ailleurs, $p^{-1}(b)$ est discret tandis que $\{1\} \times [0, 1]$ est connexe, la continuité de \widehat{A} implique que l'ensemble connexe :

$$\widehat{A}(\{1\} \times [0, 1]) \subset p^{-1}(b)$$

consiste en un seul point. Cela semble miraculeux (tout en étant parfaitement rigoureux), et ceci implique que toutes les courbes \widehat{u}_s , et en particulier au moins \widehat{u}_0 et \widehat{u}_1 , ont même point final. En conclusion, les deux courbes \widehat{u}_0 et \widehat{u}_1 sont homotopes au moyen de \widehat{A} . \square

Revêtements. Nous voulons maintenant donner une condition qui assure que le relèvement des courbes est possible.

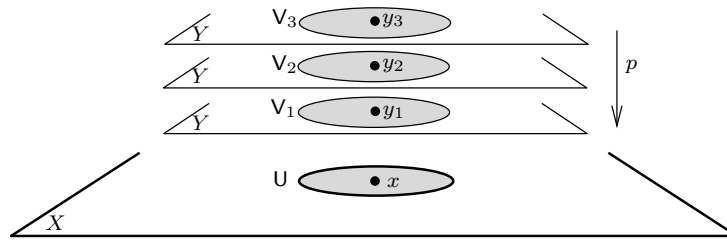
Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p: Y \rightarrow X$ est appelée un *revêtement* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dans X (suffisamment petit) dont la préimage :

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

consiste en une famille, indexée par un certain ensemble J , d'ouverts $V_j \subset Y$ *disjoints deux à deux* tels que chaque application restreinte :

$$p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$$

est un homéomorphisme (pile d'assiettes ouvertes disjointes).



Observation directe. *Tout revêtement est un homéomorphisme local.* □

Exemples de revêtements.

(a) Toutefois, il existe des homéomorphismes locaux qui ne sont pas des revêtements. Si $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ désigne le disque unité ouvert dans \mathbb{C} , alors l'inclusion $\iota: \Delta \hookrightarrow \mathbb{C}$ est un homéomorphisme local (exercice mental), mais ce n'est pas un revêtement, car pour tout point $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et pour tout voisinage ouvert U_a dans \mathbb{C} suffisamment petit pour être contenu dans le disque de centre a et de rayon $\frac{1}{2}$, on a $\iota^{-1}(U_a) = U_a \cap \Delta$, et la restriction $\iota|_{U_a \cap \Delta}$ ne constitue pas un homéomorphisme de $U_a \cap \Delta$ sur U_a , puisqu'elle n'est jamais surjective.

(b) Soit k un nombre entier ≥ 2 et soit :

$$p_k: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^k.$$

Alors p_k est un revêtement. En effet, supposons que $a \in \mathbb{C}^*$ est arbitraire et choisissons $b \in \mathbb{C}^*$ avec $p_k(b) = a$. Puisque p_k est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_0 de b et un voisinage ouvert U de a tel que $p_k|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Alors on a :

$$p_k^{-1}(U) = V_0 \cup \omega V_0 \cup \dots \cup \omega^{k-1} V_0,$$

où ω est une racine primitive k -ème de l'unité, par exemple $\exp(2i\pi/k)$. Il est clair que les ensembles $V_j := \omega^j V_0$, $j = 0, \dots, k-1$, sont disjoints deux à deux, et que chaque restriction $p_k|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

(c) L'application $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement.

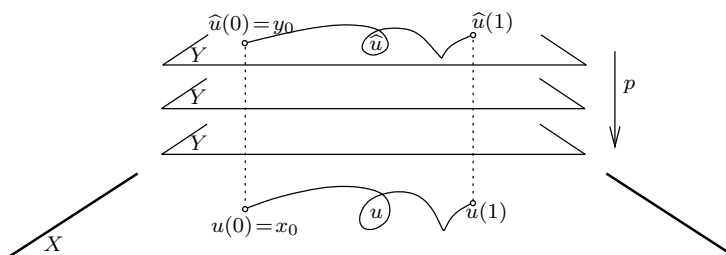
PREUVE. En effet, soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $\exp(b) = a$. Puisque l'exponentielle est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_0 de b et un voisinage ouvert U de a tels que $\exp|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Alors on a :

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \quad \text{où } V_n := 2i\pi n + V_0.$$

Il est clair que les V_n sont disjoints deux à deux et que chaque application $\exp|_{V_n}: V_n \rightarrow U$ est un homéomorphisme. □

(d) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau et soit $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ l'application quotient canonique. De la même manière que dans l'exemple (c) vu à l'instant, on vérifie (exercice recommandé) que π est un revêtement.

Définition. On dit qu'une application continue $p: Y \rightarrow X$ possède la propriété de relèvement des courbes si, pour toute courbe continue $u: [0, 1] \rightarrow X$ et tout point $y_0 \in Y$ au-dessus de $u(0)$, i.e. tel que $p(y_0) = u(0)$, il existe un relèvement $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow Y$ de u partant de y_0 , i.e. satisfaisant $\hat{u}(0) = y_0$.



Théorème. *Tout revêtement $p: Y \rightarrow X$ d'un espace topologique quelconque Y sur un autre espace topologique quelconque¹ X possède la propriété de relèvement des courbes.*

DÉMONSTRATION. Soit donc $u: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe et soit $y_0 \in Y$ avec $p(y_0) = u(0)$. Grâce à la compacité de l'intervalle $[0, 1]$, on peut trouver une subdivision finie :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

et des ouverts suffisamment petits $U_k \subset X$, $k = 1, \dots, n$, qui satisfont les deux propriétés suivantes :

- (i) $u([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$;
- (ii) $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{k,j}$ pour tout $k = 1, \dots, n$, où les $V_{k,j}$ sont des ouverts disjoints de Y paramétrés par un certain ensemble indiciel J_k , tels que chaque restriction $p|_{V_{k,j}}: V_{k,j} \rightarrow U_k$ est un homéomorphisme.

Par récurrence sur $k = 0, 1, \dots, n$, nous allons démontrer l'existence d'un relèvement $\hat{u}|_{[0, t_k]}: [0, t_k] \rightarrow Y$ avec $\hat{u}(0) = y_0$, ce qui conclura la preuve lorsque $k = n$.

Pour $k = 0$, c'est trivial. Supposons donc qu'un tel relèvement $\hat{u}: [0, t_{k-1}] \rightarrow Y$ ait déjà été construit, pour un certain entier $k \geq 1$ avec $k \leq n - 1$, et posons $\hat{u}(t_{k-1}) =: y_{k-1}$. Puisque $p(y_{k-1}) = u(t_{k-1}) \in U_k$, il existe un certain indice $j \in J_k$ tel que $y_{k-1} \in V_{k,j}$. Soit $\varphi: U_k \rightarrow V_{k,j}$ l'inverse de l'homéomorphisme $p|_{V_{k,j}}: V_{k,j} \rightarrow U_k$. Alors si on pose :

$$\hat{u}|_{[t_{k-1}, t_k]} := \varphi \circ (u|_{[t_{k-1}, t_k]}),$$

il est clair qu'on obtient un prolongement continu du relèvement \hat{u} à l'intervalle $[0, t_k]$. \square

Corollaire. *Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement entre deux espaces topologiques séparés, soit un point $x_0 \in X$ et soit $y_0 \in Y$ un point au-dessus de x_0 , i.e. tel que $p(y_0) = x_0$. Alors pour toute courbe $u: [0, 1] \rightarrow X$ avec $u(0) = x_0$, il existe exactement une courbe continue relevée $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow Y$ partant de y_0 , i.e. satisfaisant :*

$$p \circ \hat{u}(t) = u(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1] \quad \text{et } \hat{u}(0) = y_0.$$

PREUVE. L'existence provient du théorème qui précède, et l'hypothèse de séparation sur X et Y assure que le théorème d'unicité s'applique. \square

Observation importante. Lorsque la courbe u est fermée, ses relèvements \hat{u} ne sont pas nécessairement fermés. Voici un premier exemple. Soit $X = Y = \mathbb{C}^*$, soit :

$$p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^2,$$

et soient $x_0 = y_0 = 1$. On définit la courbe $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ par $u(t) = e^{2i\pi t}$. Alors la courbe u part de 1 et y aboutit aussi, donc elle est fermée. Toutefois, $\hat{u}(t) := \exp^{i\pi t}$ définit

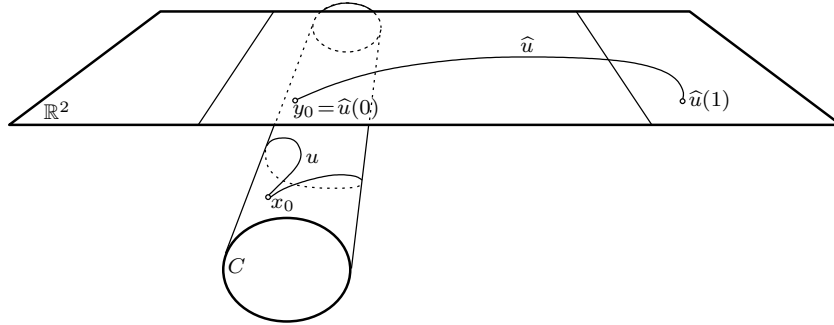
¹ Ni X ni Y ne sont supposés être forcément séparés.

clairement un relèvement $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ de u relativement à $z \mapsto z^2$, et ce relèvement, qui part de $\hat{u}(0) = 1$, n'y aboutit pas, puisque $\hat{u}(1) = -1$, en fait.

Un autre exemple (diagrammatisable) est fourni par l'application de revêtement du cylindre :

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$$

par le plan \mathbb{R}^2 via l'application $(x, y) \mapsto (x \bmod 1, y)$.



Néanmoins, une conséquence immédiate du Théorème de relèvement des homotopies entre courbes est suffisamment importante pour figurer à titre de résultat central.

Théorème. Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement entre espaces topologiques séparés. Tout relèvement $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow Y$ d'une courbe fermée homotope à zéro $u: [0, 1] \rightarrow X$ « en bas » est à nouveau une courbe fermée homotope à zéro « en haut ». \square

Un aspect fort sympathique d'un revêtement est l'équi-cardinalité de ses fibres.

Théorème. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés avec X connexe par arcs et soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. Alors pour toute paire de points quelconques $x_1, x_2 \in X$, les deux ensembles (fibres) $p^{-1}(x_1)$ et $p^{-1}(x_2)$ ont même cardinal. En particulier, si Y est non vide, alors p est forcément surjective.

Le cardinal commun des fibres $p^{-1}(x)$ lorsque x parcourt X est parfois appelé le nombre de feuillettes ou degré du revêtement p , et il peut être fini ($z \mapsto z^k$) ou infini ($z \mapsto \exp z$).

DÉMONSTRATION. On construit une application bijective $\varphi: p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_2)$ de la manière suivante. Choisissons une courbe continue $u: [0, 1] \rightarrow X$ qui joint x_1 à x_2 . Si $y \in p^{-1}(x_1)$ est un point arbitraire, alors il existe, grâce à un théorème qui précède, précisément un relèvement $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow Y$ de u tel que $\hat{u}(0) = y$. On pose alors $\varphi(y) := \hat{u}(1) \in p^{-1}(x_2)$. L'unicité des relèvements implique donc bien que cette application est bijective. \square

En général, l'application bijective construite à l'instant dépend du choix d'une courbe u qui joint x_1 à x_2 , et donc il n'y a pas de manière canonique d'énumérer globalement les 'feuillettes' d'un revêtement.

Nous pouvons enfin énoncer le premier théorème d'existence d'un relèvement qui ne se cantonne pas au cas des courbes, bien que le relèvement des courbes y soit utilisé de manière cruciale. L'hypothèse importante ici est que Z soit simplement connexe.

Théorème d'existence de relèvements à source simplement connexe. Soit X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. De plus, soit Z un espace

topologique simplement connexe et localement connexe par arcs, et soit $f: Z \rightarrow X$ une application continue.

$$\begin{array}{ccc} & & Y, y_0 \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ Z, z_0 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

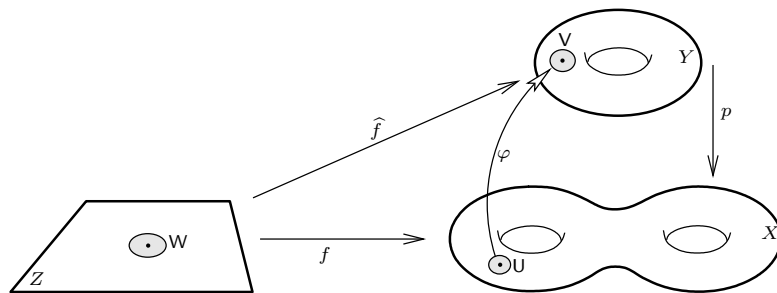
Alors pour tout choix de deux points $z_0 \in Z$ et $y_0 \in Y$ avec $f(z_0) = p(y_0)$, il existe exactement un relèvement continu $\hat{f}: Z \rightarrow Y$ tel que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION. Définissons l'application $\hat{f}: Z \rightarrow Y$ de la manière suivante. Soit $z \in Z$ un point arbitraire et soit $u: [0, 1] \rightarrow Z$ une courbe de z_0 vers z . Alors $v := f \circ u$ est une courbe dans X de point initial $f(z_0)$ et de point final $f(z)$. Ensuite, soit $\hat{v}: [0, 1] \rightarrow Y$ le relèvement unique de v qui part de y_0 . On décide alors de poser :

$$\hat{f}(z) := \hat{v}(1),$$

mais cette définition semble dépendre du choix de la courbe u qui va de z_0 vers z . Toutefois, il n'en est rien, car si u_1 est une autre courbe continue de z_0 vers z , alors u_1 est homotope à u (puisque Z est simplement connexe), et donc aussi, les deux courbes $v_1 := f \circ u_1$ et $v = f \circ u$ sont homotopes entre elles. Maintenant, grâce au théorème de relèvement des homotopies entre courbes, les deux relèvements \hat{v}_1 de v_1 et \hat{v} de v de même point initial $\hat{v}_1(0) = \hat{v}(0) = y_0$ ont nécessairement aussi même point final $\hat{v}_1(1) = \hat{v}(1)$. En définitive, l'application $\hat{f}(z)$ est bien définie, et par construction, on a $f = p \circ \hat{f}$.

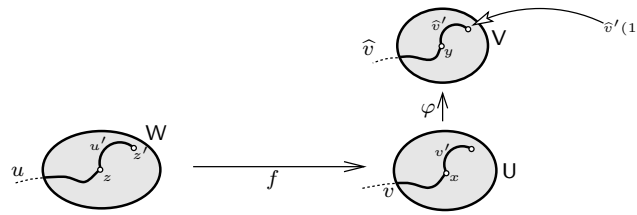
Il ne reste plus qu'à vérifier que l'application $\hat{f}: Z \rightarrow Y$ est continue. Soit donc $z \in Z$ un point quelconque, posons $y = \hat{f}(z)$ et soit V un voisinage ouvert de y dans Y . Nous devons montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de z dans Z tel que $\hat{f}(W) \subset V$, ce qui établira la continuité de \hat{f} .



Puisque p est un homéomorphisme local, on peut supposer, après rapetissement éventuel de V , qu'il y a un voisinage ouvert U de $p(y) = f(z) =: x$ dans X tel que $p|_V: V \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Soit donc $\varphi: U \rightarrow V$ son inverse. Puisque f est continue et que Z est localement connexe par arcs, il existe un voisinage ouvert connexe par arcs W de z tel que $f(W) \subset U$. Maintenant, nous affirmons que :

$$\hat{f}(W) \subset V.$$

Pour s'en convaincre, supposons que les courbes u , v et \hat{v} sont définies comme ci-dessus. Soit $z' \in W$ un point arbitraire et soit u' une courbe de z à z' qui demeure entièrement dans W .



Alors la courbe $v' := f \circ u'$ demeure entièrement dans U et $\widehat{v}' := \varphi \circ v'$ est un relèvement de v' partant du point initial y . Donc la concaténation $\widehat{v} \cdot \widehat{v}'$ est un relèvement de la courbe concaténée :

$$v \cdot v' = f \circ (u \cdot u')$$

partant du point initial y_0 . Par conséquent, on a² :

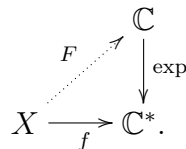
$$\widehat{f}(z') = (\widehat{v} \cdot \widehat{v}')(1) = \widehat{v}'(1) = \varphi \circ v'(1) \in V,$$

ce qui achève la démonstration. □

Corollaire. *Le théorème reste valable quand on suppose seulement que l'application p est un homéomorphisme local qui possède la propriété de relèvement des courbes.*

PREUVE. En effet, on s'en convainc aisément par un examen de la démonstration donnée à l'instant. □

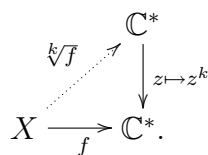
Logarithme et racines k -èmes d'une fonction holomorphe sans zéros. Soit X une surface de Riemann simplement connexe et soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe ne s'annulant nulle part sur X . Nous voudrions définir le logarithme de f , à savoir trouver une fonction holomorphe $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exp(F) = f$. Mais ceci signifie justement que F est un relèvement de f relativement au revêtement exponentiel :



Si $x_0 \in X$ et si $c \in \mathbb{C}$ est une solution quelconque de l'équation $e^c = f(x_0)$, alors grâce aux théorèmes qui précèdent, il existe un unique relèvement $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ de f satisfaisant $F(x_0) = c$, et ce relèvement est nécessairement holomorphe. De plus, tout autre relèvement diffère d'un tel relèvement par une simple constante additive $2i\pi n$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

Voici un cas spécial significatif. Supposons que X soit un domaine simplement connexe de \mathbb{C}^* et soit $\iota: X \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'injection canonique, i.e. $\iota(z) = z$. Alors tout relèvement de ι relativement à \exp n'est autre qu'une *branche* de la fonction \log sur X .

De manière analogue, on peut construire différentes racines k -èmes d'une fonction holomorphe $f: X \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie sur une surface de Riemann simplement connexe X (e.g. un domaine simplement connexe dans \mathbb{C}), au moyen du revêtement canonique :



² Par définition, la valeur finale $(w_1 \cdot \dots \cdot w_n)(1)$ de la concaténée $w_1 \cdot \dots \cdot w_n$ de n courbes est la valeur finale de la dernière courbe parcourue, à savoir $w_n(1)$.

de multiplicité k .

Théorème. *Soit X une variété topologique, soit Y un espace topologique séparé et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local qui possède la propriété de relèvement des courbes. Alors p est un revêtement.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $x_0 \in X$ est un point arbitraire et soient $y_j, j \in J$, les préimages de x_0 par p . Soit U un voisinage ouvert de x_0 qui est homéomorphe à une boule et soit $f: U \rightarrow X$ l'injection canonique. D'après un corollaire qui précède, pour tout $j \in J$, il existe un relèvement $\widehat{f}_j: U \rightarrow Y$ de f tel que $\widehat{f}_j(x_0) = y_j$. Posons alors $V_j := \widehat{f}_j(U)$. En appliquant alors les résultats qui précèdent, on peut se convaincre (exercice recommandé) que l'on a :

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

que les V_j sont des ouverts disjoints deux à deux, et que chaque application $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme. \square

Applications continues propres. Rappelons qu'un espace topologique localement compact est un espace topologique *séparé* dans lequel tout point possède un voisinage qui est compact.

Définition. *Une application continue $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques localement compacts est dite propre si la préimage $f^{-1}(L)$ de tout compact $L \subseteq Y$ est un aussi sous-ensemble compact de X .*

Par exemple, c'est toujours le cas lorsque X est compact.

Exercice instructif : lorsque $X \subset \mathbb{R}^m$ et $Y \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ouverts d'un espace euclidien réel, l'application f est propre si et seulement si $f(x_k) \rightarrow \partial Y$ tend vers le bord de Y pour toute suite de points $x_k \rightarrow \partial X$ qui tendent vers le bord de X .

Assertion. *Toute application propre entre espaces topologiques localement compacts est fermée.*

PREUVE. Ceci découle du fait que dans un espace localement compact, un sous-ensemble est fermé si et seulement si son intersection avec tout compact est compacte. \square

Lemme. *Soient X et Y deux espaces localement compacts et soit $p: Y \rightarrow X$ une application continue propre et à fibres discrètes. Alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) *La préimage $p^{-1}(x)$ de tout point $x \in X$ est finie.*
- (ii) *Pour tout $x \in X$, si V est un voisinage ouvert de $p^{-1}(x)$, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U) \subset V$.*

DÉMONSTRATION. La première propriété (i) découle simplement du fait que $p^{-1}(x)$ est un sous-ensemble compact discret de Y .

Pour ce qui est de (ii), $Y \setminus V$ est alors fermé, donc l'ensemble $p(Y \setminus V) =: A$ est lui aussi fermé. Puisque $x \notin A$ par hypothèse, l'ensemble $U := X \setminus A$ est alors un voisinage ouvert de x satisfaisant $p^{-1}(U) \subset V$. \square

Théorème. *Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts et soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local (donc discret) qui est propre. Alors p est un revêtement.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ un point arbitraire et soit $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ sa fibre, consistant en un nombre fini $n \geq 0$ de points distincts deux à deux. Puisque p est un homéomorphisme local, pour tout $j = 1, \dots, n$, il existe un voisinage ouvert W_j de y_j et un voisinage ouvert U_j de x , tels que $p|_{W_j} : W_j \rightarrow U_j$ est un homéomorphisme. On peut supposer que les W_j sont disjoints deux à deux (hypothèse implicite à la compacité locale : X et Y sont séparés). Clairement, $W_1 \cup \dots \cup W_n$ est un voisinage ouvert de $p^{-1}(x)$. Donc grâce au lemme qui précède, il existe un voisinage ouvert de x :

$$U \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$$

satisfaisant :

$$p^{-1}(U) \subset W_1 \cup \dots \cup W_n.$$

Si on pose alors $V_j := W_j \cap p^{-1}(U)$, les V_j sont des ouverts disjoints, on a exactement :

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_n,$$

et chaque application $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$, $j = 1, \dots, n$ est un homéomorphisme. \square

Applications holomorphes propres. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f : Y \rightarrow X$ une application holomorphe propre non constante. Grâce au théorème qui dit que le comportement local de f est du type $z \mapsto z^k$, l'ensemble $B \subset Y$ des points de branchement de f est fermé et discret. Puisque f est propre, son image $A := f(B)$ est aussi fermée et discrète. L'ensemble A est usuellement appelé l'ensemble des *valeurs critiques* de f .

Soit $X' := X \setminus A$ et soit :

$$Y' := Y \setminus f^{-1}(A) \subset Y \setminus B.$$

Alors la restriction :

$$f|_{Y'} : Y' \rightarrow X'$$

est une application holomorphe propre (exercice mental) qui, grâce au théorème et au lemme qui précèdent, est un revêtement à un nombre défini — disons n — de feuillettes³. Autrement dit, toute valeur $x' \in X'$ est prise exactement n fois par $f|_{Y'}$. Notre objectif maintenant est d'étendre cette propriété aux valeurs critiques $a \in A$, et pour ce faire, nous devons considérer les multiplicités.

Rappelons qu'en tout point $y \in Y$, l'application f se ramène dans un bon système de cartes locales à une simple puissance $z \mapsto z^{k_y}$, pour un certain entier k_y qui est la multiplicité *locale* avec laquelle f prend la valeur $f(y) \in X$ au point y . Notons alors :

$$\text{mult}_y(f)$$

cette multiplicité locale.

Définition. On dira que $f : Y \rightarrow X$ prend n_x fois une valeur $x \in X$ sur en comptant les multiplicités si l'on a :

$$n_x = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \text{mult}_y(f).$$

³ Les surfaces de Riemann étant supposées connexes, le Théorème p. 31 s'applique pour garantir l'équicardinalité des fibres.

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f: Y \rightarrow X$ une application holomorphe propre non constante. Alors il existe un nombre naturel n tel que f prend exactement n fois toute valeur $x \in X$ en comptant les multiplicités, à savoir :

$$n = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \text{mult}_y(f) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

En particulier, c'est le cas lorsque pour toute application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann qui sont compactes.

DÉMONSTRATION. En utilisant la même notation que précédemment, soit n le nombre de feuillettes du revêtement non ramifié $f|_{Y'}: Y' \rightarrow X'$. Soit $x \in X$ une valeur critique, posons :

$$f^{-1}(x) := \{y_1, \dots, y_r\},$$

et abrégeons $k_j := \text{mult}_{y_j}(f)$ pour $j = 1, \dots, r$. On sait que le comportement local de f au voisinage de chaque y_j est celui de $z \mapsto z^{k_j}$ au voisinage de 0 dans \mathbb{C} . Donc il existe des voisinages ouverts $V_j \subset Y$ de y_j disjoints deux à deux et $U_j \subset X$ de x tels que pour tout $x' \in U_j \setminus \{x\}$, l'ensemble $f^{-1}(x') \cap U_j$ consiste en exactement k_j points distincts deux à deux, et ce, pour tout $j = 1, \dots, r$. D'après le lemme qui précède, on peut trouver un voisinage plus petit $U \subset U_1 \cap \dots \cap U_r$ de x tel que $f^{-1}(U) \subset V_1 \cup \dots \cup V_r$. Alors pour tout point $x' \in U \cap X'$, on a que $f^{-1}(x')$ consiste en exactement $k_1 + \dots + k_r$ points distincts deux à deux. Mais par ailleurs, pour tout $x' \in X'$, le cardinal de $f^{-1}(x')$ est égal à n . Donc $n = k_1 + \dots + k_r$. \square

Définition. Une application holomorphe propre non constante entre deux surfaces de Riemann sera appelée un *revêtement ramifié holomorphe*, dont le nombre de feuillettes est donné par la formule précédente. Lorsqu'il n'y a pas de points de branchement, on l'appellation sera dite *non ramifiée*.

Corollaire. Sur toute surface de Riemann compacte X , toute application méromorphe non constante $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ possède autant de zéros que de pôles, s'ils sont comptés avec multiplicité.

PREUVE. L'application $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est automatiquement propre. \square

Corollaire. Tout polynôme complexe de degré n :

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

à coefficients complexes possède exactement n zéros en comptant les multiplicités.

PREUVE. On peut considérer f comme une application méromorphe $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui prend la valeur ∞ exactement n fois (exercice de vérification). \square

Exercices

Exercice 4.1. Déterminer les points de ramification de l'application :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad f(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Exercice 4.2. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés connexes par arcs et soit $f: Y \rightarrow X$ un revêtement. Montrer que l'application induite :

$$f_*: \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$$

est injective.

Exercice 4.3. Soit $d \geq 1$ un entier et soit $\mathbb{C}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes qui sont de degré $\leq d$. Soit aussi $\mathcal{X}_d \subset \mathbb{C}_d[X]$ le sous-ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}_d[X]$ de degré exactement égal à d dont les d racines complexes sont distinctes deux à deux. On munit \mathcal{X}_d de la topologie induite.

Montrer que le sous-espace de $\mathcal{X}_d \times \mathbb{C}$ défini par :

$$\mathcal{Y}_d := \{(P, z) \in \mathcal{X}_d \times \mathbb{C} : P(z) = 0\}$$

et muni de la projection $p: (P, z) \mapsto P$ produit un revêtement de degré d de \mathcal{Y}_d sur \mathcal{X}_d .

Exercice 4.4. Soit $X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ et soit $Y := \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'application :

$$\sin: Y \rightarrow X$$

est un revêtement topologique.

On considère maintenant les courbes suivante dans X :

$$\begin{aligned} u: [0, 1] &\rightarrow X, & u(t) &:= 1 - e^{2i\pi t}, \\ v: [0, 1] &\rightarrow X, & v(t) &:= -1 + e^{2i\pi t}. \end{aligned}$$

Soit $w_1: [0, 1] \rightarrow Y$ le relèvement de la concaténation $u \cdot v$ qui satisfait $w_1(0) = 0$ et soit $w_2: [0, 1] \rightarrow Y$ le relèvement de $v \cdot u$ qui satisfait $w_2(0) = 0$. Montrer que l'on a :

$$w_1(1) = 2\pi \quad \text{et} \quad w_2(1) = -2\pi.$$

En conclure que $\pi_1(X)$ n'est pas commutatif.

Exercice 4.5. Soit $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif, avec Y compact. Montrer que p est un revêtement.

Exercice 4.6. Soient X et Y des espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. Soit Z un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs et soit $f: Z \rightarrow X$ une application continue. Soit $c \in Z$, soit $a := f(c)$ et soit $b \in Y$ tel que $p(b) = a$. Montrer qu'il existe un relèvement $f: Z \rightarrow Y$ de f avec $f(c) = b$ si et seulement si :

$$f_*(\pi_1(Z, c)) \subset p_*(\pi_1(Y, b)).$$

Exercice 4.6. (a) Montrer que l'application :

$$\tan: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$$

est un homéomorphisme local.

(b) Montrer que $\tan(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm 1\}$ et que :

$$\tan: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm 1\}$$

est un revêtement.

(c) Soit $X = \mathbb{C} \setminus \{it : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une unique fonction holomorphe $\arctan_k: X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant :

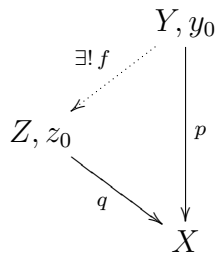
$$\tan \circ \arctan_k = \text{id}_X \quad \text{et} \quad \arctan_k(0) = k$$

(la k -ème branche de l'arctangente complexe).

5. Revêtement universel et automorphismes de revêtements

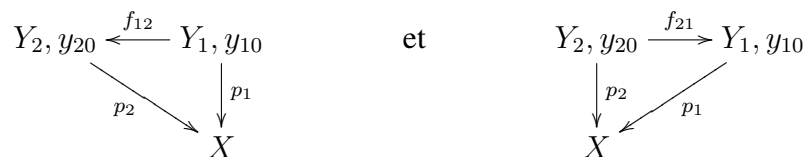
Parmi tous les revêtements d'une variété X , il est un qui est « le plus grand », à savoir le *revêtement universel* \tilde{X} de X . Tous les autres revêtements de X peuvent en effet être obtenus comme certains quotients de ce revêtement universel. De plus, les automorphismes du revêtement universel $\tilde{X} \rightarrow X$ sont intrinsèquement reliés au groupe fondamental $\pi_1(X)$. Enfin, on a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de $\pi_1(X)$ et tous les revêtements intermédiaires de X .

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques connexes. Un revêtement $p: Y \rightarrow X$ est appelé *revêtement universel* de X si la propriété *universelle* suivante est satisfaite : pour tout autre revêtement quelconque $q: Z \rightarrow X$, avec Z connexe, et pour tout choix de points $y_0 \in Y$ et $z_0 \in Z$ avec $p(y_0) = q(z_0) \in X$, il existe une et une seule application $f: Y \rightarrow Z$ préservant les fibres, i.e. satisfaisant $q \circ f = p$, telle que $f(y_0) = z_0$.



Assertion. Un espace topologique connexe possède, à isomorphisme près, au plus un revêtement universel.

PREUVE. Supposons donc que $p_i: Y_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, soient deux revêtements quelconques qui satisfont tous deux la propriété universelle ci-dessus et soient deux points $y_{10} \in Y_1$ et $y_{20} \in Y_2$. Alors en appliquant deux fois la définition, il existe deux applications préservant les fibres $f_{12}: Y_1 \rightarrow Y_2$ et $f_{21}: Y_2 \rightarrow Y_1$ avec $f_{12}(y_{10}) = y_{20}$ et $f_{21}(y_{20}) = y_{10}$ qui rendent commutatifs les deux diagrammes suivants :



Mais alors les deux compositions :

$$f_{12} \circ f_{21}: Y_2 \rightarrow Y_2 \quad \text{et} \quad f_{21} \circ f_{12}: Y_1 \rightarrow Y_1$$

sont continues, préservent les fibres, et elles fixent y_{20} et y_{10} (respectivement). À cause de l'unicité requise dans la propriété universelle, puisque les deux applications identités satisfont en fait trivialement ces conditions, on doit nécessairement avoir :

$$f_{12} \circ f_{21} = \text{id}_{Y_2} \quad \text{et} \quad f_{21} \circ f_{12} = \text{id}_{Y_1},$$

ce qui montre que les deux revêtements universels étaient en fait isomorphes. \square

Théorème. *Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement entre deux variétés topologiques¹. Si Y est simplement connexe, alors p est le revêtement universel de X .*

PREUVE. Soit $q: Z \rightarrow X$ un autre revêtement quelconque de X , et soient deux points $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$. Le théorème d'existence de relèvements à source simplement connexe (chapitre précédent) assure alors qu'il existe une unique application $\hat{q}: Z \rightarrow Y$ avec $\hat{q}(z_0) = y_0$ telle que $q = p \circ \hat{q}$, donc la propriété universelle qui définit les revêtements universels est satisfaite. \square

Passons maintenant à l'existence des revêtements universels. On trouve dans la littérature un théorème «sophistiqué» qui fournit une *condition nécessaire et suffisante* garantissant l'existence d'un revêtement universel. Pour la culture mathématique, citons en l'énoncé, mais sans démonstration.

Théorème. *Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Pour qu'il existe un revêtement $p: Y \rightarrow X$ tel que Y soit simplement connexe, il faut et il suffit que X possède la propriété suivante :*

(\mathcal{P}) *pour tout élément $x \in X$, il existe un voisinage ouvert connexe U_x de x dans X tel que l'image de l'homomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(U_x, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

induit par l'inclusion $U_x \hookrightarrow X$ soit réduite à l'élément neutre de $\pi_1(X, x)$. \square

Autrement dit, toute courbe continue fermée d'origine x qui reste dans U_x est en fait homotope à zéro dans l'espace ambiant complet X . Cette condition est en particulier trivialement satisfaite lorsque X est *semi-localement simplement connexe*, au sens où tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert $U_x \subset X$ qui est simplement connexe. Pour notre objectif (théorie des surfaces de Riemann), il suffit d'établir l'existence d'un revêtement universel lorsque X est une *variété* (topologique, différentiable, analytique), auquel cas la condition du théorème précédent est immédiatement satisfaite puisque tout U_x homéomorphe à une boule dans un espace euclidien est simplement connexe. Nous allons donc démontrer en détail le théorème fondamental suivant.

Théorème. *Soit X une variété topologique connexe (séparée). Alors il existe une variété connexe et simplement connexe \tilde{X} , séparée elle aussi, et il existe un revêtement $p: \tilde{X} \rightarrow X$ qui fournit le revêtement universel de X .*

DÉMONSTRATION. Fixons un point $x_0 \in X$. Pour $x \in X$ arbitraire, notons $\pi(x_0, x)$ l'ensemble des classes d'homotopie de courbes continues qui partent de x_0 et aboutissent à x . Définissons alors de manière abstraite l'objet qui conviendra :

$$\tilde{X} := \{(x, \alpha) : x \in X, \alpha \in \pi(x_0, x)\},$$

¹ Implicitement, toutes nos variétés (topologiques, différentiables, analytiques réelles, complexes) sont supposées séparées.

et munissons-le de la projection $p: \tilde{X} \rightarrow X$ définie naturellement par :

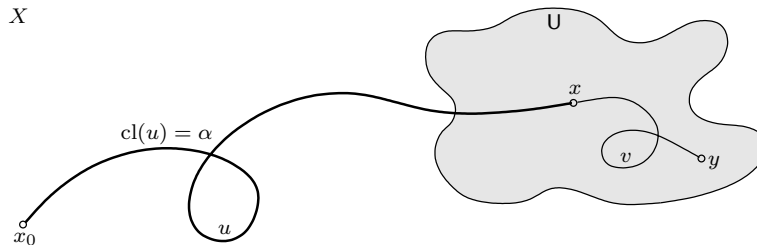
$$p(x, \alpha) := x.$$

Du point de vue conceptuel et intuitif, au-dessus d'un point x , il y a donc dans \tilde{X} autant de points qu'il y a de classes d'homotopies distinctes de chemins continus de x_0 à x , et cela correspond bien à l'idée — remontant à Riemann (1851) — que l'on doit construire autant de feuillets dans \tilde{X} au-dessus de X qu'il y a de manières de se déplacer dans X à homotopie près — par exemple une infinité indexée par \mathbb{Z} (nombre de tours orientés) lorsque $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nous allons maintenant définir une topologie sur \tilde{X} qui en fera une variété topologique connexe, séparée, et simplement connexe, et nous vérifierons ensuite que l'application $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est alors automatiquement un revêtement.

• **Définition d'une topologie sur \tilde{X} .** Soit un point $(x, \alpha) \in \tilde{X}$ et soit $U \subset X$ un ouvert connexe et simplement connexe qui contient x . On définit un sous-ensemble associé $[U, \alpha] \subset \tilde{X}$ comme suit : $[U, \alpha]$ consiste en tous les points $(y, \beta) \in \tilde{X}$ tels que $y \in U$ et $\beta = \text{cl}(u \cdot v)$ (classe d'homotopie), où :

- u est une courbe de x_0 à x telle que $\alpha = \text{cl}(u)$;
- v est une courbe quelconque de x à y qui reste entièrement dans U .



Comme U est simplement connexe, la classe $\beta = \text{cl}(u \cdot v)$ ne dépend pas de la courbe v .

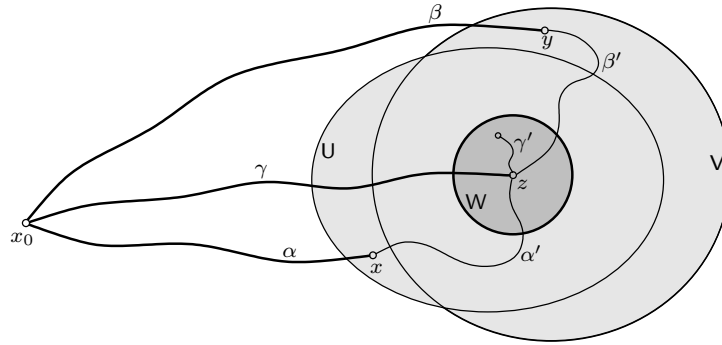
Assertion. Le système $\{[U, \alpha]\}$ de tous ces sous-ensembles de \tilde{X} ainsi définis forme une base pour constituer une topologie sur \tilde{X} .

PREUVE. Deux propriétés requises doivent être vérifiées.

(i) Tout d'abord, il est clair que tout point de \tilde{X} appartient à au moins un de ces $[U, \alpha]$.

(ii) Ensuite, soit $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [V, \beta]$. Alors $z \in U \cap V$ et il existe un voisinage ouvert, connexe et simplement connexe $W \subset U \cap V$ de z dans X (puisque c'est une variété). Alors nous affirmons que l'inclusion suivante est satisfaite, ce qui fournira la seconde propriété requise :

$$(z, \gamma) \in [W, \gamma] \subset [U, \alpha] \cap [V, \beta].$$



En effet, $(z, \gamma) \in [U, \alpha]$ signifie qu'il existe une classe de courbe α' de x vers z dans U telle que $\alpha \alpha' = \gamma$. De même, $(z, \gamma) \in [V, \beta]$ signifie qu'il existe une classe de courbe β' de y vers z dans V telle que $\beta \beta' = \gamma$. Soit maintenant $(z', \gamma \gamma') \in [W, \gamma]$ un point quelconque, où γ' est une classe de courbe de z à z' dans W . Alors on a :

$$\gamma \gamma' = \alpha \alpha' \gamma' = \beta \beta' \gamma',$$

ce qui montre bien que $(z', \gamma \gamma')$ appartient à l'intersection $[U, \alpha] \cap [V, \beta]$. En conclusion, ces $[U, \alpha]$ forment une base d'ouverts pour une topologie sur \tilde{X} . \square

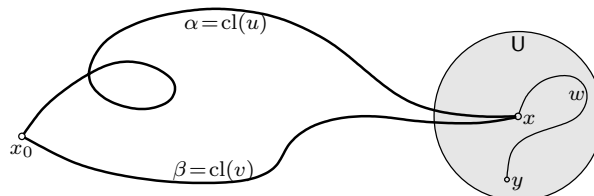
Assertion. La projection naturelle $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est un homéomorphisme local continu, donc \tilde{X} est une variété topologique.

PREUVE. En effet, ceci découle du fait que pour chaque ouvert $[U, \alpha]$, la projection restreinte $p|_{[U, \alpha]}: [U, \alpha] \rightarrow U$ est bijective (exercice mental), donc automatiquement un homéomorphisme par définition de la topologie de \tilde{X} . \square

Assertion. La variété topologique \tilde{X} est séparée.

PREUVE. Il s'agit de montrer que deux points distincts quelconques (x, α) et (y, β) de \tilde{X} admettent deux voisinages ouverts disjoints. Si $x \neq y$, c'est clair par séparation de la topologie de X . Soient donc (x, α) et (x, β) avec $\alpha \neq \beta$ dans $\pi(x_0, x)$. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert de x connexe et simplement connexe. Alors nous affirmons que $[U, \alpha] \cap [U, \beta] = \emptyset$, ce qui conclura.

Supposons par l'absurde qu'il existe un élément (y, γ) dans cette intersection $[U, \alpha] \cap [U, \beta]$. Soit u une courbe de x_0 à x telle que $\text{cl}(u) = \alpha$, soit v une courbe de x_0 à y telle que $\text{cl}(v) = \beta$.



On a $y \in U$ et pour toute² courbe w de x à y entièrement dans U , on doit avoir :

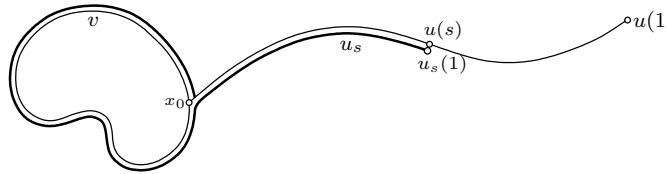
$$\gamma = \text{cl}(u \cdot w) = \text{cl}(v \cdot w),$$

² Rappelons que la simple connexité de U assure que la classe d'homotopie de γ ne dépend pas du choix de w .

d'où — en multipliant à droite par $\text{cl}(w^-)$ — on tire $\text{cl}(u) = \text{cl}(v)$, c'est-à-dire $\alpha = \beta$: contradiction ! \square

Assertion. Cette variété topologique séparée \tilde{X} est connexe et la projection naturelle $p: \tilde{X} \rightarrow X$ possède la propriété de relèvement des courbes, donc³ est un revêtement.

PREUVE. Soit $u: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue issue de x_0 . Pour tout $s \in [0, 1]$, on note $u_s: [0, 1] \rightarrow X$ la courbe définie par $u_s(t) := u(st)$, une courbe restreinte qui parcourt seulement les points de u qui correspondent à l'intervalle $[0, s]$, puisque $u_s(1) = u(s)$.



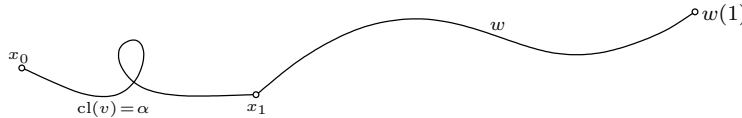
De plus, soit v une courbe continue fermée quelconque partant de x_0 et y revenant. Alors l'application :

$$\hat{u}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}, \quad t \mapsto (u(t), \text{cl}(v \cdot u_t))$$

fournit un relèvement de u partant du point initial quelconque $\hat{u}(0) = (x_0, \text{cl}(v))$ au-dessus de x_0 . La continuité de \hat{u} découle (exercice mental) de la définition de la topologie sur \tilde{X} .

Maintenant, il faut encore relever des courbes en partant aussi d'un autre point quelconque $x_1 \in X$, et pas seulement du point x_0 que nous avons fixé au tout début.

Soit donc $w: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe partant d'un point initial arbitraire $x_1 = w(0)$, soit $\alpha \in \pi(x_0, x_1)$, et soit v une courbe quelconque de x_0 à x_1 avec $\text{cl}(v) = \alpha$.



On considère alors la concaténation $v \cdot w$ qui part de x_0 , et on lui applique ce qui précède en choisissant une courbe constante en x_0 : il existe donc un relèvement $\widehat{v \cdot w}$ tel que $\widehat{v \cdot w}(0) = (x_0, \varepsilon)$, où ε est la classe d'homotopie de la courbe constante en x_0 , à savoir le relèvement :

$$t \mapsto (v \cdot w(t), \text{cl}((v \cdot w)_t)).$$

Mais alors puisque l'on a :

$$v \cdot w\left(\frac{1}{2}\right) = v(1) = x_1 \quad \text{et} \quad \text{cl}\left((v \cdot w)_{\frac{1}{2}}\right) = \text{cl}(v) = \alpha,$$

en restreignant simplement ce relèvement au sous-intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$, on obtient un relèvement \hat{w} de w de point initial quelconque $\hat{w}(0) = (x_1, \alpha)$. \square

Assertion. La variété topologique \tilde{X} est simplement connexe.

PREUVE. Soit $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ une courbe continue fermée partant du, et revenant au, point (x_0, ε) , où ε est à nouveau la classe d'homotopie de la courbe constante en x_0 . On veut montrer que \tilde{w} est homotope à zéro. Sa projection $u := p \circ \tilde{w}$ est une courbe continue fermée dans X en x_0 . Soit alors $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ le relèvement de u partant de (x_0, ε) , lequel

³ Chapitre précédent !

existe grâce à ce qui a déjà été démontré. Mais à cause de l'unicité des relèvements, on doit nécessairement avoir $\widehat{u} = \widetilde{w}$. Par conséquent :

$$(x_0, \text{cl}(u)) = \widehat{u}(1) = \widetilde{w}(1) = (x_0, \varepsilon),$$

ce qui démontre que $\text{cl}(u) = \varepsilon$, c'est-à-dire que u est homotope à zéro. Grâce au théorème de relèvement des homotopies, le relevé $\widehat{u} = \widetilde{w}$ est lui aussi homotope à zéro, donc \widetilde{X} est simplement connexe, comme annoncé. \square

Implicitement, un examen des arguments qui précèdent montre que \widetilde{X} est connexe, parce que chacun de ses points peut être joint à (x_0, ε) .

Toutes ces assertions complètent ainsi la preuve du théorème fondamental d'existence du revêtement universel. \square

Corollaire utile et important. *Le revêtement universel d'une surface de Riemann X existe, et il est naturellement muni lui aussi d'une structure de surface de Riemann.*

DÉMONSTRATION. En effet, on a déjà vu que tout homéomorphisme local (donc tout revêtement) d'un espace topologique vers une surface de Riemann permet de « tirer en arrière » la structure holomorphe qui existe à l'arrivée. \square

Théorème. *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre variétés topologiques connexes (séparées) et soient $p: \widetilde{X} \rightarrow X$, $q: \widetilde{Y} \rightarrow Y$ les deux revêtements universels de X , Y . Alors il existe un relèvement continu $\widetilde{f}: \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{Y}$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème de relèvement des applications à source simplement connexe. \square

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. On appelle *automorphisme de revêtement* tout homéomorphisme $f: Y \rightarrow Y$ qui préserve les fibres, à savoir $p \circ f = p$. Avec l'opération de composition des applications, la collection de tous les automorphismes de revêtement $p: Y \rightarrow X$ forme un groupe, noté :

$$\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X).$$

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. On dit que p est un *revêtement galoisien* si pour toute paire de points $y_1, y_2 \in Y$ dans la même fibre, i.e. tels que $p(y_1) = p(y_2) \in X$, il existe un automorphisme de revêtement $f: Y \rightarrow Y$ satisfaisant $f(y_1) = y_2$. Dans ce cas, le théorème d'unicité des relèvements d'applications à source connexe implique qu'un tel automorphisme est nécessairement unique.

Exemple canonique. On sait que l'application $z \mapsto z^k$ est un revêtement (canonique) de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^* . De plus, ce revêtement est galoisien, puisque pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ dans une même fibre, i.e. avec $z_1^k = z_2^k$, on a alors $z_2 = e^{\frac{2i\pi l}{k}} z_1$ pour un certain entier l tel que

$1 \leq l \leq k$, et il est clair par ailleurs que l'application $z \mapsto e^{\frac{2i\pi l}{k}} z$ est un automorphisme de ce revêtement qui envoie z_1 sur z_2 .

Remarque. Il y a un lien entre la notion de revêtement galoisien et celle d'extension galoisienne de corps, mais ce lien sera dévoilé ultérieurement.

Théorème. Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel d'une variété connexe X . Alors p est galoisien et son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ est naturellement isomorphe à son groupe fondamental $\pi_1(X)$:

$$\boxed{\text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X) \cong \pi_1(X)}.$$

DÉMONSTRATION. Soient deux points $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ dans la même fibre, *i.e.* avec $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Grâce à la propriété universelle qui définit le revêtement universel, on dispose immédiatement d'une application continue $f_{12}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ préservant les fibres telle que $f_{12}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Nous devons démontrer que f_{12} est alors nécessairement un homéomorphisme.

En effet, pour la même raison et de manière symétrique, il existe aussi une autre application continue $f_{21}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ préservant les fibres telle que $f_{21}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Mais alors les deux composées $f_{21} \circ f_{12}$ et $f_{12} \circ f_{21}$ de \tilde{X} dans lui-même préservent les fibres et fixent (respectivement) \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 . Alors grâce à l'unicité requise dans la définition par propriété universelle⁴, on doit nécessairement avoir :

$$f_{21} \circ f_{12} = \text{id}_{\tilde{X}} = f_{12} \circ f_{21}.$$

Ainsi, f_{12} et f_{21} sont deux homéomorphismes inverses l'un de l'autre et notre revêtement universel possède bien un groupe d'automorphismes qui est transitif sur ses fibres, *i.e.* il est galoisien.

Maintenant, quel est le lien avec $\pi_1(X, x_0)$? Soient deux points $x_0 \in X$ et $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ avec $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Définissons une application :

$$\Phi: \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

comme suit : si $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ et si \tilde{v}_σ est une courbe continue quelconque dans \tilde{X} partant de \tilde{x}_0 et aboutissant au point :

$$\sigma(\tilde{x}_0) \in p^{-1}(p(\tilde{x}_0)) = p^{-1}(x_0)$$

— la classe d'homotopie de \tilde{v}_σ est en fait uniquement déterminée, car \tilde{X} est simplement connexe —, alors la projection $p \circ \tilde{v}_\sigma$ est une courbe continue qui devient *fermée* dans X :

$$x_0 = p \circ \tilde{v}_\sigma(0) = p \circ \tilde{v}_\sigma(1) = p(\sigma(\tilde{x}_0)) = x_0.$$

On assigne alors à Φ la classe d'homotopie de cette courbe projetée fermée :

$$\boxed{\Phi(\sigma) := \text{cl}(p \circ \tilde{v}_\sigma)}.$$

Montrons à présent que Φ est un homomorphisme de groupes. En effet, si $\tau \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ est un autre automorphisme de notre revêtement universel, et si de manière similaire

⁴ On notera que le même argument a déjà été vu juste après la définition en question pour en déduire que le revêtement universel est unique à isomorphisme près !

\tilde{w}_τ est une courbe continue dans \tilde{X} partant de $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ et aboutissant au point $\tau(\tilde{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$ dans la même fibre, alors :

$$\sigma \circ \tilde{w}_\tau$$

est une courbe continue dans \tilde{X} qui part de $\sigma(\tilde{x}_0)$ et qui aboutit à $\sigma(\tau(\tilde{x}_0)) = \sigma\tau(\tilde{x}_0)$. On voit par conséquent que la courbe concaténée :

$$\tilde{v}_\sigma \cdot (\sigma \circ \tilde{w}_\tau)$$

possède \tilde{x}_0 comme point initial, $\sigma(\tilde{x}_0)$ comme point intermédiaire au temps $\frac{1}{2}$, et $\sigma\tau(\tilde{x}_0)$ comme point final, donc elle convient pour définir :

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma\tau) &= \text{cl}(p \circ [\tilde{v}_\sigma \cdot (\sigma \circ \tilde{w}_\tau)]) \\ &= \text{cl}(p \circ \tilde{v}_\sigma) \text{cl}(p \circ (\sigma \circ \tilde{w}_\tau)) && \text{[opération de groupe dans } \pi_1(X, x_0)\text{]} \\ &= \text{cl}(p \circ \tilde{v}_\sigma) \text{cl}(p \circ \tilde{w}_\tau) && \text{[}\sigma \text{ préserve les fibres : } p \circ \sigma = p\text{]} \\ &= \Phi(\sigma) \Phi(\tau). \end{aligned}$$

Montrons ensuite que Φ est injective. Soit $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ et soit \tilde{v}_σ une courbe continue dans \tilde{X} qui va de \tilde{x}_0 à $\sigma(\tilde{x}_0)$. Supposons que $\Phi(\sigma)$ est l'élément neutre ε de $\pi_1(X, x_0)$, i.e. que $p \circ \tilde{v}_\sigma$ est homotope à zéro. Puisque \tilde{v}_σ est un relèvement de sa projection $p \circ \tilde{v}_\sigma$, le théorème de relèvement des homotopies stipule en particulier que le point final $\sigma(\tilde{x}_0)$ de ce relèvement doit nécessairement coïncider avec son point initial \tilde{x}_0 , à savoir $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, et l'on sait grâce à la définition par universalité et à l'unicité des relèvements, que cela implique $\sigma = \text{id}_{\tilde{X}}$.

Montrons enfin que Φ est surjective. Soit $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ quelconque et soit u une courbe continue fermée en x_0 telle que $\text{cl}(u) = \alpha$. Soit aussi \tilde{u} un relèvement de u à \tilde{X} partant d'un point quelconque $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ et notons $\tilde{x}_1 := \tilde{u}(1)$ le point final de ce relèvement. Grâce à la propriété universelle et à la simple connexité de \tilde{X} , il existe un unique automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ tel que $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Mais alors par définition de Φ , il est clair que :

$$\Phi(\sigma) = \text{cl}(p \circ \tilde{u}) = \text{cl}(u) = \alpha,$$

ce qui montre la surjectivité annoncée et achève donc d'établir le théorème. \square

Exemples de surfaces de Riemann.

(a) L'application exponentielle $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ produit le revêtement universel de \mathbb{C}^* , puisque c'est un revêtement et puisque \mathbb{C} est simplement connexe. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $z \mapsto z + 2i\pi n$ les translations $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $2i\pi n$. Puisqu'on a évidemment $\exp(z + 2i\pi n) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, chacune de ces translation est un automorphisme du revêtement $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Nous affirmons qu'il n'en existe pas d'autres.

En effet, si σ est un automorphisme quelconque de ce revêtement, alors $\exp(\sigma(0)) = \exp(0) = 1$, et donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma(0) = 2i\pi n$. Puisque $\tau_n(0) = 2i\pi n$ aussi, par unicité des automorphismes à point-base fixé, on déduit $\sigma = \tau_n$, Q.E.D.

Ainsi on a :

$$\text{Aut}(\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*) = \{(z \mapsto z + 2i\pi n) : n \in \mathbb{Z}\},$$

et puisque ce dernier groupe est isomorphe à \mathbb{Z} , on en déduit que :

$$\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}.$$

(b) Soit :

$$\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$$

le demi-plan complexe gauche⁵, et soit le disque unité épointé :

$$\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}.$$

Alors $\exp: \mathbb{H}^- \rightarrow \mathbb{D}^*$ est le revêtement universel de \mathbb{D}^* , puisque c'est un revêtement (exercice mental) et que sa source \mathbb{H}^- est simplement connexe. En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on montre que l'on a :

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}^- \xrightarrow{\exp} \mathbb{D}^*) = \{(z \mapsto z + 2i\pi n) : n \in \mathbb{Z}\},$$

et puisque ce dernier groupe est isomorphe à \mathbb{Z} , on en déduit aussi :

$$\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}.$$

(c) Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau dans \mathbb{C} . Alors la projection canonique $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ constitue le revêtement universel du tore \mathbb{C}/Γ . En raisonnant exactement comme dans les deux exemples qui précèdent, on établit que :

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}/\Gamma) = \{(z \mapsto z + k_1\omega_1 + k_2\omega_2) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\},$$

d'où il découle, grâce au théorème, que :

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \Gamma \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Conséquence. *Il n'existe pas de fonction méromorphe sur \mathbb{C} doublement périodique par rapport à Γ qui n'aurait qu'un seul pôle (modulo Γ).*

PREUVE. Une telle fonction définirait une application holomorphe $f: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ entre surfaces de Riemann compactes qui prendrait une seule fois la valeur ∞ . Alors le revêtement ramifié que définirait une telle f ne serait constitué que d'un seul feuillet, et donc f établirait un biholomorphisme entre \mathbb{C}/Γ et \mathbb{P}^1 . Il en découlerait que :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \pi_1(\mathbb{P}^1) = \{0\},$$

ce qui est une contradiction manifeste. □

Compléments sur les revêtements. Soit X une variété topologique connexe quelconque. Les deux résultats qui suivent montrent qu'il y a une correspondance biunivoque entre les classes de conjugaisons de sous-groupes de $\pi_1(X)$ et les revêtements de X : ils disent donc incidemment que la complexité des revêtements est aussi élevée (importante) que celle des groupes et des sous-groupes.

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques, soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement et soit G un sous-groupe quelconque de $\operatorname{Aut}(Y \xrightarrow{p} X)$. Deux points $y_1, y_2 \in Y$ dans une même fibre, *i.e.* satisfaisant $p(y_1) = p(y_2)$, sont dits *équivalents modulo G* , s'il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(y_1) = y_2$ — d'où aussi $\sigma^{-1}(y_2) = y_1$ avec $\sigma^{-1} \in G$. La structure de groupe assure qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence.

⁵ Classiquement, on considère plus fréquemment le *demi-plan de Poincaré*, qui est la partie supérieure du plan complexe $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Théorème (Structure des revêtements quelconques). Soit $q: Y \rightarrow X$ un revêtement quelconque entre deux variétés topologiques connexes (séparées), soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X , et soit $f: \tilde{X} \rightarrow Y$ une application continue satisfaisant $q \circ f = p$:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ f \swarrow & & \downarrow p \\ Y & & X \\ q \searrow & & \end{array}$$

laquelle existe toujours de manière unique par définition du revêtement universel. Alors :

- (i) f produit nécessairement un revêtement de \tilde{X} sur Y ;
- (ii) il existe un certain sous-groupe $G \subset \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ tel que deux points quelconques $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ ont même image par f , i.e. $f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_2)$, si et seulement si ils sont équivalents modulo G , i.e. il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ — ce qui décrit les fibres de f ;
- (iii) ce sous-groupe est isomorphe au groupe fondamental de Y :

$$G \cong \pi_1(Y).$$

Cas particulier : lorsque $Y = X$, $q = \text{id}_X$, d'où $f = p$, on retrouve bien le théorème qui précède :

$$G = \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X) \cong \pi_1(X).$$

DÉMONSTRATION. (i) Montrons pour commencer que f est un homéomorphisme local. Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$ un point quelconque et posons $x := p(\tilde{x})$, $y := f(\tilde{x})$. Puisque p est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert connexe $\tilde{W}_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} dans \tilde{X} et il existe un voisinage ouvert connexe U_x de x dans X tel que $p|_{\tilde{W}_{\tilde{x}}}: \tilde{W}_{\tilde{x}} \rightarrow U_x$ est un homéomorphisme. De même, puisque q est un revêtement par hypothèse, il existe un voisinage ouvert connexe $U'_x \subset U_x$ de x dans X et des ouverts (connexes) disjoints deux à deux $V_i \subset Y$, $i \in I$, tels que $q^{-1}(U'_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$ et tels que chaque restriction $q|_{V_i}: V_i \rightarrow U'_x$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$. Appelons alors V_y le V_i particulier qui contient le point y et posons :

$$\tilde{W}'_{\tilde{x}} := p^{-1}(U'_x) \cap \tilde{W}_{\tilde{x}} \subset \tilde{W}_{\tilde{x}},$$

ouvert lui aussi connexe auquel appartient toujours le point initialement choisi \tilde{x} . Alors on a :

$$\begin{aligned} y = f(\tilde{x}) &\in f(\tilde{W}'_{\tilde{x}}) \\ &\subset q^{-1}(U'_x) \quad [\text{utiliser } p = q \circ f \text{ et } q \circ f(\tilde{W}'_{\tilde{x}}) \subset U'_x], \end{aligned}$$

et puisque $f(\tilde{W}'_{\tilde{x}})$ est connexe, il en résulte plus précisément que :

$$f(\tilde{W}'_{\tilde{x}}) = V_y.$$

Enfin, comme on a par construction deux homéomorphismes :

$$\tilde{W}'_{\tilde{x}} \rightarrow U'_x \quad \text{et} \quad V_y \rightarrow U'_x$$

il est clair par simple composition — après inversion du second homéomorphisme — que :

$$f|_{\tilde{W}'_x} : \tilde{W}'_x \longrightarrow V_y$$

est un homéomorphisme.

Maintenant, afin de démontrer que f est un revêtement, nous allons vérifier que f possède la propriété de relèvement des courbes. Considérons à cet effet une courbe v dans Y qui part d'un point quelconque $y_0 \in Y$ et choisissons un point $\tilde{x}_0 \in f^{-1}(y_0) \subset \tilde{X}$ dans la fibre de ce dernier. Puisque $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement, la courbe projetée $q \circ v$ dans X peut être relevée (de manière unique) en une courbe \tilde{u} dans \tilde{X} qui part de \tilde{x}_0 . Alors grâce à $p = q \circ f$, on voit que les deux courbes :

$$f \circ \tilde{u} \quad \text{et} \quad v$$

dans Y sont chacune un relèvement de cette courbe $q \circ v$ dans X qui partent toutes deux du même point initial y_0 . Grâce au théorème d'unicité du relèvement (quand il existe), elle doivent coïncider : $f \circ \tilde{u} = v$, ce qui signifie précisément que \tilde{u} est le relèvement voulu de v .

(ii)-(iii) Nous affirmons que le sous-groupe en question n'est autre que :

$$G := \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{f} Y).$$

C'est un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$, puisque les fibres de f et de p coïncident. Par ailleurs, comme \tilde{X} est simplement connexe, le revêtement $f: \tilde{X} \rightarrow Y$ est nécessairement le revêtement universel de Y , donc il est galoisien grâce à un théorème qui précède. Toujours d'après ce même théorème, on a de plus $f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_2)$ si et seulement si il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, et on a enfin $G \cong \pi_1(Y)$. La démonstration du théorème s'achève ainsi. \square

Avant d'appliquer ces théorèmes aux surfaces de Riemann, citons sans démonstration quelques résultats importants de la théorie des revêtements dont il est utile de connaître la teneur. Tout d'abord, la 'réciproque' du théorème précédent montre qu'à tout sous-groupe G de $\pi_1(X)$ on peut associer un certain revêtement $\tilde{X}/G \rightarrow X$ dont le $\pi_1(\tilde{X}/G)$ est égal à G .

Théorème. Soit X une variété topologique connexe (séparée), soit $\tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel et soit G un sous-groupe quelconque :

$$G \subset \underbrace{\text{Aut}(\tilde{X} \rightarrow X)}_{\cong \pi_1(X)}.$$

Alors les assertions suivantes sont satisfaites :

(i) le quotient :

$$\tilde{X}/G = \{\tilde{x} \in \tilde{X}\} / \left(\begin{array}{l} \tilde{x}_1 \sim \tilde{x}_2 \text{ s'il existe } \sigma \in G \\ \text{tel que } \sigma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 \end{array} \right)$$

est une variété topologique (séparée) ;

(ii) la projection canonique :

$$\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$$

est un revêtement ;

(iii) l'application $\tilde{X}/G \rightarrow X$ induite par la projection $\tilde{X} \rightarrow X$ est elle aussi un revêtement qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ & \swarrow & \downarrow \\ \tilde{X}/G & & X; \\ & \searrow & \\ & & \end{array}$$

(iv) enfin, le groupe fondamental de ce quotient n'est autre que le groupe fixé au départ :

$$\pi_1(\tilde{X}/G) \cong G. \quad \square$$

Lorsque $G = \{e\}$ se réduit à l'élément neutre, on retrouve $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ et la simple connexité $\pi_1(\tilde{X}) = \{e\}$. Une attention particulière doit être apportée au cas où le sous-groupe G est normal dans $\pi_1(X)$, car dans ce cas, on peut parler du groupe quotient $\pi_1(X)/G$ et de plus, le revêtement associé $\tilde{X}/G \rightarrow X$ est alors galoisien.

Théorème. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, soit X une variété topologique connexe (séparée), soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel, soit un sous-groupe quelconque :*

$$G \subset \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X) \cong \pi_1(X),$$

et soit le diagramme commutatif vu à l'instant :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ & \swarrow & \downarrow \\ \tilde{X}/G & & X. \\ & \searrow & \\ & & \end{array}$$

Alors les assertions suivantes sont satisfaites :

(i) G est un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ si et seulement si le revêtement associé $\tilde{X}/G \rightarrow X$ est galoisien, i.e. son groupe d'automorphismes :

$$\text{Aut}(\tilde{X}/G \rightarrow X)$$

est transitif sur ses propres fibres ;

(ii) lorsque G est normal, ce groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe quotient :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\tilde{X}/G \rightarrow X) &\cong \frac{\text{Aut}(\tilde{X} \rightarrow X)}{G} \\ &\cong \pi_1(X)/G. \quad \square \end{aligned}$$

Pour terminer ces compléments, mentionnons que l'on connaît une description précise des automorphismes d'un revêtement quelconque, sans aucune hypothèse spécifique concernant la normalité.

Définition. Soit G un groupe abstrait et soit $H \subset G$ un sous-groupe quelconque de G . Le *normalisateur* de H dans G est le sous-groupe des éléments $g \in G$ qui stabilisent H par automorphisme intérieur :

$$\text{Norm}_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\},$$

et manifestement, il contient toujours H :

$$H \subset \text{Norm}_G(H) \subset G.$$

En particulier, $H \triangleleft G$ est un sous-groupe normal (ou distingué) de G lorsque, et seulement lorsque $\text{Norm}_G(H) = G$. Dans le cas général, H est *de facto* normal dans son normalisateur.

Définition et propriétés. Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement entre variétés topologiques connexes et soient deux points fixés $x_0 \in X$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. On introduit :

$$G_p(y_0) := \left\{ \text{cl}(u) : u: [0, 1] \rightarrow X \text{ continue } u(0) = u(1) = x_0 \text{ telle que} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{l'unique courbe relevée continue } v: [0, 1] \rightarrow Y \\ \text{avec } p \circ v = u \text{ et } v(0) = y_0 \\ \text{est fermée, i.e. elle satisfait } v(1) = v(0) = y_0 \end{array} \right\},$$

qui est visiblement un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$. Alors à conjugaison par automorphismes intérieurs près, $G_p(y_0)$ ne dépend pas (assertion) du choix d'un point $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. En effet, si $y'_0 \in p^{-1}(x_0)$ est un autre point dans cette fibre, soit $w: [0, 1] \rightarrow Y$ une courbe continue de y_0 à y'_0 et soit $p \circ w$ sa projection, qui est fermée en x_0 . Si u est une courbe fermée dans X en x_0 , alors le relèvement de u à Y partant de y_0 est fermé si et seulement si le relevé partant de y'_0 :

$$w^{-1} \cdot v \cdot w$$

de la courbe concaténée conjuguée :

$$((p \circ w)^{-1}) \cdot u \cdot (p \circ w)$$

est lui aussi fermé. Il en découle que :

$$G_p(y'_0) = \text{cl}((p \circ w)^{-1}) G_p(y_0) \text{cl}(p \circ w),$$

et donc les deux sous-groupes $G_p(y_0)$ et $G_p(y'_0)$ sont *conjugués* dans $\pi_1(X, x_0)$. Par oubli du point base et par oubli de ces conjugaisons qui dépendent du choix de points-bases, on identifie alors tous ces $G_p(y_0)$ à un unique sous-groupe de $\pi_1(X)$ noté G_p . Voici le théorème qui décrit les automorphismes d'un revêtement sans aucune hypothèse de normalité.

Théorème. Pour tout revêtement $p: Y \rightarrow X$ entre variétés topologiques connexes (séparées), le groupe d'automorphismes :

$$\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X)$$

est isomorphe au quotient :

$$\text{Norm}(G_p)/G_p. \quad \square$$

Ainsi, G_p n'est pas normal lorsque, et seulement lorsque, le groupe d'automorphismes n'est pas galoisien.

Applications aux surfaces de Riemann. Nous allons maintenant utiliser les théorèmes qui précèdent — excepté ceux dont la démonstration a été omise — pour déterminer tous les revêtements du disque unité épointé $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, ce qui sera utile dans la suite. L'énoncé suivant montre qu'à changement de coordonnées globales près, tout revêtement de \mathbb{D}^* est isomorphe ou bien au revêtement fourni par l'exponentielle, ou bien au revêtement donné par une puissance finie de z .

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $f: X \rightarrow \mathbb{D}^*$ un revêtement (pur, non ramifié). Alors une, et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite.

- (i) Si le revêtement possède un nombre infini de feuillettes, alors il existe une application biholomorphe $\varphi: X \rightarrow \mathbb{H}^-$ de X sur le demi-plan complexe gauche $\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}^- \\ & \searrow f & \swarrow \exp \\ & & \mathbb{D}^* \end{array}$$

- (ii) Si le revêtement est à un nombre fini k de feuillettes, alors il existe une application biholomorphe $\varphi: X \rightarrow \mathbb{D}^*$ qui rend commutatif le diagramme suivant, dans lequel $p_k: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ est le revêtement canonique $z \mapsto z^k$ à k feuillettes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* \\ & \searrow f & \swarrow p_k \\ & & \mathbb{D}^* \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Puisque $\exp: \mathbb{H}^- \rightarrow \mathbb{D}^*$ est le revêtement universel de \mathbb{D}^* , il existe une application holomorphe $\psi: \mathbb{H}^- \rightarrow X$ telle que $\exp = f \circ \psi$:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{H}^- \\ & \swarrow \psi & \downarrow \exp \\ Y & & \mathbb{D}^* \\ & \searrow f & \\ & & \mathbb{D}^* \end{array}$$

Considérons alors le sous-groupe correspondant :

$$G = \operatorname{Aut}(\mathbb{H}^- \xrightarrow{\psi} X) \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{H}^- \xrightarrow{\exp} \mathbb{D}^*) \cong \mathbb{Z}.$$

- (i) Si G consiste seulement en l'élément neutre, alors $\psi: \mathbb{H}^- \rightarrow X$ est une application biholomorphe⁶, et donc l'application recherchée $\varphi: X \rightarrow \mathbb{H}^-$ n'est autre que l'inverse de ψ .

⁶ Rappelons que d'après un théorème qui précède, deux points ont même image par ψ si et seulement si ils sont équivalents modulo G .

(ii) Rappelons que :

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^- \xrightarrow{\text{exp}} \mathbb{D}^*) = \{(z \mapsto z + 2i\pi n) : n \in \mathbb{Z}\},$$

groupe qui est isomorphe à \mathbb{Z} . Les sous-groupes de \mathbb{Z} étant bien connus, pour tout sous-groupe :

$$G \subset \text{Aut}(\mathbb{H}^- \xrightarrow{\text{exp}} \mathbb{D}^*),$$

il existe un entier déterminé $k = k_G$ qui dépend de G tel que :

$$G = \{(z \mapsto z + 2i\pi kn) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit alors $g: \mathbb{H}^- \rightarrow \mathbb{D}^*$ le revêtement défini par $g(z) := \exp(z/k)$. On obtient le diagramme suivant, dans lequel le triangle intérieur est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{H}^- \\ & & & & \downarrow \text{exp} \\ & \psi & & g_k & \\ X & \swarrow & \mathbb{D}^* & \searrow & \\ & & & & \mathbb{D}^* \\ & f & & p_k & \end{array}$$

Visiblement, on a $g(z) = g(z')$ si et seulement si z et z' sont équivalents modulo G . Donc il existe une application *ensembliste* bijective $\varphi: X \rightarrow \mathbb{D}^*$ qui rend commutative la partie gauche du diagramme suivant (la partie droite l'est déjà) :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{H}^- & & \\ & \psi & \downarrow g & \text{exp} & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* & \xrightarrow{p_k} & \mathbb{D}^* \end{array}$$

Puisque ψ et g sont localement biholomorphes, φ est nécessairement biholomorphe. On peut maintenant vérifier en examinant le diagramme complet :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{H}^- \\ & & & & \downarrow \text{exp} \\ & \psi & & g_k & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* & \searrow & \\ & f & & p_k & \mathbb{D}^* \end{array}$$

que le diagramme (ii) est commutatif, puisque les deux triangles supérieurs sont déjà commutatifs (exercice mental), et ceci achève la preuve du théorème. \square

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité et soit $f: X \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe propre non constante qui n'est pas ramifiée au-dessus de $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Alors si on note $p_k: z \mapsto z^k$, il existe un entier naturel $k \geq 1$ et une application biholomorphe $\varphi: X \rightarrow \mathbb{D}$ qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \\ & f \searrow & \swarrow p_k \\ & & \mathbb{D} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit $X^* := f^{-1}(\mathbb{D}^*)$. Alors $f|_{X^*}: X^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ est une application holomorphe propre qui constitue un revêtement non ramifié. Grâce au théorème qui précède, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* \\ & \searrow f & \swarrow p_k \\ & \mathbb{D}^* & \end{array}$$

au moyen d'une certaine application biholomorphe $\varphi: X^* \rightarrow \mathbb{D}^*$. Nous affirmons alors que le compact $f^{-1}(0)$ se réduit à un seul point.

Sinon, si $f^{-1}(0)$ consistait en un nombre fini $n \geq 2$ de points b_1, \dots, b_n , alors il existerait des voisinages ouverts disjoints V_i de b_i pour $i = 1, \dots, n$, et un disque $\mathbb{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, avec $0 < r < 1$, tels que :

$$f^{-1}(\mathbb{D}(r)) \subset V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Soit alors $\mathbb{D}^*(r) := \mathbb{D}(r) \setminus \{0\}$. Puisque $f^{-1}(\mathbb{D}^*(r))$ est homéomorphe à :

$$p_k^{-1}(\mathbb{D}^*(r)) = \mathbb{D}^*(\sqrt[k]{r}),$$

cet ensemble est nécessairement connexe. Puisque chaque b_i est un point d'accumulation de $f^{-1}(\mathbb{D}^*(r))$, il suit que $f^{-1}(\mathbb{D}(r))$ est aussi connexe. Mais ceci contredit l'inclusion obtenue à l'instant. Donc $f^{-1}(0)$ consiste en un point unique $b \in X$. Par conséquent, si on définit $\varphi(b) := 0$, on peut prolonger l'application $\varphi: X^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ en une application biholomorphe $\varphi: X \rightarrow \mathbb{D}$ qui rend commutatif le diagramme du théorème, ce qui en achève la preuve. \square

Exercices

Exercice 5.1. Soient $X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ et $Y := \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, comme dans l'Exercice 4.1. Montrer que le groupe :

$$\text{Aut}(Y \xrightarrow{\sin} X)$$

consiste en les transformations suivantes :

- (i) $f_k(z) = z + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $g_k(z) := -z + (2k + 1)\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Calculer ensuite les compositions $f_k \circ f_l$, $f_k \circ g_l$, $g_l \circ f_k$ et $g_k \circ g_l$.

Exercice 5.2. Déterminer les automorphismes du revêtement (cf. l'Exercice 4.4) :

$$\tan: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{+i, -i\}.$$

Exercice 5.3. Soient $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux et soit :

$$f: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma'$$

une application holomorphe non constante avec $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une unique constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ et montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{z \mapsto \alpha z} & \mathbb{C} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Gamma'. \end{array}$$

Montrer que f est un revêtement non ramifié dont le groupe d'automorphismes est le groupe quotient :

$$\text{Aut}(\mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{f} \mathbb{C}/\Gamma') \cong \Gamma'/\alpha\Gamma.$$

Exercice 5.4. Soit $X := \mathbb{C}/\{+2, -2\}$, soit $Y := \mathbb{C}/\{\pm 1, \pm 2\}$, et soit $p: Y \rightarrow X$ l'application :

$$p(z) := z^3 - 3z.$$

Montrer que p est un revêtement holomorphe non ramifié à trois feuillets. Calculer le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X)$ et en déduire que le revêtement $p: Y \rightarrow X$ n'est pas galoisien. *Indication* : utiliser le fait que toute application biholomorphe $f: Y \rightarrow Y$ se prolonge comme un automorphisme de la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 .

Exercice 5.5. Soit $X := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, soit $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$, et soit $p: Y \rightarrow X$ l'application :

$$p(z) := (z^2 + 1)^2.$$

Montrer que p est un revêtement ramifié à 4 feuillets qui n'est pas galoisien et que :

$$\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X) = \{\text{id}_Y, (z \mapsto -z)\}.$$

Exercice 5.6. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés. Montrer que tout revêtement à 2 feuillets $p: Y \rightarrow X$ est galoisien.

6. Faisceaux

Après les travaux précurseurs de Cousin sur les fonctions méromorphes à plusieurs variables, les concepts généraux de la théorie des faisceaux ont été introduits en France par Jean Leray pendant la seconde guerre mondiale, puis développés dans les années 1950-60, notamment par Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et Alexandre Grothendieck, pour ne citer que les mathématiciens les plus connus. Les faisceaux sont rapidement devenus un outil important et reconnu en géométrie algébrique et en géométrie analytique, ainsi qu'en topologie, car ils expriment toutes les relations qui peuvent exister entre l'être global d'un objet et toutes ses caractéristiques locales ou semi-locales. On se contentera ici de développer quelques rudiments de cette théorie, notre prochain objectif étant d'utiliser son langage afin d'établir le théorème très fondamental suivant : *pour toute fonction holomorphe (resp. méromorphe) donnée sur un petit ouvert d'une surface de Riemann, il existe toujours une unique surface de Riemann qui constitue le domaine de prolongement maximal de cette fonction en tant que fonction holomorphe (resp. méromorphe).*

L'exemple de faisceau qui est à la fois le plus simple et le plus représentatif, c'est celui de l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues complexes définies sur un espace topologique X . L'objectif conceptuel est de penser le fait qu'avec une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, toutes ses restrictions $f|_U: U \rightarrow \mathbb{C}$ à des sous-ouverts quelconques $U \subset X$ sont aussi automatiquement données : on voudrait donc comprendre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ en voyant simultanément aussi toutes ses restrictions $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ à des ouverts *quelconques* $U \subset X$, et on voudrait aussi comprendre la manière dont ces restrictions dépendent des ouverts U . Certes, passer de X à ses sous-ouverts U pourrait sembler artificiel ici, mais c'est en fait *dans le sens inverse* que de très nombreux problèmes mathématiques se posent : *comment, à partir d'une collection d'objets qui sont définis seulement sur des petits ouverts, peut-on construire un objet qui est défini sur l'espace tout entier ?*

Classiquement, avant de parler de faisceaux, on commence par définir une notion presque amorphe tant elle est générale : la notion de *préfaisceau*, laquelle ne requiert que l'existence d'*applications de restriction*. On va voir dans un instant qu'on est parfois forcé, en partant d'un faisceau, d'aboutir à un préfaisceau qui aura perdu une partie de sa structure initiale de faisceau, donc la notion de préfaisceau n'est en rien une généralisation gratuite.

Définition. Soit X un espace topologique. Un *préfaisceau* (d'ensembles) \mathcal{A} sur X consiste en les données suivantes :

- (i) une collection d'ensembles non vides $\mathcal{A}(U)$ associés à tout ouvert $U \subset X$ non vide ;
- (ii) une collection d'applications :

$$\rho_{U,V}: \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$$

associées à toute paire d'ouverts $U \subset V$ qui satisfait la propriété de transitivité :

$$\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{U,W}, \quad \text{pour tout triplet d'ouverts } U \subset V \subset W,$$

ainsi que :

$$\rho_{U,U} = \text{Id}_U \quad \text{pour tout ouvert } U.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(U)$ est appelé *ensemble des sections* au-dessus de U du préfaisceau \mathcal{A} .

La plupart du temps, le préfaisceau \mathcal{A} possède une structure algébrique additionnelle. Soit R un anneau quelconque et soit \mathbb{K} un corps quelconque.

Définition. Un préfaisceau d'ensembles \mathcal{A} sur X comme ci-dessus est appelé un *préfaisceau de groupes abéliens* (resp. *d'anneaux*, *de R -modules*, *d'algèbres*, de \mathbb{K} -espaces vectoriels) si, pour tout sous-ouvert $U \subset X$, l'ensemble $\mathcal{A}(U)$ est un groupe abélien (resp. un anneau, un R -module, une algèbre, un \mathbb{K} -espace vectoriel) et si les applications $\rho_{U,V}$ sont des *morphismes* de la structure algébrique en question. Dans ces cas-là, on suppose alors toujours que $\mathcal{A}(\emptyset) = \{0\}$.

Exemples.

(a) Si on assigne à tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continue sur U et si $\rho_{U,V}$ désigne le morphisme évident de restriction $\mathcal{C}(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$, alors on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X , que l'on peut noter \mathcal{C}_X .

(b) De manière similaire, si X est une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k , on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X en considérant les fonctions de classe \mathcal{C}^k définies sur des ouverts $U \subset X$ qui sont à valeurs dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}), et on peut le noter \mathcal{C}_X^k .

(c) Si X est une surface de Riemann, on obtient le préfaisceau des fonctions holomorphes sur X , classiquement noté \mathcal{O}_X .

C'est à cause de ces trois exemples que les applications $\rho_{U,V}$ ci-dessus sont classiquement (et intuitivement) considérées comme des *applications de restriction*, bien qu'en toute généralité, les ensembles $\mathcal{A}(U)$ de la définition donnée ne soient pas nécessairement des ensembles de fonctions définies sur U .

Observons que pour les trois préfaisceaux \mathcal{C}_X , \mathcal{C}_X^k et \mathcal{O}_X ci-dessus, les propriétés qui définissent les fonctions considérées sont purement locales. De plus, on se convainc aisément, en examinant la manière dont sont définies les trois sortes de fonctions en question, que ces trois préfaisceaux \mathcal{C}_X , \mathcal{C}_X^k et \mathcal{O}_X satisfont les deux propriétés additionnelles suivantes.

Définition. Un préfaisceau \mathcal{A} sur un espace topologique X est dit être un *faisceau* si, pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U$$

de U par des sous-ouverts $U_i \subset U$, il satisfait :

(iii) *axiome d'unicité* : les restrictions $\rho_{U_i, U}(F) = \rho_{U_i, U}(F')$ de deux sections $F, F' \in \mathcal{A}(U)$ coïncident sur chaque U_i si et seulement si $F = F'$ sur U tout entier ;

(iv) *axiome de recollement* : étant donné une collection de sections $F_i \in \mathcal{A}(U_i)$ qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines :

$$\rho_{U_{i_1} \cap U_{i_2}, U_{i_1}}(F_{i_1}) = \rho_{U_{i_2} \cap U_{i_1}, U_{i_2}}(F_{i_2}) \quad \text{dans } \mathcal{A}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \text{ pour tous } i_1, i_2 \in I,$$

il existe une section $F \in \mathcal{A}(U)$ dont les restrictions redonnent par restriction les sections originales :

$$\rho_{U_i, U}(F) = F_i,$$

et cette section F est alors unique par (iii).

Exemples. Pour un ouvert U d'une surface de Riemann X , soit $\mathcal{O}_X^*(U)$ le groupe multiplicatif de toutes les applications holomorphes $f: U \rightarrow \mathbb{C}^*$. Avec l'application usuelle de restriction, \mathcal{O}_X^* est un faisceau de groupes abéliens (multiplicatifs).

Le faisceau \mathcal{M}_X^* est défini de manière un peu différente : pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathcal{M}_X^*(U)$ consiste en toutes les fonctions méromorphes $f \in \mathcal{M}(U)$ qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de U .

Tous les préfaisceaux ne satisfont pas ces deux derniers axiomes supplémentaires (iii) et (iv). Détaillons à cet effet un :

Exemple trivial mais instructif. Soit E un ensemble arbitraire de cardinal ≥ 2 qui possède un élément distingué '0' et un autre élément $e \neq 0$, par exemple un groupe abélien, un anneau, un R -module ou un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et soit à nouveau X un espace topologique. Alors le *préfaisceau constant* \mathcal{E}_X sur X est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_X(\emptyset) := \{0\}, \\ \mathcal{E}_X(U) := E \quad \text{pour tout ouvert non vide } U \subset X, \end{cases}$$

avec comme applications de restriction $\rho_{U,V} = \text{Id}_E$ lorsque $\emptyset \neq U \subset V$ et $\rho_{U,V} = 0$ lorsque $U = \emptyset$. Nous affirmons maintenant que si :

$$X = V_1 \cup V_2$$

peut s'écrire comme réunion de deux ouverts *disjoints non vides* (il y a énormément d'exemples), l'axiome de recollement n'est pas satisfait.

En effet, soit $F_1 \in \mathcal{E}_X(V_1)$ définie par $F_1 := 0$ et soit $F_2 \in \mathcal{E}_X(V_2)$ définie par $F_2 := e \neq 0$. Puisque $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, on a gratuitement par définition coïncidence des restrictions à l'intersection :

$$\rho_{V_1 \cap V_2, V_1}(F_1) = 0 = \rho_{V_2 \cap V_1, V_2}(F_2).$$

S'il existait une section $G \in \mathcal{E}_X(V_1 \cup V_2)$ recollant F_1 et F_2 , on devrait alors avoir :

$$\begin{aligned} 0 = F_1 &= \underbrace{\rho_{V_1, V_1 \cup V_2}}_{\text{Id}}(G) = G, \\ e = F_2 &= \underbrace{\rho_{V_2, V_2 \cup V_1}}_{\text{Id}}(G) = G, \end{aligned}$$

ce qui contredirait manifestement l'hypothèse $e \neq 0$. □

Morphismes de préfaisceaux. Soient maintenant \mathcal{A} et \mathcal{B} deux faisceaux de groupes abéliens (ou de toute autre structure algébrique) définis sur le même espace topologique X .

Définition. Un *morphisme de préfaisceaux* sur X :

$$\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est une collection de morphismes de groupes abéliens (ou d'une autre structure algébrique) :

$$\varphi_U: \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)$$

associés à *tout sous-ouvert* $U \subset X$ qui commutent avec les morphismes de restrictions, *i.e.* qui, pour toute paire d'ouverts emboîtés $U \subset V$, assurent la commutativité du diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{B}(V) \\ \rho_{U,V}^{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \rho_{U,V}^{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{B}(U). \end{array}$$

Définition. On dit que \mathcal{A} est un *sous-préfaisceau* de \mathcal{B} si, pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ et si le morphisme $\varphi_U: \mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ est induit par l'inclusion.

On vérifie alors (exercice mental) que la propriété de commutativité signifie : $\rho_{U,V}^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}(V)) \subset \mathcal{A}(U)$ pour tous ouverts emboîtés $U \subset V$, et $\rho_{U,V}^{\mathcal{A}}$ coïncide avec $\rho_{U,V}^{\mathcal{B}}$ sur $\mathcal{A}(V)$.

Si \mathcal{A} est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau \mathcal{B} de groupes abéliens, on peut définir un *préfaisceau quotient* $\mathcal{C} := \mathcal{B}/\mathcal{A}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X le groupe quotient :

$$\mathcal{C}(U) := \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U).$$

D'une manière similaire, on définit le *préfaisceau noyau*, le *préfaisceau image*, et le *préfaisceau conoyau* d'un morphisme de préfaisceaux $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X :

$$U \longmapsto \text{Ker } \varphi_U, \quad U \longmapsto \text{Im } \varphi_U, \quad U \longmapsto \text{Coker } \varphi_U,$$

Ce sont des sous-préfaisceaux (respectivement) de \mathcal{A} , de \mathcal{B} , de \mathcal{B} . La somme directe $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ de deux préfaisceaux de groupes abéliens \mathcal{A} et \mathcal{B} est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{B}(U).$$

Le *produit tensoriel* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de deux préfaisceaux de R -modules est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathcal{A}(U) \otimes_R \mathcal{B}(U).$$

Observation importante. On doit bien faire attention au fait que le préfaisceau quotient d'un faisceau par un faisceau n'est pas nécessairement un faisceau.

Exemple. Soit S^1 le cercle unité dans \mathbb{R} , soit \mathcal{C}_{S^1} le faisceau des fonctions continues à valeurs complexes S^1 , et soit \mathcal{L}_{S^1} le sous-faisceau des fonctions continues sur S^1 à valeurs dans \mathbb{Z} , i.e. des fonctions localement constantes à valeurs entières. L'application exponentielle :

$$\varphi := \exp(2i\pi \cdot): \mathcal{C}_{S^1} \longrightarrow \mathcal{C}_{S^1}^*$$

est un morphisme du faisceau \mathcal{C}_{S^1} à valeurs dans le faisceau $\mathcal{C}_{S^1}^*$ des fonctions continues inversibles (nulle part égales à 0), et son noyau est précisément égal à \mathcal{L} . Pour tout ouvert $U \neq S^1$, l'application φ_U est surjective (exercice mental).

Toutefois, pour $U = S^1$, nous affirmons que l'application φ_{S^1} envoie \mathcal{C}_{S^1} sur le groupe multiplicatif des applications continues de $\mathcal{C}_{S^1}^*$ dont le *degré*¹ (par rapport à l'origine) est égal à zéro ; en effet, pour $t \mapsto f(e^{2i\pi t})$ continue sur S^1 , la courbe continue fermée :

$$t \longmapsto \varphi_{S^1}(f)(t) = \exp(2i\pi f(e^{2i\pi t})) \in \mathbb{C}^*$$

¹ Soit $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application continue nulle part égale à 0. Le *degré* de g est le nombre de fois que la courbe fermée $[0, 1] \ni t \mapsto g(e^{2i\pi t})$ tourne autour de l'origine, eu égard à l'orientation trigonométrique. On montre (ou on sait) que le degré reste invariant par homotopie.

se rétracte homotopiquement en la famille suivante de courbes toujours à valeurs dans \mathbb{C}^* indexées par $0 \leq r \leq 1$:

$$t \longmapsto \varphi_{S^1}(g)(t) = \exp(2i\pi f(r e^{2i\pi t})) \in \mathbb{C}^*,$$

courbe au final constante pour $r = 0$, donc de degré zéro. On en déduit que le préfaisceau quotient $\mathcal{C}_{S^1}/\mathcal{L}_{S^1}$ n'est pas isomorphe au faisceau $\mathcal{C}_{S^1}^*$, bien que leurs espaces de sections soit les mêmes pour tout ouvert $U \neq S^1$. Puisque $\mathcal{C}_{S^1}^*$ est un faisceau, on voit que le préfaisceau quotient $\mathcal{C}_{S^1}/\mathcal{L}_{S^1}$ ne satisfait pas nécessairement l'axiome de recollement (iv). \square

Afin de réparer la non-préservation des axiomes de faisceau par passage au préfaisceau quotient de deux faisceaux, on introduit classiquement un procédé de « *faisceautisation d'un préfaisceau* » que nous allons exposer très progressivement.

Exemple. On peut modifier comme suit l'exemple du préfaisceau constant \mathcal{E}_X donné plus haut pour E un groupe abélien afin d'en faire un vrai faisceau. Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\tilde{\mathcal{E}}_X(U)$ le groupe abélien de toutes les applications $f: U \rightarrow E$ qui sont *localement constantes*, à savoir constantes sur les composantes connexes de U . Si U est connexe, il est clair que $\tilde{\mathcal{E}}_X(U)$ s'identifie à E , mais lorsque U n'est pas connexe, on voit que :

$$E = \mathcal{E}_X(U) \neq \tilde{\mathcal{E}}_X(U).$$

Pour $V \subset U$, soit $\tilde{\mathcal{E}}_X(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_X(V)$ la restriction usuelle des fonctions. On vérifie (exercice mental) que $\tilde{\mathcal{E}}_X$ est un vrai faisceau sur X , appelé *faisceau des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans E* .

Espace topologique associé à un préfaisceau. Dans le cas général, la « *faisceautisation* » débute comme suit. On commence par introduire la notion de germe qui inspecte les préfaisceaux au microscope.

Définition. Si \mathcal{F} est un préfaisceau sur un espace topologique X et si $x \in X$ est un point quelconque, l'ensemble \mathcal{F}_x des *germes de \mathcal{F} en x* est défini comme étant la limite inductive abstraite :

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} (\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}),$$

c'est-à-dire plus explicitement : \mathcal{F}_x est l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments appartenant à la réunion disjointe :

$$\coprod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim_x$$

modulo ' \sim_x ' dans laquelle deux éléments :

$$F_1 \in \mathcal{F}(U_1), \quad U_1 \ni x \quad \text{et} \quad F_2 \in \mathcal{F}(U_2), \quad U_2 \ni x$$

sont considérés comme équivalents :

$$F_1 \sim_x F_2,$$

si et seulement si — par définition — il existe un voisinage ouvert $V \ni x$ avec $V \subset U_1 \cap U_2$ tel que :

$$\rho_{V,U_1}(F_1) = \rho_{V,U_2}(F_2).$$

Intuitivement et conceptuellement parlant, les germes sont donc des sections considérées dans un voisinage arbitrairement petit du point de référence.

Définition. Pour tout ouvert $U \subset X$ et tout point $x \in U$, on note :

$$\rho_x: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

l'application qui assigne à toute section $F \in \mathcal{F}(U)$ sa classe d'équivalence modulo \sim_x . L'image $\rho_x(F)$ d'une section $F \in \mathcal{F}(U)$ est appelée *germe de F en x* .

Exemple très fondamental de germe de section. Considérons le faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $X \subset \mathbb{C}$. Soit $x \in X$. Alors un germe de fonction holomorphe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ est représenté par une fonction holomorphe dans un (petit) voisinage ouvert de x , et donc par conséquent, il est donné par une série entière :

$$f_x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x)^k$$

qui possède un rayon de convergence strictement positif, ce dernier pouvant toutefois être arbitrairement petit. Deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage de x définissent le même germe dans $\mathcal{O}_{X,x}$ précisément lorsqu'elles ont le même développement de Taylor au point x . On en déduit immédiatement un énoncé crucial.

Proposition. *L'espace $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{C}\{z - x\}$ des séries entières à coefficients complexes en $z - x$ qui convergent dans un disque ouvert de rayon positif non précisé autour de x . \square*

Pour tout germe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, sa valeur $f_x(x)$ en x est alors bien définie : elle ne dépend pas du choix d'un représentant. Il en va de même pour ses dérivées de tous ordres.

Proposition. *L'anneau \mathcal{M}_x des germes de fonctions méromorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau de toutes les séries de Laurent convergentes :*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k (z - x)^k$$

à coefficients complexes c_k qui ont une partie principale finie, i.e. telles que $k_0 > -\infty$. \square

Espace topologique associé à un préfaisceau. Soit comme précédemment \mathcal{F} un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X . On souhaite maintenant munir la réunion disjointe des germes de \mathcal{F} en tous les points x de X :

$$\text{Germes}(\mathcal{F}) := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

d'une topologie naturelle. À tout ouvert $U \subset X$ et à toute section $F \in \mathcal{F}(U)$, on associe la collection des germes de cette dernière :

$$[U, F] := \{F_x \in \text{Germes}(\mathcal{F}) : x \in U\},$$

et l'on prétend que cette (immense) collection convient.

Proposition. *Le système de tous ces ensembles $[U, F]$, où $U \subset X$ est ouvert et où $F \in \mathcal{F}(U)$, forme une base pour une topologie sur $\text{Germes}(\mathcal{F})$.*

DÉMONSTRATION. Pour s'assurer que ce système puisse bien former une base pour une topologie sur $\text{Germes}(\mathcal{F})$, on doit premièrement vérifier que tout élément de $\text{Germes}(\mathcal{F})$ est contenu dans au moins un $[U, F]$, ce qui est évident. Deuxièmement, on se

convainc par la réflexion — exercice très recommandé — que cette famille est stable par intersection :

$$[F, U] \cap [G, V] = [H, W],$$

où W est l'ensemble *ouvert* (exercice mental) de tous les points $x \in U \cap V$ en lesquels $F_x = G_x$, et où $H := \rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G)$. \square

Proposition. *La projection évidente :*

$$\pi : \text{Germes}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$$

qui envoie \mathcal{F}_x sur x , est un homéomorphisme local

DÉMONSTRATION. Pour tout ouvert $U \subset X$, cette projection induit en fait un homéomorphisme de l'ouvert $[U, F]$ sur l'ouvert U : elle est bijective, elle est continue, et son inverse est elle aussi continue, par définition. \square

Principe d'identité et séparation de la topologie. Les propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes sur une surface de Riemann motivent la définition générale suivante.

Définition. Un préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est dit satisfaire le *principe d'identité germique* si pour tout ouvert *connexe* $U \subset X$, pour toute paire de sections $F, G \in \mathcal{F}(U)$ dont les germes coïncident en au moins un point $x \in U$:

$$\rho_x(F) = \rho_x(G),$$

on a nécessairement $F = G$.

Théorème. *Soit X un espace topologique localement connexe séparé et soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X qui satisfait le principe d'identité germique. Alors l'espace topologique $\text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ est séparé.*

DÉMONSTRATION. Soient $F_x \in \mathcal{F}_x$ et $G_y \in \mathcal{F}_y$ deux éléments distincts : $F_x \neq G_y$, de cet espace $\text{Germes}(\mathcal{F})$. L'objectif est de trouver deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y .

PREMIER CAS. Lorsque $\pi(F_x) = x \neq y = \pi(G_y)$, il suffit, puisque X a été supposé séparé, de prendre deux voisinages ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ qui sont disjoints : $U \cap V = \emptyset$, et d'observer que $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$ sont alors automatiquement deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y .

DEUXIÈME CAS. Supposons maintenant que $y = x$. Soient alors $F \in \mathcal{F}(U)$ et $G \in \mathcal{F}(V)$ deux représentants des germes distincts $F_x \neq G_x$, où U et V sont deux voisinages ouverts de x . Soit ensuite $W \subset U \cap V$ un voisinage ouvert *connexe* (il en existe par hypothèse) de x . Alors les deux ouverts de $\text{Germes}(\mathcal{F})$:

$$[W, \rho_{W,U}(F)] \quad \text{et} \quad [W, \rho_{W,V}(G)]$$

sont des voisinages de F_x et de G_x , respectivement. Nous affirmons que leur intersection est vide. Sinon, il existerait un élément :

$$H_z \in [W, \rho_{W,U}(F)] \cap [W, \rho_{W,V}(G)]$$

et en sa projection $\pi(H_z) = z \in W$, les deux représentants satisferaient :

$$H = \rho_z(F) = \rho_z(G),$$

ce qui impliquerait grâce au principe d'identité germique que :

$$\rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G),$$

d'où immédiatement $F_x = G_x$ par définition des germes : contradiction ! \square

Faisceau associé à un préfaisceau, ou « faisceautisation ». Il est temps d'achever ce chapitre sur ce qui en constitue son résultat principal. Commençons par des commentaires qui visent à transmettre des motivations et des idées.

Tout d'abord, nous avons adopté au début une terminologie qui décidait d'appeler « sections » les éléments $\mathcal{A}(U)$ d'un préfaisceau \mathcal{A} associée à un ouvert U d'un espace topologique X . Or le terme « section » possède déjà — en topologie et géométrie différentielle par exemple — un sens plus spécifique : si $\pi : E \rightarrow M$ est un espace fibré (principal, vectoriel, etc.) au-dessus d'une variété lisse M , une *section* de π au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ est — d'après une définition standard universellement admise — une application lisse $f : U \rightarrow E$ « allant dans le sens inverse de π » qui envoie chaque point $x \in U$ dans la fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ « située au-dessus de lui », à savoir brièvement, une application qui satisfait $\pi \circ f = \text{Id}_U$. Or un préfaisceau \mathcal{A} n'associe pas nécessairement en général à un ouvert $U \subset X$ un espace d'applications de U à valeurs dans un autre espace : on a dit en effet dans la première définition que $\mathcal{A}(U)$ est supposé être juste un ensemble. Aussi la terminologie « sections » pour désigner les éléments de $\mathcal{A}(U)$ est-elle légèrement incohérente avec certains autres usages.

Mais en vérité, la plupart des (pré)faisceaux que l'on rencontre dans la vie mathématique ordinaire sont de vrais espaces de « sections », et c'est pour cette raison que l'on s'autorise une légère confusion de langage lorsqu'on introduit la notion de préfaisceau. En effet, si M est une variété réelle de classe \mathcal{C}^∞ , le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur M possède comme « sections » sur un ouvert quelconque $U \subset M$ les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$; de même, le faisceau des k -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur M possède comme « sections » les applications $\omega \in \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k T_M^*)$. Ce sont bien des applications définies sur des ouverts $U \subset M$. Classiquement, on utilise alors la lettre grecque « Γ » pour désigner de tels espaces de « sections » :

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_M^\infty) \equiv \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \Gamma(U, \Lambda^k T_M^*) \equiv \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k T_M^*).$$

La morale de cette discussion, c'est que lorsqu'on peut interpréter un préfaisceau comme espace de « vraies sections-applications », alors le préfaisceau en question s'avère être un faisceau, puisque les sections, en tant qu'*applications*, satisfont automatiquement les deux axiomes (iii) d'unicité et (iv) de recollement. C'est alors tout le sens du théorème que voici de remplacer un préfaisceau quelconque \mathcal{F} par un espace de vraies sections-applications :

$$U \longmapsto \Gamma(U, \text{Germes}(\mathcal{F}))$$

afin de le transformer en un vrai faisceau (*i.e.* de le « faisceautiser »), les axiomes (iii) et (iv) étant alors automatiquement satisfaits comme nous venons de le dire. Nous prenons le temps d'énoncer un théorème très progressif et très détaillé qui résume ce qui a déjà été vu avant qu'y apparaissent les informations nouvelles désirées.

Théorème. *Soit X un espace topologique (pas nécessairement séparé). Alors à tout un préfaisceau (d'ensembles) \mathcal{F} sur X on peut associer de manière canonique un vrai faisceau noté $\text{Sheaf}(\mathcal{F})$ en procédant comme suit.*

On introduit pour commencer la réunion disjointe :

$$\text{Germes}(\mathcal{F}) := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

de tous les germes de \mathcal{F} aux points de X que l'on munit de la topologie dont une base d'ouverts est constituée (par définition) de tous les ensembles :

$$[U, F] := \{F_x \in \text{Germes}(\mathcal{F}) : x \in U\},$$

où $U \subset X$ est un ouvert quelconque et où $F \in \mathcal{F}(U)$ est une section arbitraire. Alors avec cette topologie, la projection évidente :

$$\pi : \text{Germes}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$$

qui envoie \mathcal{F}_x sur x est un homéomorphisme local. Mais surtout, le préfaisceau des (vraies) sections continues de cette projection π , à savoir le préfaisceau :

$$U \longmapsto \Gamma(U, \text{Germes}(\mathcal{F})) := \{ \text{applications continues } f : U \longrightarrow \text{Germes}(\mathcal{F}) \text{ telles que } \pi \circ f = \text{Id}_U \}$$

constitue un vrai faisceau que l'on peut aussi noter alternativement :

$$U \longmapsto \text{Sheaf}(\mathcal{F})(U) \equiv \Gamma(U, \text{Germes}(\mathcal{F})),$$

et qui jouit des trois propriétés suivantes :

(i) il possède les mêmes germes que \mathcal{F} en tout point $x \in X$:

$$\text{Sheaf}(\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x;$$

(ii) la réunion disjointe de ses germes coïncide avec celle du préfaisceau dont il est issu :

$$\text{Germes}(\text{Sheaf}(\mathcal{F})) = \text{Germes}(\mathcal{F});$$

(iii) enfin, il existe un morphisme canonique de préfaisceaux :

$$\gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \text{Sheaf}(\mathcal{F}) \equiv \Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F}))$$

défini, pour tout ouvert $U \subset X$, par :

$$\begin{aligned} \gamma_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \text{Sheaf}(\mathcal{F})(U) \equiv \Gamma(U, \text{Germes}(\mathcal{F})), \\ F &\longmapsto (U \ni x \longmapsto F_x \in \mathcal{F}_x), \end{aligned}$$

et ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si \mathcal{F} était un faisceau au départ.

DÉMONSTRATION. Gracieusement offerte au lecteur, à qui il est de plus fortement recommandé de réfléchir aussi sur la propriété universelle caractérisant $\text{Sheaf}(\mathcal{F})$ qui est énoncée dans l'un des exercices. \square

Exercices

Exercice 6.1. Soit X une surface de Riemann non compacte. Pour $U \subset X$ ouvert, soit $\mathcal{B}(U)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes bornées $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Pour un couple d'ouverts $U \subset V$, soit $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(U)$ l'application usuelle de restriction. Montrer que le préfaisceau \mathcal{B} satisfait l'axiome d'unicité (iii), mais pas l'axiome de recollement (iv).

Exercice 6.2. Soit X une surface de Riemann. Pour $U \subset X$ ouvert, soit :

$$\mathcal{F}(U) := \mathcal{O}_X^*(U) / \exp(\mathcal{O}_X(U)).$$

Montrer que \mathcal{F} , muni des applications usuelles de restriction, est un préfaisceau qui ne satisfait pas l'axiome d'unicité (iii).

Exercice 6.3. Soit \mathcal{F} un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X . Montrer que le faisceau $\Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F}))$ associé à \mathcal{F} qui est constitué des sections continues de $\text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ au-dessus d'ouverts $U \subset X$ et qui vient accompagné d'un morphisme de préfaisceaux naturel :

$$\gamma: \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F}))$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur X :

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

dont l'espace image \mathcal{G} est un *vrai* faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux (en pointillés) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \text{ (pointillés) } & \\ \Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F})) & & \end{array} .$$

Exercice 6.4. Soit $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur un espace topologique X pour une certaine structure algébrique (groupes abéliens, anneaux, R -modules, algèbres, \mathbb{K} -espaces vectoriels).

(a) Montrer que φ induit, pour tout $x \in X$, un morphisme de germes $\varphi_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$.

(b) Montrer que φ est injectif si et seulement si φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

(c) Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si φ_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

(d) Soit $X := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{F} := \mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X , et soit $\mathcal{G} := \mathcal{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes nulle part égales à zéro. Montrer que l'application exponentielle $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est surjective sur les germes. Montrer enfin que $\varphi(X)$ n'est pas surjective. Conclure.

7. Prolongement analytique

Définition (Prolongement analytique le long d'une courbe). Soit X une surface de Riemann, soient a et b deux points de X et soit $u: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue telle que $u(0) = a$ et $u(1) = b$. Un germe de fonction holomorphe $f_b \in \mathcal{O}_{X,b}$ en b est dit *résulter d'un germe de fonction holomorphe $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ en a par prolongement analytique le long de la courbe $u([0, 1])$* si les conditions suivantes sont satisfaites :

il existe une famille de germes de fonctions holomorphes $f_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$ paramétrée par $t \in [0, 1]$ avec $f_0 = f_a$ et $f_1 = f_b$ telle que pour tout $t_1 \in [0, 1]$, il existe un voisinage ouvert T_{t_1} de t_1 dans $[0, 1]$, il existe un ouvert $U_{t_1} \subset X$ avec $u(T_{t_1}) \subset U_{t_1}$ et il existe une fonction holomorphe $g_{t_1} \in \mathcal{O}(U_{t_1})$ dont les germes¹ redonnent les f_t :

$$\rho_{u(t)}(g_{t_1}) = f_t$$

en tout $t \in T_{t_1}$. On requiert donc que, localement au voisinage de tout $t_1 \in [0, 1]$, les germes f_t soient égaux au germe d'une *même et unique* fonction holomorphe g_{t_1} définie au voisinage de $u(t_1)$ dans X .

Par compacité de l'intervalle $[0, 1]$, cette condition est équivalente à la suivante : il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0, 1]$, il existe des ouverts connexes $U_i \subset X$, $i = 0, 1, \dots, n$ avec $u([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ et il existe des fonctions holomorphes $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$ tels que :

- (i) f_a est le germe $\rho_{u(t_0)}(f_1)$ de f_1 au point $a = u(t_0)$ et f_b est le germe $\rho_{u(t_n)}(f_n)$ de f_n au point $b = u(t_n)$;
- (ii) si, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, l'ouvert V_i désigne la composante connexe de $U_i \cap U_{i+1}$ qui contient le point $u(t_i)$, alors :

$$f_i|_{V_i} = f_{i+1}|_{V_i}.$$

Rappelons maintenant que l'on peut associer au faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur X un espace topologique qui est la réunion de ses germes, espace que l'on notera brièvement :

$$|\mathcal{O}_X| = \coprod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x},$$

au lieu de Germes (\mathcal{O}_X) comme précédemment ; on sait d'ailleurs maintenant, puisque \mathcal{O}_X est déjà un faisceau, que son faisceautisé $\Gamma(|\mathcal{O}_X|) \cong \mathcal{O}_X$ lui est isomorphe ; de plus, le principe d'identité assure, d'après un théorème qui précède, que l'espace topologique $|\mathcal{O}_X|$ est séparé. On rappelle enfin que les ouverts de $|\mathcal{O}_X|$ sont constitués de collections de germes d'une *unique* fonction holomorphe :

$$[U, g] := \{ \rho_x(g) \in \mathcal{O}_{X,x} : x \in U \},$$

¹ Ici, on rappelle que la notation $\rho_y(h)$ désigne le germe en y d'une fonction holomorphe h .

où $U \subset X$ est un ouvert quelconque et où $g \in \mathcal{O}_X(U)$ est une fonction holomorphe quelconque sur U . Le lemme suivant montre alors que l'on peut interpréter le prolongement analytique d'un germe de fonction holomorphe le long d'une courbe en termes de l'homéomorphisme local $\pi: |\mathcal{O}_X| \rightarrow X$ d'une manière élégante et naturelle.

Lemme (Réinterprétation du prolongement analytique). *Soit X une surface de Riemann, soient a et b deux points de X et soit $u: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue se déplaçant de a vers b . Alors un germe de fonction holomorphe $f_b \in \mathcal{O}_{X,b}$ est le prolongement analytique d'un germe de fonction holomorphe $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ le long de la courbe $u([0, 1])$ précisément si et seulement si il existe un relèvement continu :*

$$\begin{array}{ccc} & & |\mathcal{O}_X| \\ & \nearrow \widehat{u} & \downarrow \pi \\ [0, 1] & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

$\widehat{u}: [0, 1] \rightarrow |\mathcal{O}_X|$ de la courbe $u: [0, 1] \rightarrow X$ d'extrémités f_a et f_b :

$$\widehat{u}(0) = f_a \quad \text{et} \quad \widehat{u}(1) = f_b.$$

DÉMONSTRATION. Dans le sens direct tout d'abord, supposons que $f_b \in \mathcal{O}_{X,b}$ résulte de $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ par prolongement analytique le long de $u([0, 1])$, et soit donc $f_t \in \mathcal{O}_{X,u(t)}$ une famille de germes de fonctions holomorphes satisfaisant les conditions de la définition. On se convainc aisément (exercice mental) qu'il découle de la définition de la topologie de $|\mathcal{O}_X|$ et de la condition $f_t = \rho_{u(t)}(g_{t_1})$ pour tout $t \in T_{t_1}$ avec une même et unique fonction holomorphe $g_{t_1} \in \mathcal{O}(U_{t_1})$, que la correspondance $t \mapsto f_t$ représente une application *continue* de $[0, 1]$ à valeurs dans $|\mathcal{O}_X|$. Si donc l'on note :

$$\widehat{u}: [0, 1] \rightarrow |\mathcal{O}_X|$$

cette application continue, il est clair que \widehat{u} est un relèvement de u satisfaisant $\widehat{u}(0) = f_a$ et $\widehat{u}(1) = f_b$.

Réciproquement, s'il existe un relèvement *continu* $\widehat{u}: [0, 1] \rightarrow |\mathcal{O}_X|$ de $u: [0, 1] \rightarrow X$ d'extrémités $\widehat{u}(0) = f_a$ et $\widehat{u}(1) = f_b$, posons alors, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f_t := \widehat{u}(t) \in \mathcal{O}_{X,u(t)},$$

d'où clairement $f_0 = f_a$ et $f_1 = f_b$. Soit maintenant $t_1 \in [0, 1]$ quelconque et supposons que $[U_{t_1}, g_{t_1}]$ est un voisinage ouvert de $\widehat{u}(t_1)$ dans $|\mathcal{O}_X|$. Alors U_{t_1} est un voisinage ouvert de $u(t_1) = \pi \circ \widehat{u}(t_1)$ et *par continuité de \widehat{u}* , il existe un voisinage ouvert T_{t_1} de t_1 dans $[0, 1]$ tel que :

$$\widehat{u}(T_{t_1}) \subset [U_{t_1}, g_{t_1}].$$

Cette dernière inclusion implique $u(T_{t_1}) \subset U_{t_1}$ et aussi surtout :

$$f_t = \widehat{u}(t) = \rho_{u(t)}(g_{t_1})$$

pour tout $t \in T_{t_1}$ — mais c'est justement cette condition précise d'égalité locale des germes f_t au germe d'une même et unique fonction holomorphe g_{t_1} que le prolongement analytique requérait. \square

Grâce au fait que $|\mathcal{O}_X|$ est séparé, le théorème d'unicité des relèvements à source connexe peut être appliqué, et il découle alors du lemme que si le prolongement analytique d'un

germe de fonction le long d'une courbe existe, il est nécessairement unique. Une autre conséquence majeure de ce lemme est le :

Théorème de la monodromie. *Soit X une surface de Riemann qui est simplement connexe, soit un point $a \in X$ et soit $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germe de fonction holomorphe en a . Supposons que f_a admette un prolongement analytique le long de toute courbe continue issue de a . Alors il existe une unique fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(X)$ globalement définie sur X dont le germe en a redonne f_a , à savoir telle que : $\rho_a(f) = f_a$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in X$ et toute courbe continue $u: [0, 1] \rightarrow X$ allant de a vers x , soit $f_{u,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ le germe de fonction holomorphe en x obtenu par prolongement analytique de f_a le long de $u([0, 1])$. La surface de Riemann X étant connexe et simplement connexe, tout autre courbe continue $u': [0, 1] \rightarrow X$ allant de a vers x est automatiquement homotope à u . Or le théorème de relèvement des homotopies entre courbes vu précédemment assure la coïncidence des extrémités des deux courbes relevées \hat{u} et \hat{u}' à valeurs dans $|\mathcal{O}_X|$:

$$\hat{u}(1) = \hat{u}'(1),$$

et si l'on réinterprète cet énoncé en restant dans X sans parler de relèvement, on obtient la :

Proposition (Invariance du prolongement analytique par déformations homotopiques). *Soit X une surface de Riemann, soient a et b deux points de X , soient :*

$$u_0: [0, 1] \rightarrow X \quad \text{et} \quad u_1: [0, 1] \rightarrow X$$

deux courbes continues allant de a vers b qui sont homotopes entre elles, et soit u_s , $0 \leq s \leq 1$, une déformation continue de u_0 en u_1 . Soit aussi un germe de fonction holomorphe $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ et supposons qu'il admet un prolongement analytique $f_{u_s,t} \in \mathcal{O}_{X,u_s(t)}$ le long de chacune des courbes $u_s([0, 1])$. Alors tous les germes prolongés $f_{u_s,b} \in \mathcal{O}_{X,b}$ obtenus au point-extrémité b coïncident nécessairement les uns avec les autres. \square

Il découle donc de cette proposition que les germes obtenus :

$$f_{u,x} = f_{u',x} = f_{u'',x} = \dots$$

ne dépendent pas des courbes u, u', u'', \dots allant de a vers x , d'où l'existence d'un prolongement global $f \in \mathcal{O}(X)$ de $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$. L'unicité de f provient du principe d'identité et de la connexité de X . \square

Mais en général, lorsque le prolongement analytique d'un germe de fonction est possible le long de deux courbes continues ayant même point initial et même point final, les germes obtenus au point final ne coïncident pas nécessairement.

Donc si on considère tous les germes qui apparaissent par prolongement analytique le long de courbes quelconques en partant d'un germe fixé en un point, on peut malheureusement obtenir une fonction qui est multi-valuée. Heureusement, le premier théorème vraiment majeur de la théorie des surfaces de Riemann va consister à *construire* des surfaces de Riemann sur laquelle ces prolongement multi-valués vont se métamorphoser en de belles *fonctions² holomorphes mono-valuées*.

² Rappelons que d'après une définition de base de la théorie des ensembles, les *applications* et aussi les *fonctions* n'assignent qu'une seule valeur à tout élément donné dans l'ensemble-source.

Construction de prolongements analytiques maximaux. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soient \mathcal{O}_X et \mathcal{O}_Y leurs faisceaux respectifs de fonctions holomorphes. Supposons donné une application holomorphe $p: Y \rightarrow X$ non branchée, c'est-à-dire dont la différentielle (holomorphe) est partout non nulle, de telle sorte que p est localement biholomorphe. Pour tout point $y \in Y$, elle induit par composition des germes un isomorphisme :

$$p^*: \mathcal{O}_{X,p(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

$$f_{p(y)} \longmapsto \rho_y(f_{p(y)} \circ p)$$

Notons alors :

$$p_*: \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

l'inverse de p^* .

Définition. Soit X une surface de Riemann, soit a un point de X et soit $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germe de fonction holomorphe en a . Un quadruplet :

$$(Y, p, g, b)$$

est appelé un *prolongement analytique* du germe f_a lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Y est une surface de Riemann³ et $p: Y \rightarrow X$ est une application holomorphe non branchée, *i.e.* localement biholomorphe ;
- (ii) $g \in \mathcal{O}(Y)$ est une fonction holomorphe sur Y ;
- (iii) b est un point de Y au-dessus de a , *i.e.* avec $p(b) = a$, et l'on a :

$$p_*(\rho_b(g)) = f_a.$$

Définition. Un prolongement analytique (Y, p, g, b) est dit *maximal* s'il jouit de la propriété universelle suivante. Si (Z, q, h, c) est un autre prolongement analytique quelconque de f_a , alors il existe une application holomorphe $F: Z \rightarrow Y$ préservant les fibres, *i.e.* satisfaisant $p \circ F = q$, avec $F(c) = b$ telle que $F^*(g) := g \circ F = h$, de telle sorte que le diagramme complet suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Y, b & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\
 \swarrow F & & \nearrow h \\
 & Z, c & \\
 \searrow q & & \\
 X, a & &
 \end{array}$$

(Note: The diagram shows a commutative square with vertices Y, b , \mathbb{C} , Z, c , and X, a . Arrows are: $Y, b \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $Z, c \xrightarrow{h} \mathbb{C}$, $Y, b \xrightarrow{p} X, a$, $Z, c \xrightarrow{q} X, a$, $Y, b \xrightarrow{F} Z, c$, and $Z, c \xrightarrow{F^*} Y, b$ where $F^*(g) = h$.)

Lemme. À isomorphisme près, il existe un et un seul prolongement analytique maximal de tout germe $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$.

DÉMONSTRATION. C'est un raisonnement que nous avons déjà rencontré. Soient donc (Y_1, p_1, g_1, b_1) et (Y_2, p_2, g_2, b_2) deux prolongements analytiques maximaux de f_a . Alors il existe une application holomorphe $G_{12}: Y_1 \rightarrow Y_2$ préservant les fibres avec $G_{12}(y_1) = y_2$ telle que $g_2 \circ G_{12} = g_1$. De même, il existe une application holomorphe $G_{21}: Y_2 \rightarrow Y_1$ préservant les fibres avec $G_{21}(y_2) = y_1$ telle que $g_1 \circ G_{21} = g_2$. La composition $G_{21} \circ G_{12}$ est alors une auto-application holomorphe de Y_1 fixant y_1 , donc nécessairement égalé à

³ qui est implicitement connexe, par convention de définition des surfaces de Riemann.

Id_{Y_1} par unicité des relèvements à source connexe. De même, $G_{12} \circ G_{21} = \text{Id}_{Y_2}$, et donc l'application $G_{12}: Y_1 \rightarrow Y_2$ est un biholomorphisme. \square

Lemme. Soit X une surface de Riemann, soit $a \in X$, soit $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ et soit (Y, p, g, b) un prolongement analytique de f_a . Si $v: [0, 1] \rightarrow Y$ est une courbe quelconque avec $v(0) = b$ et $v(1) =: y$, alors le germe de fonction holomorphe :

$$f_{p(y)} := p_*(\rho_y(g)) \in \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

est un prolongement analytique de f_a le long de la courbe projetée $u := p \circ v$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons :

$$f_{u(t)} := p_*(\rho_{v(t)}(g)) \in \mathcal{O}_{X,p(v(t))} = \mathcal{O}_{X,u(t)}.$$

Alors $f_{u(0)} = f_a$ et $f_{u(1)} = f_{p(y)}$. Soit ensuite $t_1 \in [0, 1]$ quelconque. Puisque $p: Y \rightarrow X$ est un biholomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_{t_1} de $v(t_1)$ dans Y et un voisinage ouvert U_{t_1} de $p(v(t_1)) = u(t_1)$ dans X tels que $p|_{V_{t_1}}: V_{t_1} \rightarrow U_{t_1}$ est un biholomorphisme. Soit alors $\varphi: U_{t_1} \rightarrow V_{t_1}$ l'application inverse et soit :

$$h := \varphi^*(g|_{V_{t_1}}) = g|_{V_{t_1}} \circ \varphi \in \mathcal{O}(U_{t_1}),$$

de telle sorte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_{t_1}, v(t_1) & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & \nearrow h & \\ U_{t_1}, u(t_1) & & \end{array}$$

On a donc immédiatement par p_* -transfert de germes pour tout $y \in V_{t_1}$:

$$p_*(\rho_y(g)) = \rho_{p(y)}(h).$$

Par continuité de v , il existe un voisinage ouvert T_{t_1} de t_1 dans $[0, 1]$ tel que $v(T_{t_1}) \subset V_{t_1}$, d'où $u(T_{t_1}) \subset U_{t_1}$. Alors pour tout $t \in T_{t_1}$ on en déduit avec $y := v(t)$ que :

$$\rho_{u(t)}(h) = p_*(\rho_{v(t)}(g)) = f_{u(t)},$$

ce qui montre bien que $f_{u(1)}$ est un prolongement analytique du germe f_a le long de la courbe u . \square

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème d'existence d'un prolongement analytique maximal pour tout germe de fonction holomorphe défini sur une surface de Riemann quelconque. Il est important de noter que l'on demeure dans la catégorie des surfaces de Riemann, mais qu'en partant par exemple d'un domaine concret dans \mathbb{C} , on est la plupart du temps contraint de prolonger un germe donné à une surface de Riemann qui n'est pas un domaine de \mathbb{C} .

Théorème (Existence de prolongements analytiques maximaux). Soit X une surface de Riemann, par exemple un domaine quelconque de \mathbb{C} , soit un point $a \in X$ et soit $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germe quelconque de fonction holomorphe au point a . Alors il existe un unique prolongement analytique maximal (Y, p, g, b) de f_a .

DÉMONSTRATION. *Deus ex machina* : Soit Y la composante connexe (par arcs) de l'espace topologique des germes de fonctions holomorphes :

$$|\mathcal{O}_X| := \coprod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$$

qui contient le germe f_a , nous affirmons que c'est elle qui va convenir.

Soit aussi p la restriction à Y de la projection canonique $\pi: |\mathcal{O}_X| \rightarrow X$. Alors p est un homéomorphisme local, puisque π l'est. Dans cette circonstance, nous avons déjà vu que $p: Y \rightarrow X$ permet alors de remonter la structure de surface de Riemann pour X en une structure de Riemann pour Y . Avec cette structure, $p: Y \rightarrow X$ devient naturellement un biholomorphisme local.

Maintenant, définissons une fonction holomorphe $g: Y \rightarrow \mathbb{C}$ comme suit. Par définition, chaque point $\eta \in Y$ est un germe de fonction holomorphe sur X au point $p(\eta)$. Assignons alors la valeur complexe :

$$g(\eta) := \eta(p(\eta)) \in \mathbb{C}.$$

Les germes ayant des représentants holomorphes dans un voisinage ouvert assez petit, on vérifie que cette fonction g est holomorphe pour la structure de surface de Riemann de Y . Ensuite, on a naturellement :

$$p_*(\rho_\eta(g)) = \eta,$$

pour tout $\eta \in Y$. Ainsi, avec $b := f_a$, on voit que (Y, p, g, b) est un prolongement analytique de f_a .

Maintenant, il reste encore à établir que (Y, p, g, b) est un prolongement analytique maximal de f_a . Supposons donc que (Z, q, h, c) est un autre prolongement analytique de f_a et définissons une application $F: Z \rightarrow Y$ comme suit. Soit $\zeta \in Z$ et soit $x := q(\zeta) \in X$. Grâce au lemme qui précède, le germe de fonction holomorphe $q_*(\rho_\zeta(h)) \in \mathcal{O}_{X,x}$ provient, puisque Z est connexe (par arcs), du germe f_a par prolongement analytique le long d'une certaine courbe continue allant de a vers x . Mais à nouveau par connexité (par arcs) de Y et grâce au lemme de réinterprétation du prolongement analytique, Y consiste en tous les germes de fonctions holomorphes qui sont obtenus par prolongement analytique de f_a le long de courbes continues. Par conséquent, il existe exactement un $\eta \in Y$ tel que $q_*(\rho_\zeta(h)) = \eta$, et l'on peut donc poser $F(\zeta) := \eta$. Pour terminer, on laisse au lecteur le soin de vérifier que cette application $F: Z \rightarrow Y$ est holomorphe, préserve les fibres, et satisfait $F(c) = b$ ainsi que $F^*(g) = g \circ F = h$. La preuve du théorème est achevée. \square

Pour terminer ce chapitre, il importe de faire observer que le prolongement analytique des germes de fonctions méromorphes peut être établi de manière similaire en utilisant les mêmes techniques et les mêmes raisonnements que dans le cas holomorphe traité ci-dessus. Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des points de branchement, et c'est le chapitre suivant qui va s'en occuper dans le cas spécial des fonctions dites algébriques.

Exercices

Exercice 7.1. Soient X et Y deux surfaces de Riemann, soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement holomorphe non ramifié et soit $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit un point $b \in Y$, soit $a := p(b)$ et soit le germe de fonction holomorphe :

$$f_a := p_*(\rho_b(f)) \in \mathcal{O}_{X,a}.$$

Montrer que (Y, p, g, b) est un prolongement analytique maximal de f_a si et seulement si la condition suivante est satisfaite : Pour toute paire de points distincts $b_1, b_2 \in p^{-1}(a)$, les deux germes de fonctions holomorphes :

$$p_*(\rho_{b_1}(g)) \quad \text{et} \quad p_*(\rho_{b_2}(g))$$

sont distincts dans $\mathcal{O}_{X,a}$.

Exercice 7.1. Soit X une surface de Riemann et soit un point $a \in X$. On suppose qu'un germe donné de fonction holomorphe $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ admet un prolongement analytique le long de toute courbe continue dans X qui part de a . Si (Y, p, g, b) est le prolongement analytique maximal de f_a , montrer que $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement non ramifié.

8. Fonctions algébriques

L'un des premiers exemples de fonction multivaluée que l'on rencontre en analyse complexe à une variable est la racine carrée $w = \sqrt{z}$. C'est un cas particulier de *fonction algébrique*, i.e. de fonction $w = w(z)$ qui satisfait une équation algébrique $w^n - a_1(z)w^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n(z) = 0$, où les coefficients $a_\nu = a_\nu(z)$ sont des fonctions holomorphes ou méromorphes données sur un domaine de \mathbb{C} , ou plus généralement sur une surface de Riemann quelconque. Dans ce chapitre, nous présentons la construction des surfaces de Riemann de fonctions algébriques générales. Il appert que ces surfaces de Riemann sont des revêtements ramifiés dont le nombre de feuillet est égal au degré de l'équation algébrique concernée.

Fonctions symétriques élémentaires d'un revêtement holomorphe. Soient X et Y deux surfaces de Riemann, soit $\pi: Y \rightarrow X$ un revêtement holomorphe non ramifié et soit $f \in \mathcal{M}(Y)$ une fonction méromorphe quelconque sur Y . Chaque point $x \in X$ possède donc un voisinage ouvert U dont l'image inverse $\pi^{-1}(U)$ est réunion de n ouverts V_1, \dots, V_n disjoints deux à deux tels que chaque restriction $\pi|_{V_\nu}: V_\nu \rightarrow U$ est un biholomorphisme pour tout $\nu = 1, \dots, n$. Notons alors $\tau_\nu: U \rightarrow V_\nu$ les biholomorphismes inverses et introduisons les n fonctions méromorphes composées qui sont toutes définies dans U :

$$f_\nu := \tau_\nu^*(f) = f \circ \tau_\nu \quad (\nu = 1 \dots n).$$

En nous munissant d'une indéterminée auxiliaire T , considérons ensuite le produit formel :

$$\prod_{\nu=1}^n (T - f_\nu) = T^n - c_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n.$$

Il est clair que si nous introduisons les fonctions symétriques élémentaires formelles :

$$s_\nu(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\nu \leq n} x_{k_1} \cdots x_{k_\nu} \quad (\nu = 1 \dots n),$$

alors les coefficients c_ν qui apparaissent dans le développement ci-dessus s'expriment comme :

$$c_\nu = s_\nu(f_1, \dots, f_n),$$

et constituent donc des fonctions méromorphes dans U .

Or si l'on effectue la même construction au voisinage U' d'un autre point $x' \in X$, il est clair qu'on obtiendra exactement les mêmes fonctions c_1, \dots, c_n dans l'intersection $U \cap U'$, puisque ces fonctions sont justement symétriques par rapport aux permutations des feuillet du revêtement $\pi: Y \rightarrow X$. Par conséquent, ces n fonctions méromorphes locales se recollent pour constituer des fonctions méromorphes globales $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$. On les appelle alors les *fonctions symétriques élémentaires de f* relativement au revêtement $\pi: Y \rightarrow X$.

Maintenant dans un premier temps, énonçons et démontrons un résultat qui assure que les fonctions symétriques élémentaires d'une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$ peuvent

aussi être définies plus généralement lorsque l'application de revêtement $\pi: Y \rightarrow X$ possède des points de ramification.

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $\pi: Y \rightarrow X$ un revêtement holomorphe ramifié à un nombre fini $n \geq 1$ de feuillettes. Soit ensuite $A \subset X$ un sous-ensemble fermé discret qui contient toutes les valeurs critiques de π :

$$A \supset \pi(\text{Crit}(\pi)), \quad \text{où par définition : } \text{Crit}(\pi) := \{y \in Y : d_{\mathbb{C}}\pi_y = 0\},$$

soit son image inverse par π :

$$B := \pi^{-1}(A),$$

qui est un sous-ensemble fermé et discret de Y , de telle sorte que la restriction :

$$\pi|_{Y \setminus B}: Y \setminus B \longrightarrow X \setminus A$$

est un revêtement holomorphe non ramifié à n feuillettes. Soit enfin f une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur $Y \setminus B$ et soient :

$$c_1, \dots, c_n \in \mathcal{O}(X \setminus A) \quad (\text{resp. } \mathcal{M}(X \setminus A))$$

les fonctions symétriques élémentaires de f relativement au revêtement holomorphe non ramifié $\pi|_{Y \setminus B}: Y \setminus B \longrightarrow X \setminus A$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f peut être prolongée holomorphiquement (resp. méromorphiquement) à Y tout entier ;
- (ii) toutes les fonctions c_ν pour $\nu = 1, \dots, n$ peuvent être prolongées holomorphiquement (resp. méromorphiquement) à X .

DÉMONSTRATION. Soit donc un point quelconque $a \in A$ et soient b_1, \dots, b_m les pré-images de a . Soit (U, z) un voisinage de coordonnées relativement compact de a avec $z: U \rightarrow \mathbb{C}$, avec $z(a) = 0$ et avec $U \cap A = \{a\}$. Alors $V := \pi^{-1}(U)$ est un voisinage relativement compact de la réunion $\{b_1\} \cup \dots \cup \{b_m\}$.

(1) Traitons premièrement le cas où $f \in \mathcal{O}(Y \setminus B)$.

(i) \Rightarrow (ii) : Si f peut être prolongée holomorphiquement à travers tous les points b_μ , elle est alors trivialement bornée sur $V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$. Ceci implique que toutes les fonctions symétriques élémentaires $c_\nu(f)$ sont elles aussi bornées sur $U \setminus \{a\}$. Grâce au théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann, on en déduit qu'elles se prolongent bien holomorphiquement à travers a .

(ii) \Rightarrow (i) : Si toutes les fonctions c_ν peuvent être prolongées holomorphiquement à travers a , alors elles sont trivialement bornées sur $U \setminus \{a\}$. Mais nous affirmons que ceci implique que f est elle aussi bornée sur $V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$, car, si $y \in V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ est un point quelconque et si $x := \pi(y)$ est son projeté, $f(y)$ doit par construction satisfaire l'équation polynomiale :

$$f(y)^n - c_1(x) f(y)^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n(x) = 0,$$

et puisque le coefficient de $f(y)^n$ est égal à 1, on dispose de majorations élémentaires du type :

$$|f(y)| \leq 1 + \max_{x \in U} |c_1(x)| + \dots + \max_{x \in U} |c_n(x)|.$$

Le théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann, à nouveau, assure alors que f peut être prolongée holomorphiquement à travers chaque point b_μ .

(2) Traitons deuxièmement le cas où $f \in \mathcal{O}(Y \setminus B)$.

(i) \Rightarrow (ii) : Supposons que f peut être prolongée méromorphiquement à travers tous les points b_μ . La fonction $\varphi := \pi^*z = z \circ \pi \in \mathcal{O}(V)$ s'annule en tous les points b_μ . Donc pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, $\varphi^k f$ peut être prolongée holomorphiquement à travers tous les points b_μ . Or les fonctions symétriques élémentaires de $\varphi^k f$ ne sont autres que les $z^{k\nu} c_\nu$ pour $\nu = 1, \dots, n$ et puisqu'elles sont holomorphes, grâce à la première partie de la démonstration, elle peuvent être prolongées holomorphiquement à travers a . Ainsi, toutes les c_ν peuvent être prolongées méromorphiquement à travers a .

(ii) \Rightarrow (i) : Supposons enfin que toutes les c_ν peuvent être prolongées méromorphiquement à travers a . Avec la notation qui précède, pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, toutes les $z^{k\nu} c_\nu$ admettent des prolongements holomorphes à travers a . Donc en utilisant à nouveau la première partie de la démonstration, $\varphi^k f$ admet un prolongement holomorphe à travers tous les points b_μ . Ceci implique que f peut être prolongée méromorphiquement à travers tous les points b_μ et achève donc la démonstration. \square

Observons pour un usage ultérieur que cette démonstration n'utilise pas le fait que Y est connexe, et donc le théorème reste valide en supposant que Y est réunion disjointe d'un nombre fini de surfaces de Riemann (lesquelles sont toujours supposées connexes par définition).

Si $\pi: Y \rightarrow X$ est une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann X et Y , alors pour toute fonction méromorphe f sur X , la fonction composée $\pi^*f = f \circ \pi$ est une fonction méromorphe sur Y . Ainsi, l'application holomorphe non constante $\pi: Y \rightarrow X$ induit une application :

$$\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$

qui est un monomorphisme (morphisme injectif) de corps.

Théorème. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $\pi: Y \rightarrow X$ un revêtement holomorphe ramifié à un nombre fini $n \geq 1$ de feuillet. Si $f \in \mathcal{M}(Y)$ est une fonction méromorphe sur Y et si $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$ sont ses fonctions symétriques élémentaires (lesquelles existent d'après le théorème précédent), alors l'équation polynomiale suivante est satisfaite identiquement sur Y :

$$f^n - (\pi^*c_1) f^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} (\pi^*c_{n-1}) f + (-1)^n \pi^*c_n.$$

De plus, le monomorphisme de corps $\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ est une extension algébrique de corps de degré $\leq n$. Enfin, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(Y)$ et un point $x \in X$ dont les préimages $y_1, \dots, y_n \in Y$ sont telles que les valeurs $f(y_1), \dots, f(y_n)$ sont toutes distinctes deux à deux, alors l'extension de corps $\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ est de degré exactement égal¹ à n .

DÉMONSTRATION. L'existence de l'équation identiquement satisfaite :

$$f^n + \sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu (\pi^*c_\nu) f^{n-\nu} = 0$$

découle directement de la définition et de la construction des fonctions symétriques élémentaires de f .

Soit maintenant les corps $L := \mathcal{M}(Y)$ et $K := \pi^*\mathcal{M}(X)$, qui est un sous-corps de L . Grâce à l'équation polynomiale écrite à l'instant, on voit que chaque élément $f \in L$

¹ On verra ultérieurement que cette dernière assertion est en fait toujours satisfaite.

est algébrique sur K et que son polynôme minimal sur K est de degré $\leq n$. Soit $f_0 \in L$ un élément pour lequel le degré n_0 de ce polynôme minimal est maximal. Nous affirmons alors que :

$$L = K(f_0).$$

En effet, prenons un élément arbitraire $f \in L$ et considérons le surcorps $K(f_0, f) \supset K(f_0)$. Grâce au théorème de l'élément primitif, il existe un $g \in L$ tel que $K(f_0, f) = K(g)$. Mais par définition de n_0 , on doit avoir $\dim_K K(g) \leq n_0$. D'un autre côté, on a trivialement aussi :

$$\dim_K K(f_0, f) \geq \dim_K K(f_0) = n_0.$$

Ainsi donc, on en déduit que :

$$K(f_0) = K(f_0, f),$$

ce qui donne $f \in K(f_0)$, d'où $L = K(f_0)$ comme annoncé.

Pour terminer, si le degré du polynôme minimal de f sur K était égal à un entier $m < n$, alors f ne pourrait prendre qu'au plus m valeurs distinctes au-dessus de chaque point $x \in X$. \square

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit $A \subset X$ un sous-ensemble discret fermé, et soit $X' := X \setminus A$. Soit Y' une autre surface de Riemann et supposons qu'il existe un revêtement holomorphe propre et non ramifié :

$$\pi' : Y' \rightarrow X'.$$

Alors π' se prolonge comme revêtement holomorphe ramifié de X , à savoir : il existe une surface de Riemann Y , il existe une application holomorphe propre $\pi : Y \rightarrow X$ et il existe un biholomorphisme préservant les fibres :

$$Y \setminus \pi^{-1}(A) \xrightarrow{\sim} Y'.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout point $a \in A$, choisissons un voisinage de coordonnées (U_a, z_a) sur X avec $z_a(a) = 0$, avec $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$ pour $a \neq a'$ et tel que $z_a(U_a)$ est le disque unité dans \mathbb{C} . Notons alors :

$$U_a^* := U_a \setminus \{a\}.$$

Puisque l'application $\pi' : Y' \rightarrow X'$ est propre, l'image inverse $\pi'^{-1}(U_a^*)$ consiste en un nombre fini de composantes connexes $V_{a\nu}^*$, pour $\nu = 1, \dots, n(a)$ jusqu'à un certain entier $n(a)$. Pour chaque ν , l'application $\pi'|_{V_{a\nu}^*} : V_{a\nu}^* \rightarrow U_a^*$ forme un revêtement holomorphe non ramifié. Notons alors $k_{a\nu}$ son nombre de feuillettes. Grâce à un théorème qui précède, il existe, pour tout ν , une application biholomorphe :

$$\zeta_{a\nu} : V_{a\nu}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$$

de $V_{a\nu}^*$ sur le disque unité épointé $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_{a\nu}^* & \xrightarrow{\zeta_{a\nu}} & \mathbb{D}^* \\ \pi' \downarrow & & \downarrow z \mapsto z^{k_{a\nu}} \\ U_a^* & \xrightarrow{z_a} & \mathbb{D}^* \end{array}$$

Maintenant, nous introduisons des « points idéaux » $p_{a\nu}$, $a \in A$, $\nu = 1, \dots, n(a)$, i.e. des points distincts deux à deux appartenant à un certain ensemble qui est disjoint de Y' . Alors sur la réunion :

$$Y := Y' \cup \{p_{a\nu} : a \in A, \nu = 1, \dots, n(a)\},$$

il existe précisément une et une seule topologie qui jouit des propriétés suivantes. Si W_i , $i \in I$, est une base de voisinages de a dans X , alors :

$$\{p_{a\nu}\} \cup (\pi'^{-1}(W_i) \cap V_{a\nu}^*) \quad (i \in I)$$

forme une base de voisinages de $p_{a\nu}$, tandis que sur Y' , on retrouve la topologie de Y' . Ceci fait de Y un espace topologique séparé. On définit ensuite $\pi: Y \rightarrow X$ par $\pi(y) = \pi'(y)$ lorsque $y \in Y'$ et par $\pi(p_{a\nu}) = a$. Alors, comme on s'en convainc aisément, l'application π ainsi prolongée est elle aussi propre comme l'était π' .

Afin de faire de Y une surface de Riemann, on ajoute aux cartes de la structure complexe de Y' les cartes suivantes. Posons $V_{a\nu} := V_{a\nu}^* \cup \{p_{a\nu}\}$ et soit :

$$\zeta_{a\nu}: V_{a\nu} \longrightarrow \mathbb{D}$$

le prolongement de l'application vue à l'instant :

$$\zeta_{a\nu}: V_{a\nu} \longrightarrow \mathbb{D}$$

qui est défini en posant naturellement $\zeta_{a\nu}(p_{a\nu}) := 0$. Puisque cette dernière application est biholomorphe pour la structure complexe de Y' , ces nouvelles cartes $\zeta_{a\nu}: V_{a\nu} \rightarrow \mathbb{D}$ sont holomorphiquement compatibles avec les cartes de la structure complexe de Y' . L'application $\pi: Y \rightarrow X$ est donc holomorphe. Puisque l'on a $Y \setminus \pi^{-1}(A) = Y'$ par construction, on peut tout simplement prendre l'identité comme biholomorphisme préservant les fibres $Y \setminus \pi^{-1}(A) \rightarrow Y'$. Ceci montre bien l'existence d'un prolongement analytique du revêtement original $\pi': Y' \rightarrow X'$. \square

Le théorème suivant montre que le prolongement du revêtement dont l'existence vient d'être établie est déterminé de manière unique à isomorphisme près.

Théorème. Soient X , Y et Z trois surfaces de Riemann et soient $\pi: Y \rightarrow X$ et $\tau: Z \rightarrow X$ deux revêtements holomorphes propres éventuellement ramifiés. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble fermé discret qui contient les valeurs critiques à la fois de π et de τ :

$$A \supset \pi(\text{Crit}(\pi)) \quad \text{et} \quad A \supset \tau(\text{Crit}(\tau)),$$

de telle sorte que si l'on pose :

$$X' := X \setminus A \quad \text{puis} \quad Y' := \pi^{-1}(X') \quad \text{et} \quad Z' := \tau^{-1}(X'),$$

les deux restrictions $\pi|_{Y'}: Y' \rightarrow X'$ et $\tau|_{Z'}: Z' \rightarrow X'$ forment des revêtements purs, i.e. non ramifiés. Alors toute application biholomorphe $\sigma': Y' \rightarrow Z'$ préservant les fibres :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\sigma'} & Z' \\ & \searrow \pi & \swarrow \tau \\ & X & \end{array}$$

i.e. satisfaisant $\tau \circ \sigma' = \pi$, peut être prolongée comme application biholomorphe $\sigma: Y \rightarrow Z$ préservant les fibres.

En particulier (corollaire immédiat), tout automorphisme de revêtement pur $\sigma' \in \text{Aut}(Y' \xrightarrow{\pi} X')$ peut être prolongé comme automorphisme de revêtement $\sigma \in \text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X)$.

DÉMONSTRATION. Soit un point exceptionnel quelconque $a \in A$ et soit (U, z) une coordonnée complexe locale définie dans un voisinage ouvert U de a dans X telle que l'application $z: U \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait $z(a) = 0$ et telle que $z(U) = \mathbb{D}$ est le disque unité dans \mathbb{C} . Posons $U^* := U \setminus \{a\}$. Par discrétion de A , on peut supposer que U est assez petit pour que les deux applications π et τ ne possèdent aucun point de branchement au-dessus de U^* . Soit maintenant V_1, \dots, V_n les composantes connexes de $\pi^{-1}(U)$, et soient W_1, \dots, W_m celles de $\tau^{-1}(U)$. Si l'on pose pour $\nu = 1, \dots, n$ et pour $\mu = 1, \dots, m$:

$$V_\nu^* := V_\nu \setminus \pi^{-1}(a) \quad \text{et} \quad W_\mu^* := W_\mu \setminus \tau^{-1}(a),$$

ces V_ν^* et ces W_μ^* sont les composantes connexes de $\pi^{-1}(U^*)$ et (respectivement) de $\tau^{-1}(U^*)$.

Ensuite, puisque le biholomorphisme σ' préserve les fibres, sa restriction :

$$\sigma' \Big|_{\pi^{-1}(U^*)}: \pi^{-1}(U^*) \longrightarrow \tau^{-1}(U^*)$$

est nécessairement aussi biholomorphe, d'où $n = m$, et on peut renuméroter les composantes de telle sorte que $\sigma'(V_\nu^*) = W_\nu^*$. Puisque U^* est biholomorphe au disque unité épointé \mathbb{D}^* , un théorème vu précédemment a déjà établi pour nos besoins présents que chacun des $2n$ revêtements finis :

$$\pi \Big|_{V_\nu^*}: V_\nu^* \longrightarrow U^* \quad \text{et} \quad \tau \Big|_{W_\nu^*}: W_\nu^* \longrightarrow U^* \\ (\nu = 1 \dots n)$$

est équivalent à une certaine puissance de z de \mathbb{D}^* dans \mathbb{D}^* , et donc pour chaque $\nu = 1, \dots, n$, $V_\nu \cap \pi^{-1}(a)$ consiste en un seul point, disons b_ν , et $W_\nu \cap \tau^{-1}(a)$ consiste aussi en un seul point, disons c_ν . Il en découle que la restriction de σ' en question $\sigma' \Big|_{\pi^{-1}(U^*)}: \pi^{-1}(U^*) \longrightarrow \tau^{-1}(U^*)$ peut être prolongée en une application bijective continue :

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow \tau^{-1}(U)$$

qui assigne tout simplement le point c_ν au point b_ν , pour $\nu = 1, \dots, n$. Puisque les restrictions $\pi \Big|_{V_\nu}: V_\nu \rightarrow U$ et $\tau \Big|_{W_\nu}: W_\nu \rightarrow U$ sont des applications propres, le prolongement est un homéomorphisme, et le théorème d'élimination des singularités bornées de Riemann permet de conclure qu'il établit un biholomorphisme. L'application biholomorphe recherchée $\sigma: Y \rightarrow Z$ s'obtient en appliquant cette construction au voisinage de chaque point $a \in A$. \square

Le théorème qui précède montre que la définition suivante qui généralise la notion de revêtement galoisien au cas des revêtements ramifiés a un sens.

Définition. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $\pi: Y \rightarrow X$ un revêtement holomorphe éventuellement ramifié. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble discret fermée qui contient les valeurs critiques $\pi(\text{Crit}(\pi))$ de π . On pose $X' := X \setminus A$ et $Y' := \pi^{-1}(X')$. Alors le revêtement $Y \rightarrow X$ est dit *galoisien* si le revêtement restreint (*pur, non ramifié*) $Y' \rightarrow X'$ est galoisien, au sens d'une définition qui précède, à savoir si $\text{Aut}(Y' \xrightarrow{\pi} X')$ est transitif sur les fibres de π .

Avant de pouvoir énoncer le théorème principal de ce chapitre, nous devons encore effectuer quelques préparatifs qui utilisent de l'analyse complexe à une variable.

Lemme. Soient c_1, \dots, c_n des fonctions holomorphes sur le disque :

$$\mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

pour un certain rayon $R > 0$. On suppose que $w_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro simple du polynôme :

$$T^n - c_1(0)T^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n(0) \in \mathbb{C}[T],$$

où T est une indéterminée abstraite. Alors il existe un rayon $r > 0$ éventuellement plus petit, $0 < r \leq R$, et il existe une fonction φ holomorphe sur le disque \mathbb{D}_r avec $\varphi(0) = w_0$ qui est solution de l'équation polynomiale associée :

$$\varphi^n - c_1 \varphi^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n = 0,$$

sur tout le sous-disque ouvert \mathbb{D}_r .

DÉMONSTRATION. Pour $z \in \mathbb{D}_R$ et pour $w \in \mathbb{C}$, posons :

$$F(z, w) := w^n - c_1(z)w^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n(z).$$

Par isolation des zéros, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que la fonction holomorphe (polynomiale !) $w \mapsto F(0, w)$ possède w_0 comme zéro unique dans le disque $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$, donc n'a aucun zéro sur le cercle $\{|w - w_0| = \varepsilon\}$. Ensuite, par continuité de F , il existe un rayon $r > 0$ avec $r \leq R$ tel que la fonction F n'a aucun zéro dans l'ensemble :

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < r, |w - w_0| = \varepsilon\}$$

qui est produit d'un disque dans l'espace des z et du même cercle dans l'espace des w . D'après un théorème connu de l'analyse complexe, pour $z \in \mathbb{D}_r$ fixé, l'intégrale :

$$\eta(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw,$$

où $F_w := \frac{\partial F}{\partial w}$, compte le (est égale au) nombre de zéros que la fonction holomorphe $w \mapsto F(z, w)$ possède dans le disque de rayon ε et de centre w_0 . Puisque $\eta(0) = 1$ et puisque η dépend continûment de z (c'est le cas de son intégrande), sa valeur reste nécessairement égale à $\eta(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}_r$. Ensuite, grâce au théorème des résidus, ce zéro unique de $w \mapsto F(z, w)$ dans le disque $|w - w_0| < \varepsilon$ est égal à l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} w \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw =: \varphi(z).$$

Mais puisque cette intégrale dépend visiblement d'une manière holomorphe par rapport à z , il est clair que la fonction $z \mapsto \varphi(z)$ est holomorphe dans le sous-disque \mathbb{D}_r , tandis que l'on a bien évidemment par construction :

$$F(z, \varphi(z)) \equiv 0,$$

pour tout $z \in \mathbb{D}_r$. □

Corollaire. Soit $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en un point $x \in X$ d'une surface de Riemann X , et soit :

$$P(T) := T^n - c_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n \in \mathcal{O}_{X,x}[T]$$

un polynôme monique de degré $n \geq 1$ en une indéterminée T à coefficients holomorphes germiques. Si, au point central x , le polynôme à coefficients constants :

$$T^n - c_1(x)T^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n(x)$$

possède n zéros w_1, \dots, w_n qui sont distincts deux à deux, alors il existe n germes de fonctions holomorphes $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ avec $\varphi_\nu(x) = w_\nu$ qui permettent de factoriser complètement :

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^n (T - \varphi_\nu). \quad \square$$

Autrement dit, localement dans un petit voisinage du point de référence x , les racines de $P(T)$ sont toutes des fonctions holomorphes d'un point z quelconque près de x . Bien entendu, les valeurs $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ restent distinctes deux à deux pour z dans un voisinage petit de x .

Nous sommes maintenant enfin parvenus au point où nous pouvons énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre, lequel construit une surface de Riemann et une fonction méromorphe sur cette surface de Riemann qui est solution d'une équation polynomiale quelconque à coefficients méromorphes définis sur une surface de Riemann quelconque prise au départ.

Théorème. Soit X une surface de Riemann quelconque et soit :

$$P(T) := T^n - c_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

un polynôme de degré $n \geq 1$ quelconque à coefficients méromorphes arbitraires sur X qui est irréductible. Alors il existe toujours une surface de Riemann Y accompagnée d'un revêtement holomorphe ramifié propre à n feuillets $\pi : Y \rightarrow X$ sur laquelle il existe aussi une fonction méromorphe $F \in \mathcal{M}(Y)$ telle que $(\pi^* P)(F) = 0$, à savoir plus explicitement :

$$F^n(y) - c_1(\pi(y)) F^{n-1}(y) + \cdots + (-1)^n c_n(\pi(y)) = 0,$$

pour tout $y \in Y$.

De plus, le triplet (Y, π, F) est déterminé de manière unique au sens suivant. Si (Z, τ, G) possède aussi les mêmes propriétés que (Y, π, F) , alors il existe exactement une et une seule application biholomorphe $\sigma : Z \rightarrow Y$ préservant les fibres, i.e. satisfaisant $\pi \circ \sigma = \tau$, telle que $G = F \circ \sigma$.

Autrement dit, l'existence de fonctions méromorphes permet de produire énormément de nouvelles surfaces de Riemann et de fonctions méromorphes dessus. Le cas classique intervient lorsque $X = \mathbb{P}^1$ est la sphère de Riemann, et l'on sait alors que les coefficients méromorphes $c_\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ sont nécessairement des fractions rationnelles (quotients de polynômes). Observons aussi que puisque \mathbb{P}^1 est compact et puisque l'application ainsi construite $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ est automatiquement propre (car le nombre de ses feuillets est fini), Y est alors toujours nécessairement compacte.

DÉMONSTRATION. Existence du triplet (Y, π, F) . Soit $\Delta \in \mathcal{M}(X)$ le discriminant du polynôme $P(T)$. C'est un certain polynôme formel en les coefficients formels de P qu'il n'est pas utile de connaître explicitement pour raisonner ici. Ce discriminant, en tant que fonction méromorphe sur X , ne peut pas s'annuler identiquement, car sinon, P serait réductible, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, il existe un sous-ensemble fermé discret $A \subset X$ tel qu'en chaque point $x \in X' := X \setminus A$, le discriminant $\Delta(x) \neq 0$ ne

s'annule pas, et de plus, quitte à élargir A , tel que les fonctions c_1, \dots, c_n sont *holomorphes* (sans pôles) au voisinage de x . Donc pour tout tel $x \in X'$, le polynôme à coefficients constants :

$$T^n - c_1(x)T^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

possède n racines distinctes deux à deux.

Maintenant, nous allons utiliser à nouveau l'espace topologique :

$$|\mathcal{O}_X| \equiv \text{Germes}(\mathcal{O}_X)$$

associé au faisceau \mathcal{O}_X des germes de fonctions holomorphes sur X . *Deus ex machina* : Introduisons :

$$Y' \subset |\mathcal{O}_X|$$

l'ensemble de tous les germes de fonctions holomorphes $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ en des points $x \in X'$ qui satisfont l'équation $P(f_x) \equiv 0$ identiquement dans un petit voisinage de x , et soit :

$$\pi' : Y' \rightarrow X'$$

la projection canonique, restriction à Y' de la projection canonique $|\mathcal{O}_X| \rightarrow X$. Grâce au corollaire qui précède, pour tout point $x \in X'$, il existe un voisinage ouvert $U \subset X'$ de x dans X' et il existe des fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ qui factorisent :

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^n (T - f_\nu)$$

sur U . Il découle clairement de cette factorisation que l'on a :

$$\pi'^{-1}(U) = \bigcup_{\nu=1}^n [U, f_\nu].$$

Or puisque les valeurs des f_ν sont distinctes deux à deux, les ouverts $[U, f_\nu]$ de $|\mathcal{O}_X|$ sont disjoints deux à deux et de plus, les restrictions :

$$\pi'|_{[U, f_\nu]} : [U, f_\nu] \longrightarrow U$$

sont des homéomorphismes, pour tout $\nu = 1, \dots, n$. Ceci montre que $Y' \rightarrow X'$ est un revêtement (pur). On sait alors grâce à un théorème qui précède que l'on peut donc munir Y' d'une structure complexe en « tirant en arrière » la structure complexe de X *via* les inverses locaux de ce revêtement, puisque ces derniers sont des homéomorphismes. Enfin, on vérifie (exercice) que π' est propre.

Or Y' n'est pas forcément connexe en général. Toutefois, les composantes connexes de Y' le sont, donc ce sont des surfaces de Riemann, et ces dernières constituent chacune aussi des revêtements au-dessus de X' .

Soit maintenant $F : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ l'application continue définie par :

$$F'(f_x) := f_x(\pi'(f_x)) = f_x(x),$$

pour tout germe $f_x \in Y'$ en un point quelconque $x \in X'$. Les représentants des germes étant définis au moins dans de petits voisinages, on se convainc aisément que cette application F' est en fait holomorphe, et de plus, il est clair par définition de Y' que l'on a :

$$F'(y) - c_1(\pi'(y)) F'(y)^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n(\pi'(y)) \equiv 0,$$

identiquement pour tout $y \in Y'$. Puisque le revêtement pur $\pi': Y' \rightarrow X'$ est propre, les deux théorèmes qui précèdent assurent qu'il peut être prolongé en un revêtement holomorphe ramifié propre $\pi: Y \rightarrow X$, unique à isomorphisme près, dans lequel Y' s'identifie naturellement à $\pi^{-1}(X')$. Comme les coefficients méromorphes ci-dessus $c_\nu(\pi'(y)) \in \mathcal{M}(X')$ proviennent de fonctions méromorphes $c_\nu \in \mathcal{M}(X)$ définies partout, le premier théorème du chapitre présent assure alors que la fonction holomorphe $F': Y' \rightarrow \mathbb{C}$ peut être prolongée de manière unique en une fonction méromorphe $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ qui conserve la relation polynomiale :

$$F^n(y) - c_1(\pi(y)) F^{n-1}(y) + \cdots + (-1)^n c_n(\pi(y)) = 0$$

pour tout $y \in Y$.

Enfin, pour terminer la partie « existence » de cette démonstration, il reste à établir que Y est une surface de Riemann, à savoir que Y est connexe. Supposons par l'absurde que tel ne soit pas le cas. Alors Y serait constituée d'un nombre fini de composantes connexes Y_1, \dots, Y_k et les restrictions $\pi|_{Y_i}: Y_i \rightarrow X$ seraient des revêtements holomorphes propres à certain nombre n_i de feuillets, avec bien sûr $n_1 + \cdots + n_k = n$. Mais en utilisant les fonctions symétriques élémentaires de chaque restriction $F|_{Y_i}$, on obtiendrait k polynômes $P_i(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ de degré n_i tels que :

$$P(T) = P_1(T) \cdots P_k(T).$$

Or ceci contredirait manifestement l'hypothèse effectuée que $P(T)$ soit irréductible.

Unicité à isomorphisme près du triplet (Y, π, F) . Supposons donc que (Z, τ, G) soit une autre fonction algébrique définie par le polynôme $P(T)$. Soit $B \subset Z$ la réunion des pôles de G et des points de branchement de τ . Posons ensuite $A' := \tau(B)$ puis, en réutilisant le X' de la démonstration d'existence :

$$X'' := X' \setminus A', \quad Y'' := \pi^{-1}(X''), \quad Z'' := \tau^{-1}(X'').$$

Définissons une application préservant les fibres $\sigma'': Z'' \rightarrow Y''$ de la manière suivante. Soit $z \in Z''$, soit $x := \tau(z)$, et soit $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ le germe de fonction holomorphe défini par $f_x := \tau_*(G_z)$. On a donc $P(f_x) = 0$. En examinant la construction de Y' effectuée il y a quelques instants, on voit que f_x est aussi un point de Y' au-dessus de x , et donc $f_x \in Y''$. Assignons alors :

$$\sigma''(z) := f_x.$$

D'après cette définition, il suit que σ'' est continu. Puisque σ'' préserve visiblement les fibres, elle est nécessairement holomorphe. De plus, σ'' est propre, puisque $\pi|_{Y''}: Y'' \rightarrow X''$ est continue et puisque $\tau|_{Z''}: Z'' \rightarrow X''$ est propre. Donc σ'' est surjective. Mais comme les deux revêtements $Y'' \rightarrow X''$ et $Z'' \rightarrow X''$ ont le même nombre de feuillets, nécessairement $\sigma'': Z'' \rightarrow Y''$ est biholomorphe. De plus, la définition de σ'' donne :

$$G|_{Z''} = (F|_{Y''}) \circ \sigma''.$$

Ensuite, grâce à un théorème qui précède, σ'' peut être prolongée comme une application biholomorphe $\sigma: Z \rightarrow Y$ préservant les fibres pour laquelle on a alors :

$$G = F \circ \sigma.$$

En fait, une telle application σ est déterminée de manière unique par cette propriété $G = F \circ \sigma$. Sinon, il existerait un automorphisme de revêtement $\alpha: Y \rightarrow Y$ distinct de l'identité

tel que $F \circ \alpha = F$. Mais cela n'est pas possible, puisque F prend des valeurs distinctes sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ de tout point $x \in X'$. \square

Corollaire. *Dans le contexte du théorème principal ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{M}(Y) = \pi^* \mathcal{M}(X)[F].$$

DÉMONSTRATION. Ceci découle (exercice) d'un examen des premiers paragraphes du chapitre actuel. \square

Exemple fondamental. Soit :

$$f(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$$

un polynôme scindé dont les racines a_1, \dots, a_n sont distinctes deux à deux. On considère f comme une fonction méromorphe définie sur la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 . Le polynôme quadratique :

$$P(T) := T^2 - f$$

est irréductible sur $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$, en appliquant le théorème principal précédent, il permet de définir une fonction holomorphe qui est habituellement noté $\sqrt{f(z)}$. Voyons cependant plus précisément ce qu'il en est dans ce cas intéressant par son aspect concret.

La surface de Riemann associée $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ peut être décrite comme suit en examinant ce que donne la construction générale. Soit :

$$A := \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{\infty\},$$

et posons :

$$X' := \mathbb{P}^1 \setminus A \quad \text{et} \quad Y' := \pi^{-1}(X').$$

Alors $\pi: Y' \rightarrow X'$ est un revêtement holomorphe non ramifié à deux feuillets. Donc tout germe de fonction holomorphe $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ en un point $x \in X'$ tel que $(g_x)^2 = \rho_x(f)$ peut être prolongé analytiquement le long de toute courbe continue tracée dans X' . Étudions maintenant le revêtement au-dessus de points qui appartiennent à l'ensemble exceptionnel A .

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, choisissons un rayon $r_j > 0$ suffisamment petit pour qu'aucun autre point de A ne se trouve dans le disque ouvert :

$$U_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < r_j\}.$$

Puisque la fonction $f_j(z) := \prod_{k \neq j} (z - a_k)$ n'a aucun zéro dans U_j , et puisque U_j est simplement connexe, il existe une fonction holomorphe $g_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g_j^2 = f_j$. On peut donc écrire :

$$f(z) = (z - a_j) g_j(z)^2,$$

pour $z \in U_j$. Ensuite, soit $r \in \mathbb{R}$ avec $0 < r < r_j$, soit $\theta \in \mathbb{R}$, et soit $\zeta = a_j + r e^{i\theta}$ un point quelconque sur le cercle intermédiaire correspondant. Puisque $f(\zeta) \neq 0$, il existe un germe de fonction holomorphe $g_\zeta \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1, \zeta}$ en ζ tel que $g_\zeta^2 = \rho_\zeta(f) = f_\zeta$, c'est-à-dire dont la valeur en ζ vaut :

$$g_\zeta(\zeta) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} g_j(\zeta).$$

Si l'on prolonge analytiquement ce germe de fonction holomorphe le long du cercle :

$$\{a_j + r e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

on obtient naturellement après un tour la valeur *opposée* du germe initial, puisque $e^{i2\pi/2} = -1$. Posons $U_j^* := U_j \setminus \{a_j\}$ et $V_j^* := \pi^{-1}(U_j^*)$. Alors nous affirmons que la restriction

$\pi|_{V_j^*} : V_j^* \rightarrow U_j^*$ est un revêtement *connexe* à deux feuillets, qui est alors équivalent à $z \mapsto z^2$ de \mathbb{D}^* dans \mathbb{D}^* d'après un théorème qui précède. Supposons un moment par l'absurde que V_j^* ne soit pas connexe. Alors $\pi|_{V_j^*} : V_j^* \rightarrow U_j^*$ se décomposerait en deux revêtements à un seul feuillet, ce qui forcerait le prolongement analytique du germe g_ζ ci-dessus à retrouver sa valeur au bout d'un seul tour — contradiction. En conclusion, la surface de Riemann Y possède exactement un seul point au-dessus de chaque a_j .

Il reste à étudier ce qui se passe dans un voisinage du point à l'infini $\infty \in \mathbb{P}^1$. Choisissons donc un grand rayon $r > \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ et posons :

$$U^* := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}.$$

Évidemment, $U := U^* \cup \{\infty\}$ forme alors un voisinage ouvert du point ∞ dans \mathbb{P}^1 qui est biholomorphe à un disque ouvert, et qui ne contient pas d'autres points de l'ensemble exceptionnel A . Sur U , on peut écrire $f = z^n F$, où F est une fonction holomorphe n'ayant pas de zéros sur U . Distinguons à présent deux cas :

(i) *n est impair*. Alors il existe une fonction g méromorphe sur U telle que :

$$f(z) = z g(z)^2.$$

(ii) *n est pair*. Alors il existe une fonction méromorphe g sur U telle que :

$$f(z) = g(z)^2.$$

Soit maintenant $V^* := \pi^{-1}(U^*)$. On montre en raisonnant comme cela a été fait autour d'un point a_j quelconque à distance finie que dans le cas (i), $\pi|_{V^*} : V^* \rightarrow U^*$ est un revêtement connexe à deux feuillets, et que Y possède exactement un point au-dessus de ∞ . Mais dans le cas (ii), $\pi|_{V^*} : V^* \rightarrow U^*$ se décompose en deux revêtements connexes à un seul feuillet, et donc, lorsque n est pair, Y possède deux points au-dessus de ∞ . \square

Extensions de corps et revêtements. Si $\pi : Y \rightarrow X$ est un revêtement ramifié entre deux surfaces de Riemann X et Y , alors nous affirmons que le groupe $\text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X)$ de ses automorphismes admet une représentation dans le groupe des automorphismes du corps $\mathcal{M}(Y)$ des fonctions méromorphes sur Y . En effet, pour $\sigma \in \text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X)$, posons :

$$\sigma f := f \circ \sigma^{-1}.$$

Il est clair que la correspondance $f \mapsto \sigma f$ constitue un automorphisme de $\mathcal{M}(Y)$. Vérifions à présent que cette application :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(Y)) \\ \sigma &\longmapsto (f \mapsto f \circ \sigma^{-1}) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupe. En effet, si σ, τ sont deux automorphismes du revêtement $\pi : Y \rightarrow X$, alors pour toute fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$, on calcule :

$$(\sigma\tau) f = f \circ (\sigma\tau)^{-1} = f \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \sigma(f \circ \tau^{-1}) = \sigma(\tau f),$$

d'où l'assertion. Observons par ailleurs que chaque automorphisme $f \mapsto f \circ \sigma^{-1}$ laisse invariante les fonctions du sous-corps :

$$\pi^* \mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(Y),$$

et donc forme un élément du groupe de Galois (algébrique) :

$$\text{Aut}(\mathcal{M}(Y)/\pi^* \mathcal{M}(X)).$$

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit :

$$K := \mathcal{M}(X)$$

son corps de fonctions méromorphes, et soit :

$$P(T) \in K[T]$$

un polynôme monique irréductible de degré un entier $n \geq 1$. Soit ensuite (Y, π, F) la fonction algébrique construite dans le théorème précédent qui est associée à X et à $P(T)$, et soit :

$$L := \mathcal{M}(Y) = \pi^* \mathcal{M}(X)[F]$$

le corps des fonctions méromorphes de Y . Au moyen du monomorphisme de composition $\pi^*: K \rightarrow L$, le corps K peut être considéré comme un sous-corps de L . Alors $K \rightarrow L$ est une extension de corps de degré égal à n et :

$$L \cong K[T]/(P(T)).$$

De plus, chaque automorphisme de revêtement $\sigma: Y \rightarrow Y$ induit un automorphisme $f \mapsto f \circ \sigma^{-1}$ de L laissant K fixé point par point, et l'application ainsi définie :

$$\text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X) \longrightarrow \text{Aut}(L/K)$$

est un isomorphisme de groupes. Enfin, le revêtement $Y \rightarrow X$ est galoisien si et seulement si l'extension de corps $K \rightarrow L$ est galoisienne.

DÉMONSTRATION. Le fait que $K \rightarrow L$ soit une extension de corps de degré n a déjà été vu (dernière partie du deuxième théorème de ce chapitre), puisque P est irréductible. Puisque $P(F) = 0$, on dispose d'un homomorphisme naturel standard :

$$K[T]/(P(T)) \longrightarrow K[F] = L.$$

Mais comme ces deux corps sont de degré n sur K , cet homomorphisme doit nécessairement être un isomorphisme.

L'application $\text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X) \longrightarrow \text{Aut}(L/K)$ est injective, parce que $\sigma F \neq F$ pour tout automorphisme de revêtement σ qui n'est pas l'identité. Nous affirmons que cette application est aussi surjective. En effet, soit $\alpha \in \text{Aut}(L/K)$. Alors $(Y, \pi, \alpha F)$ est aussi une fonction algébrique définie par le polynôme $P(T)$. Donc grâce à la partie « unicité » du théorème principal de ce chapitre, il existe un automorphisme de revêtement $\tau \in \text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X)$ tel que $\alpha F = \tau^* F$. En prenant alors $\sigma := \tau^{-1}$, on voit que :

$$\sigma F = F \circ \sigma^{-1} = F \circ \tau = \tau^* F = \alpha F.$$

Donc puisque L est engendré par F sur K , l'automorphisme $f \mapsto \sigma f$ de L coïncide nécessairement avec α .

La dernière phrase du théorème découle du fait que le revêtement $\pi: Y \rightarrow X$ est galoisien précisément lorsque $\text{Aut}(Y \xrightarrow{\pi} X)$ contient n éléments distincts, et de même, l'extension de corps $K \rightarrow L$ est galoisienne précisément lorsque $\text{Aut}(L/K)$ contient n éléments distincts. \square

Développements de Puiseux. Soit $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ le corps de toutes les séries de Laurent dont la partie principale est finie :

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c_{\nu} \in \mathbb{C},$$

et qui convergent (uniformément sur les compacts) dans un certain disque ouvert épointé $\{0 < |z| < r\}$, où $r > 0$ peut dépendre de la série φ . Naturellement, $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ est isomorphe au germe à l'origine $\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}$ du faisceau des fonctions méromorphes $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ sur \mathbb{C} , et $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ s'identifie aussi au corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}\{z\}$ des séries entières convergentes à l'origine.

Considérons à présent un polynôme irréductible :

$$F(z, w) = w^n - a_1(z) w^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(z) \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$$

de degré n sur le corps $\mathbb{C}\{\{z\}\}$. Il va de soi qu'il existe un rayon $r > 0$ suffisamment petit pour que tous les coefficients $a_\nu(z)$ soient holomorphes dans le disque :

$$\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\},$$

et ainsi, F peut aussi être considéré comme un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{D}_r)[w]$. Il est clair que F est toujours irréductible sur le corps $\mathcal{M}(\mathbb{D}_r)$. Maintenant, supposons que r a encore été choisi assez petit afin que, pour tout $a \in \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$, le polynôme :

$$F(a, w) \in \mathbb{C}[w]$$

n'ait aucune racine multiple. Soit ensuite (Y, π, f) la fonction algébrique que définit $F(z, w) \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_r)[w]$ grâce au théorème principal. Alors $\pi : Y \rightarrow \mathbb{D}_r$ est un revêtement holomorphe propre ramifié à n feuillets qui n'est ramifié qu'à l'origine. D'après le théorème qui décrit les revêtements finis propres du disque unité \mathbb{D} qui ne ramifient qu'à l'origine, il existe un biholomorphisme :

$$\alpha : \mathbb{D}_{\sqrt[n]{r}} \longrightarrow Y$$

qui assure que :

$$\pi(\alpha(\zeta)) = \zeta^n \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{D}_{\sqrt[n]{r}}.$$

Mais puisque l'on a $F(\pi(y), f(y)) \equiv 0$ identiquement pour tout $y \in Y$, il en découle que l'on a, en posant $\varphi := f \circ \alpha$:

$$F(\pi \circ \alpha(\zeta), f \circ \alpha(\zeta)) = F(\zeta^n, \varphi(\zeta)) \equiv 0$$

identiquement pour tout $\zeta \in \mathbb{D}_{\sqrt[n]{r}}$. En résumé, nous avons établi le théorème suivant.

Théorème (Paramétrisation de Puiseux). *Soit :*

$$F(z, w) = w^n - a_1(z) w^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(z) \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$$

un polynôme irréductible de degré n sur le corps $\mathbb{C}\{\{z\}\}$. Alors il existe une série de Laurent :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu \in \mathbb{C}\{\{z\}\}$$

qui satisfait identiquement l'équation :

$$F(\zeta^n, \varphi(\zeta)) \equiv 0,$$

comme élément de $\mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$. □

Terminons ces considérations et ce chapitre par trois remarques.

Premièrement, si tous les coefficients a_ν sont holomorphes, *i.e.* si $a_\nu \in \mathbb{C}\{z\}$ pour $\nu = 1, \dots, n$, alors on a de même $\varphi \in \mathbb{C}\{\zeta\}$. Ceci découle du fait que dans ce cas, la fonction f considérée ci-dessus est en fait holomorphe sur Y .

Deuxièmement, un autre manière d'exprimer l'assertion du théorème serait de dire que l'équation :

$$F(z, w) = 0$$

peut être résolue au moyen d'une *série de Puiseux* à exposants fractionnaires, de même dénominateur commun n :

$$w = \varphi(\sqrt[n]{r}) = \sum_{\nu=k} c_{\nu} z^{\nu/n}.$$

Troisièmement et dernièrement, on peut interpréter le théorème de Puiseux d'une manière purement algébrique comme suit. Au moyen de l'application :

$$\mathbb{C}\{\{z\}\} \longrightarrow \mathbb{C}\{\{\zeta\}\}, \quad z \mapsto \zeta^n,$$

le corps $\mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ devient une extension de degré n du corps $\mathbb{C}\{\{z\}\}$. Clairement, une base naturelle de $\mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ sur $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ est donnée par $1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}$. La série $\varphi(\zeta) \in \mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ est une racine du polynôme F dans cette extension de corps. Soit ε une racine primitive n -ème de l'unité, par exemple $\varepsilon := e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, on a $(\varepsilon^k \zeta)^n = \zeta^n$, d'où on peut déduire :

$$F(\zeta^n, \varphi(\varepsilon^k \zeta)) \equiv 0.$$

Autrement dit, $\varphi(\varepsilon^k \zeta) \in \mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ est aussi une racine du polynôme F . On peut alors se convaincre que les n séries $\varphi(\varepsilon^k \zeta)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, sont distinctes deux à deux. En conclusion, $\mathbb{C}\{\{\zeta\}\}$ est un corps de décomposition pour le polynôme $F \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$.

Exercices

Exercice 8.1. Soient X et Y deux surfaces de Riemann dont les corps de fonctions méromorphes $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(Y)$ sont isomorphes en tant que \mathbb{C} -algèbres. Montrer que X et Y sont biholomorphes. *Indication* : Représenter X et Y comme des surfaces de Riemann de fonctions algébriques définies par un même polynôme irréductible $P \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)[T]$. Utiliser aussi le fait (admis ici) que sur une surface de Riemann compacte, les fonctions méromorphes séparent les points.

Exercice 8.2. Soient X et Y deux surfaces de Riemann compactes, soient $a_1, \dots, a_n \in X$, soient $b_1, \dots, b_m \in Y$ et soient :

$$X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{et} \quad Y' := Y \setminus \{b_1, \dots, b_m\}.$$

Montrer que tout biholomorphisme $f' : X' \rightarrow Y'$ se prolonge comme biholomorphisme $f : X \rightarrow Y$.

Exercice 8.3. Soit le polynôme :

$$F(z, w) := w^2 - z^3 w + z$$

considéré comme appartenant à $\mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$.

(a) Montrer que F est irréductible sur $\mathbb{C}\{\{z\}\}$.

(b) Déterminer le développement de Puiseux :

$$w = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu/2}$$

de la fonction algébrique définie par $F(z, w(z)) \equiv 0$.

9. Formes différentielles complexes

Dans ce chapitre, on introduit la notion de forme différentielle complexe sur une surface de Riemann. On considérera non seulement des formes holomorphes et des formes méromorphes, mais aussi des formes qui sont seulement différentiables au sens réel du terme, et la différence est très importante, car on perd alors la possibilité de développer leurs coefficients en série entière ou en série de Laurent au voisinage de tout point.

Fonctions \mathcal{C}^∞ , fonctions holomorphes, et opérateurs différentiels. Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Identifions \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 en écrivant :

$$z = x + iy,$$

où x et y sont les coordonnées réelles standard de \mathbb{R}^2 , partie réelle et partie imaginaire du nombre complexe z . Soit $\mathcal{C}^\infty(U)$ la \mathbb{C} -algèbre des fonctions :

$$f: U \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui sont infiniment différentiables par rapport aux deux coordonnées réelles x et y . Outre les deux opérateurs de différentiation partielle :

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y},$$

nous considérerons aussi de manière très fréquente les deux opérateurs différentiels à coefficients complexes :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Il est bien connu qu'une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U est *holomorphe* si et seulement si elle appartient au noyau de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, à savoir :

$$f \in \mathcal{O}(U) \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Au moyen de cartes, on peut définir comme suit la notion de fonction différentiable de classe \mathcal{C}^∞ sur toute surface de Riemann X . Pour tout sous-ensemble ouvert $Y \subset X$, soit $\mathcal{C}^\infty(Y)$ la collection de toutes les fonctions $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour toute carte homéomorphe

$$z: U \longrightarrow V \cong z(U) \subset \mathbb{C}$$

de domaine $U \subset Y$ contenu dans Y , il existe une fonction lisse $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ telle que $f|_U = \tilde{f} \circ z$. Il est clair que \tilde{f} est déterminée de manière unique, puisque l'homéomorphisme $z^{-1}: V \rightarrow U$ existe.

Avec les restrictions naturelles d'applications, on obtient ainsi le faisceau :

$$\mathcal{C}_X^\infty$$

des fonctions \mathcal{C}^∞ sur X .

Dans une carte fixée (U, z) sur X , où $z = x + iy$, on peut naturellement définir les quatre opérateurs différentiels :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \quad \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U).$$

Toutefois, dans une autre carte (V, w) et sur l'intersection des deux domaines, un certain transfert d'opérateurs doit être pris en compte, et nous allons l'examiner dans un instant.

Différentielles en un point fixé. Soit maintenant a un point de X . Alors la fibre $\mathcal{C}_{X,a}^\infty$ consiste en tous les germes de fonctions infiniment différentiables en a . Soit :

$$\mathfrak{m}_{X,a} \subset \mathcal{C}_{X,a}^\infty$$

le sous-espace vectoriel des germes de fonctions lisses qui s'annulent en a :

$$0 = f(a).$$

Soit aussi :

$$\mathfrak{m}_{X,a}^2 \subset \mathfrak{m}_{X,a}$$

le sous-espace vectoriel des germes de fonctions en a qui s'annulent en a ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 :

$$0 = f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

On montre (exercice fortement recommandé) que cette condition est indépendante de la coordonnée holomorphe locale z , et on vérifie aussi que :

$$\mathfrak{m}_{X,a}^2 \equiv (\mathfrak{m}_{X,a})^2.$$

Définition. L'espace vectoriel quotient :

$$T_a^*X := \mathfrak{m}_{X,a} / \mathfrak{m}_{X,a}^2$$

sera appelé l'espace cotangent à X au point a . Si U est un voisinage ouvert de a et si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors la différentielle $d_a f \in T_a^*X$ de f au point a est l'élément :

$$d_a f := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_{X,a}^2.$$

On observe immédiatement ici que la fonction $f - f(a)$ s'annule au point a , donc représente un élément de $\mathfrak{m}_{X,a}$; par définition donc, $d_a f$ est juste la classe de cette fonction modulo $\mathfrak{m}_{X,a}^2$.

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit $a \in X$ un point et soit (U, z) une carte locale au voisinage de a , où $z = x + iy$ est la décomposition de z en parties réelle et imaginaire.

- (i) Les deux différentielles $d_a x$ et $d_a y$ forment une base de l'espace cotangent T_a^*X .
- (ii) Les deux différentielles $d_a z$ et $d_a \bar{z}$ forment une base de l'espace cotangent T_a^*X .
- (iii) Si f est une fonction \mathcal{C}^∞ dans un voisinage de a , alors :

$$\begin{aligned} d_a f &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_a y \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, montrons que d_ax et d_ay engendrent T_a^*X . Soit $t \in T_a^*X$ arbitraire, et supposons que $\varphi \in \mathfrak{m}_{X,a}$ est un représentant de t . Si l'on développe φ en série de Taylor au point a , on obtient :

$$\varphi = c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) + \psi,$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sont deux constantes et où $\psi \in \mathfrak{m}_{X,a}^2$. En prenant la classe d'équivalence modulo $\mathfrak{m}_{X,a}^2$, on obtient donc :

$$t = c_1 d_ax + c_2 d_ay.$$

Ensuite, nous affirmons que d_ax et d_ay sont linéairement indépendants. En effet, $c_1 d_ax + c_2 d_ay = 0$ implique :

$$c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) \in \mathfrak{m}_{X,a}^2.$$

En prenant ensuite les dérivées partielles par rapport à x et à y , on obtient $c_1 = c_2 = 0$.

Enfin, supposons que f soit \mathcal{C}^∞ au voisinage de a . Alors grâce à la formule de Taylor-Young on peut écrire :

$$f - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a)) + g,$$

où la fonction-reste g s'annule en a ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. Ainsi :

$$d_af = \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_ax + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_ay.$$

Grâce aux relations (exercice impératif) :

$$d_az = d_ax + i d_ay \quad \text{et} \quad d_a\bar{z} = d_ax - i d_ay,$$

on en déduit par un calcul élémentaire que l'on a aussi :

$$d_af = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_az + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a\bar{z},$$

ce qui achève la preuve. □

Vecteurs cotangents de type (1, 0) et de type (0, 1). Soient (U, z) et (U', z') deux cartes locales sur X au voisinage d'un point $a \in U \cap U' \subset X$. Alors $z' = z'(z)$ est une fonction holomorphe locale de z , à savoir :

$$0 = \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(a).$$

Posons ensuite :

$$c := \frac{\partial z'}{\partial z}(a) \in \mathbb{C}^* \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(a) = \bar{c}.$$

Grâce à la formule générale du théorème qui précède, cela implique que :

$$d_az' = c d_az \quad \text{et} \quad d_a\bar{z}' = \bar{c} d_a\bar{c}.$$

Par conséquent, les deux sous-espaces vectoriels complexes de dimension 1 de :

$$T_a^*X \cong \mathbb{C}d_ax \oplus \mathbb{C}d_ay$$

qui sont engendrés, respectivement, par $d_a z$ et par $d_a \bar{z}$, sont indépendants du choix de coordonnée holomorphe locale (U, z) autour de a . Pour cette raison, ils ont un sens global sur X . Introduisons alors les deux notations :

$$T_a^{*(1,0)} X := \mathbb{C} d_a z \quad \text{et} \quad T_a^{*(0,1)} X := \mathbb{C} d_a \bar{z}.$$

Par construction, on a clairement :

$$T_a^* X = T_a^{*(1,0)} X \oplus T_a^{*(0,1)} X.$$

Les éléments de $T_a^{*(1,0)} X$ sont appelés *vecteurs cotangents de type (1, 0)*, et ceux de $T_a^{*(0,1)}$, *vecteurs cotangents de type (0, 1)*.

Si une fonction f est \mathcal{C}^∞ au voisinage de a , on définit :

$$d'_a f \quad \text{et} \quad d''_a f$$

respectivement par :

$$d'_a f := \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z \quad \text{et} \quad d''_a f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z},$$

et il en découle aisément que l'on a :

$$d_a f = d'_a f + d''_a f$$

avec :

$$d'_a f \in T_a^{*(1,0)} X \quad \text{et} \quad d''_a f \in T_a^{*(0,1)} X.$$

Définition. Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une surface de Riemann X . On appelle *forme différentielle de degré 1*, ou simplement *1-forme*, sur Y , toute application (sans condition de régularité) :

$$\omega: Y \longrightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^* X,$$

avec $\omega(a) \in T_a^* X$ pour tout $a \in Y$. Si $\omega(a) \in T_a^{*(1,0)} X$, ou si $\omega(a) \in T_a^{*(0,1)} X$, on dit que la forme différentielle est de *type (1, 0)*, ou, respectivement, de *type (0, 1)*.

Exemples.

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(Y)$. Alors les applications df , ∂f , $\bar{\partial} f$ qui sont définies, pour tout $a \in Y$, par :

$$(df)(a) := d_a f, \quad (\partial f)(a) := d'_a f, \quad (\bar{\partial} f)(a) := d''_a f,$$

sont visiblement des 1-formes. Bien entendu, la fonction f est holomorphe précisément lorsque $d''_a f = 0$ en tout point a .

(b) Soit ω une 1-forme sur Y et soit $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Alors l'application $f\omega$ définie par :

$$(f\omega)(a) := f(a)\omega(a)$$

est aussi une 1-forme sur Y .

(c) Généralement parlant, si (U, z) est une carte complexe avec $z = x + iy$, toute 1-forme sur U s'écrit :

$$\omega = f dx + g dy = \varphi dz + \psi d\bar{z},$$

pour certaines fonctions $f, g, \varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{C}$ qui ne sont pas nécessairement continues en général, puisque l'on n'a rien supposé pour l'instant au sujet de la régularité de ω .

Définition. Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une surface de Riemann X . Une 1-forme ω sur Y est dite \mathcal{C}^∞ -différentiable si, pour toute carte locale (U, z) , elle s'écrit sur $U \cap Y$:

$$\omega = f dz + g d\bar{z},$$

où les deux fonctions-coefficients f, g appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(U \cap Y)$.

Définition. Une 1-forme ω sur Y est dite *holomorphe* si l'on a sur $U \cap Y$:

$$\omega = f dz,$$

où $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$ est une fonction holomorphe.

Forme différentielle holomorphe \equiv

\equiv forme $\omega = f(z) dz$ de type $(1, 0)$ à coefficient $f(z)$ holomorphe

Notations. Pour tout ouvert U d'une surface de Riemann X , on notera :

- T^*U l'espace vectoriel des 1-formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur U ;
- $T^{*(1,0)}U$ l'espace vectoriel des formes différentielles de type $(1, 0)$ sur U ;
- $T^{*(0,1)}U$ l'espace vectoriel des formes différentielles de type $(0, 1)$ sur U ;
- $\Omega(U)$ l'espace vectoriel des 1-formes différentielles holomorphes sur U .

Avec les applications naturelles de restriction à des sous-ouverts, on obtient ainsi quatre faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur toute surface de Riemann X :

$$T_X^*, \quad T_X^{*(1,0)}, \quad T_X^{*(0,1)}, \quad \Omega_X.$$

Résidus. Soit Y un sous-ouvert d'une surface de Riemann X , soit un point $a \in Y$, et soit ω une 1-forme holomorphe qui est définie sur $Y \setminus \{a\}$. Soit (U, z) une coordonnée holomorphe locale dans un voisinage U de a tel que $U \subset Y$ et tel que $z(a) = 0$. Alors sur $U \setminus \{a\}$, on peut écrire :

$$\omega = f dz,$$

où $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ est holomorphe sauf en a . Ensuite, on peut considérer la série de Laurent :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

de f en a par rapport à la coordonnée z . Si $c_n = 0$ pour tout $n \leq -1$, alors ω peut être prolongée holomorphiquement à travers a . Dans ce cas-là, le point a est appelé une *singularité éliminable* de ω . S'il existe $n_- \leq -1$ tel que $c_{n_-} \neq 0$, et si $c_n = 0$ pour tout $n \leq n_- - 1$, alors on dit que ω possède un *pôle* d'ordre n_- au point a . S'il existe une infinité d'entiers négatifs $n \leq -1$ tels que $c_n \neq 0$, on dit que ω possède une *singularité essentielle* au point a .

Définition. Le coefficient c_{-1} est appelé le *résidu* au point a de la forme $\omega \in \Omega(U \setminus \{a\})$ holomorphe autour de a mais pas en a et il est noté :

$$c_{-1} = \text{Res}_a(\omega).$$

En fait, il faut vérifier que :

Lemme. La valeur ainsi définie du résidu de toute forme $\omega \in \Omega(U \setminus \{a\})$ est indépendante de la coordonnée holomorphe locale dans lequel on se place.

DÉMONSTRATION. Soit donc V un voisinage ouvert du point a .

Premièrement, nous affirmons que si une fonction g est holomorphe dans $V \setminus \{a\}$, alors le résidu en a de sa différentielle dg est égal à zéro, et donc dans ce cas spécial, il est indépendant du choix de la carte holomorphe.

En effet, soit (U, z) une coordonnée holomorphe locale en a avec $z(a) = 0$ et soit :

$$g = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n$$

la série de Laurent de g en a . Alors grâce à un théorème connu d'analyse complexe à une variable, la série de Laurent de sa différentielle est donnée par sa dérivée :

$$dg = \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n c_n z^{n-1} \right) dz,$$

et donc il est trivialement vrai que le coefficient de $z^{-1} dz$ y vaut zéro.

Deuxièmement, nous affirmons que si φ est une fonction holomorphe dans V qui possède un zéro d'ordre 1 en a , alors :

$$\text{Res}_a(\varphi^{-1} d\varphi) = 1,$$

et donc, ce résidu est indépendant de la carte holomorphe locale. En effet, soit (U, z) une carte holomorphe locale en a avec $z(a) = 0$. Alors $\varphi = zh$, pour une certaine fonction-reste h holomorphe en a qui ne s'annule pas en a . Il en découle :

$$d\varphi = h dz + z dh,$$

puis sans aucun effort :

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{h dz + z dh}{z h} = \frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}.$$

Mais puisque $h(a) \neq 0$, la forme différentielle $h^{-1} dh$ est holomorphe en a , et donc, son résidu est nul d'après ce qui vient d'être vu. Cette observation implique par conséquent que :

$$\text{Res}_a\left(\frac{d\varphi}{\varphi}\right) = \text{Res}_a\left(\frac{dz}{z}\right) = 1.$$

Troisièmement enfin, achevons la preuve du lemme. Dans une carte holomorphe locale (U, z) avec $z(a) = 0$, soit $\omega = f dz$ avec $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$, et soit le développement de Laurent de f :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Soit aussi :

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1},$$

qui est un développement de Laurent qui converge nécessairement sur les compacts de $U \setminus \{a\}$, toujours d'après un théorème connu d'analyse complexe à une variable. Alors on a :

$$\omega = dg + c_{-1} \frac{dz}{z},$$

et d'après ce qui précède, il en découle que :

$$\operatorname{Res}_a(\omega) = c_{-1} \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{dz}{z}\right)}_{=1} = c_{-1},$$

résidu qui est alors indépendant de la carte, puisque l'on vient de voir que $\operatorname{Res} \frac{z'}{dz'} = 1$ pour toute carte holomorphe locale z' . \square

Formes différentielles méromorphes. Une 1-forme ω sur un sous-ensemble ouvert Y d'une surface de Riemann X est appelée une *forme différentielle méromorphe* sur Y s'il existe un sous-ouvert $Y' \subset Y$ tels que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) ω est une 1-forme holomorphe sur Y' ;
- (ii) $Y \setminus Y'$ consiste seulement en des points isolés ;
- (iii) ω possède un pôle (et non une singularité essentielle) en tout point $a \in Y \setminus Y'$.

Soit alors $T\mathcal{M}^*(Y)$ l'ensemble de toutes les 1-formes méromorphes sur Y . Avec les applications naturelles de restriction, on obtient ainsi le faisceau :

$$T\mathcal{M}_X^*$$

des formes différentielles méromorphes sur X , qui est un faisceau d'espaces vectoriels. Les formes différentielles méromorphes sont parfois aussi appelés *différentielles d'Abel*, ou *différentielles abéliennes*. Une différentielle abélienne est dite :

- de *première espèce* lorsqu'elle est partout holomorphe ;
- de *seconde espèce* lorsqu'elle est méromorphe tandis que ses résidus en tous points (pôles) sont nuls,
- et enfin, de *troisième espèce* dans tous les autres cas.

Produit extérieur. Afin d'être en position de définir des formes différentielles de degré 2, nous devons rappeler tout d'abord quelques propriétés du produit extérieur d'un espace vectoriel avec lui-même.

Soit donc V un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Alors par définition, $\Lambda^2 V$ est l'espace vectoriel sur \mathbb{C} dont les éléments sont des sommes finies de vecteurs de la forme $v_1 \wedge v_2$, pour $v_1, v_2 \in V$ quelconques, avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \wedge v_3 &= v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3, \\ (\lambda v_1) \wedge v_2 &= \lambda (v_1 \wedge v_2), \\ v_1 \wedge v_2 &= -v_2 \wedge v_1, \end{aligned}$$

pour tous $v_1, v_2, v_3 \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de V , alors les éléments $e_i \wedge e_j$ pour $i < j$ forment une base de $\Lambda^2 V$. En fait, ces propriétés caractérisent complètement $\Lambda^2 V$.

Maintenant, nous allons appliquer ces considérations à l'espace cotangent $T_a^* X$ d'une surface de Riemann X en l'un de ses points a . Introduisons donc :

$$T_a^{*(2)} X := \Lambda^2 T_a^* X.$$

Soit (U, z) une coordonnée holomorphe locale en a , où $z = x + iy$. Alors il découle ce qui vient d'être dit que $d_a x \wedge d_a y$ est une base de $\Lambda^2 T_a^* X$, espace vectoriel qui est de dimension 1. Une autre base est :

$$d_a z \wedge d_a \bar{z} = -2i d_a x \wedge d_a y.$$

Définition. Soit Y un ouvert dans une surface de Riemann X . Une 2-forme sur Y est une application (sans condition de régularité pour l'instant) :

$$\omega: Y \longrightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{*(2)} X,$$

où $\omega(a) \in \Lambda^2 T_a^* X$ pour tout $a \in Y$. La forme ω est dite \mathcal{C}^∞ -différentiable sur Y si, dans toute carte holomorphe locale (U, z) sur X , elle peut être écrite sous la forme :

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z},$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(U \cap Y)$, où $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$ signifie :

$$\omega(a) = f(a) d_a z \wedge d_a \bar{z},$$

pour tout $a \in U \cap Y$. On notera $\Gamma(Y, \Lambda^2 T^* X)$ l'espace vectoriel des 2-formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur Y . Naturellement, on obtient un faisceau :

$$\Lambda^2 T_X^*.$$

Exemples.

(a) Étant donné deux 1-formes $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(Y, T^* X)$, on peut toujours produire leur produit extérieur qui est la 2-forme $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Gamma(Y, \Lambda^2 T_X^*)$ définie en tout point $a \in Y$ par :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a).$$

(b) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ et toute 2-forme $\omega \in \Gamma(Y, \Lambda^2 T_X^*)$, la 2-forme $f\omega \in \Gamma(Y, \Lambda^2 T_X^*)$ est définie en tout point $a \in Y$ par :

$$(f\omega)(a) := f(a) \omega(a).$$

Différentiation extérieure des formes différentielles. On définit maintenant les « dérivations » $d, \partial, \bar{\partial}$ qui agissent sur n'importe quel espace $\Gamma(U, T^* X)$ de 1-formes différentielles définies sur un ouvert U d'une surface de Riemann X . Localement dans une carte holomorphe, toute 1-forme peut être écrite comme une somme finie :

$$\omega = \sum_k f_k dg_k,$$

où les f_k et les g_k sont des fonctions différentiables, e.g. $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$ où z est une coordonnée holomorphe locale. Alors on définit :

$$d\omega := \sum_k df_k \wedge dg_k,$$

$$\partial\omega := \sum_k \partial f_k \wedge dg_k,$$

$$\bar{\partial}\omega := \sum_k \bar{\partial} f_k \wedge dg_k.$$

Mais maintenant, on doit établir que ces définitions sont indépendantes du choix d'une représentation $\omega = \sum_k f_k dg_k$. Faisons-le pour l'opérateur d , les cas de ∂ et de $\bar{\partial}$ étant similaires et laissés au lecteur.

Soit donc deux représentations :

$$\omega = \sum_k f_k dg_k = \sum_j \tilde{f}_j d\tilde{g}_j.$$

Soit (U, z) une coordonnée holomorphe locale quelconque. On doit donc montrer que :

$$\sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j.$$

Mais puisque l'on a :

$$\begin{aligned} dg_k &= \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \\ d\tilde{g}_j &= \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

on doit donc avoir à cause de l'hypothèse de double expression de ω :

$$\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \quad \text{et} \quad \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}.$$

En dérivant ces deux équations par rapport à x et à y et en soustrayant les résultats obtenus de manière appropriée, on obtient la nouvelle équation :

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right).$$

Mais d'un autre côté, on a par définition de l'opérateur différentiel :

$$\begin{aligned} \sum_k df_k \wedge dg_k &= \sum_k \left(-\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \\ \sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j &= \sum_j \left(-\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j$. □

Propriétés élémentaires de d , ∂ , $\bar{\partial}$. Soit U un ouvert d'une surface de Riemann X , soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et soit $\omega \in \Gamma(U, T^*X)$. Alors on a :

- (i) $0 = dd f = \partial \bar{\partial} f = \bar{\partial} \partial f$;
- (ii) $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$;
- (iii) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$;
- (iv) $\partial(f\omega) = \partial f \wedge \omega + f \partial\omega$;
- (iv) $\bar{\partial}(f\omega) = \bar{\partial} f \wedge \omega + f \bar{\partial}\omega$.

Ces règles sont des conséquences directes des définitions, par exemple on a $ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0$.

Par (i) et (ii) on obtient une relation d'anticommutation :

$$\partial \bar{\partial} f = -\bar{\partial} \partial f,$$

qui provient de l'équation de Poincaré :

$$0 = dd f = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial})f = \partial \bar{\partial} f + \bar{\partial} \partial f.$$

Dans une carte holomorphe locale (U, z) , avec $z = x + iy$, on a :

$$\partial \bar{\partial} f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy.$$

Ici, on dira qu'une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ définie sur un ouvert d'une surface de Riemann est *harmonique* si $\partial\bar{\partial}f = 0$, i.e. si son laplacien est nul :

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Définition. Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une surface de Riemann X . Une 1-forme différentielle $\omega \in \Gamma(Y, T^*X)$ est dite *fermée* si l'on a $0 = d\omega$, et elle est dite *exacte* (sur Y) s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ telle que $\omega = df$.

Puisque l'on a toujours $0 = ddf$, les formes exactes sont automatiquement fermées. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie en général, et c'est là que gît l'acte de naissance des théories cohomologiques.

Théorème. Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une surface de Riemann X . Alors les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) Toute 1-forme holomorphe $\omega \in \Gamma(Y, \Omega(X))$ est nécessairement fermée.
- (b) Toute 1-forme $\omega \in \Gamma(Y, T^{*(1,0)}X)$ de type $(1, 0)$ qui est fermée, i.e. satisfaisant $d\omega = 0$, est nécessairement une forme holomorphe.

DÉMONSTRATION. Soit donc ω une forme différentielle de type $(1, 0)$ (toute forme holomorphe l'est). Dans une carte holomorphe locale (U, z) , on peut donc écrire $\omega = f dz$ pour une certaine fonction-coefficient f de classe \mathcal{C}^∞ . Alors la différentielle extérieure de f se calcule aisément :

$$d\omega = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Ainsi, $d\omega = 0$ équivaut à $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, d'où les deux résultats (a) et (b). □

Conséquence à noter : si u est une fonction harmonique, alors la forme ∂u de type $(1, 0)$ est nécessairement une 1-forme holomorphe, puisque l'on a :

$$d(\partial u) = (\partial + \bar{\partial})(\partial u) = \bar{\partial}\partial u = 0.$$

Le « pull-back » d'une forme différentielle. Soit maintenant $F: X \rightarrow Y$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann X et Y . Pour tout sous-ensemble ouvert $V \subset Y$, une telle application induit par composition un homomorphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned} F^*: \mathcal{C}^\infty(V) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(F^{-1}(V)) \\ f &\longmapsto F^*(f) := f \circ F. \end{aligned}$$

Or nous affirmons que cet homomorphisme se prolonge en un homomorphisme entre espaces vectoriels de 1-formes ou de 2-formes différentielles :

$$\begin{aligned} F^*: \Gamma(V, T^*Y) &\longrightarrow \Gamma(F^{-1}(V), T^*X), \\ F^*: \Gamma(V, \Lambda^2 T^*Y) &\longrightarrow \Gamma(F^{-1}(V), \Lambda^2 T^*X). \end{aligned}$$

En effet, localement, une 1-forme (resp. une 2-forme) sur Y s'écrit comme une somme finie $\sum_j f_j dg_j$ (resp. $\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j$), où les fonctions f_j, g_j, h_j sont \mathcal{C}^∞ . Il est alors naturel

de définir :

$$F^* \left(\sum_j f_j dg_j \right) := \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j),$$

$$F^* \left(\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j \right) := \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j) \wedge d(F^* h_j).$$

On peut alors vérifier (exercice recommandé) que ces définitions sont indépendantes du choix d'une représentation $\sum_j f_j dg_j$ (resp. $\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j$), et donc, ces définitions sont cohérentes et définissent les deux homomorphismes d'espaces vectoriels globaux que l'on désire. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et toute 1-forme $\omega \in \Gamma(U, T^*X)$, on a les propriétés très importantes de commutation entre pullbacks et différentiations :

- (i) $F^*(df) = d(F^*f)$ et $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$;
- (ii) $F^*(\partial f) = \partial(F^*f)$ et $F^*(\partial\omega) = \partial(F^*\omega)$;
- (iii) $F^*(\bar{\partial}f) = \bar{\partial}(F^*f)$ et $F^*(\bar{\partial}\omega) = \bar{\partial}(F^*\omega)$.

Conséquence à noter : Si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ est une fonction harmonique, alors la fonction composée $F^*f = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(F^{-1}(U))$ est elle aussi harmonique, puisque $\partial\bar{\partial}(F^*f) = \partial(F^*\bar{\partial}f) = F^*(\partial\bar{\partial}f) = 0$.

Exercices

Exercice 9.1. Soit $p := \exp \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ le revêtement universel de \mathbb{C}^* et soit ω la 1-forme holomorphe $\frac{dz}{z}$ sur \mathbb{C}^* . Trouver $p^*\omega$.

Exercice 9.2. Montrer que la 1-forme holomorphe :

$$\frac{dz}{1+z^2}$$

qui est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{+i, -i\}$ peut être prolongée comme 1-forme holomorphe ω sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{+i, -i\}$. Ensuite, soit :

$$p := \tan : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{+i, -i\},$$

comme dans l'Exercice 4.4. Trouver $p^*\omega$.

Exercice 9.3. Soit $p: Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann, soit $a \in X$, soit $b \in p^{-1}(a)$ et soit k la multiplicité de p en b . Étant donné une 1-forme holomorphe ω sur $X \setminus \{a\}$, montrer que l'on a :

$$\text{Res}_b(p^*\omega) = k \text{Res}_a(\omega).$$

10. Triangulation des surfaces de Riemann compactes

L'objectif principal de ce chapitre topologique est d'établir que toute surface de Riemann compacte sans bord de classe \mathcal{C}^∞ est triangulable, énoncé qui sera utilisé de manière cruciale pour établir une classification topologique complète des surfaces de Riemann compactes (chapitre suivant). Plus généralement, Raddò a démontré que toute surface topologique, compacte ou non compacte mais sans bord, est triangulable, et il s'agit là d'une preuve qui met à l'épreuve toute l'ingéniosité de la topologie planaire. Or dans le cas compact auquel nous nous restreindrons, un argument de preuve élégant consiste à introduire une métrique et à en exploiter les géodésiques — lesquelles sont des courbes \mathcal{C}^∞ qui se comportent localement comme des droites dans le plan euclidien — afin de contourner la complexité des courbes qui sont seulement continues.

Convention de notation importante. Sur un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ muni de la coordonnée complexe $z = x + iy$, les fonctions \mathcal{C}^∞ sont par définition des fonctions indéfiniment différentiables des *deux variables* (x, y) . Puisque $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on peut aussi considérer que de telles fonctions sont des fonctions des deux variables (z, \bar{z}) . On adoptera donc la convention *stricte* de noter explicitement les *deux arguments* (z, \bar{z}) de toute fonction qui n'est que de classe \mathcal{C}^∞ , afin de ne pas faire de confusion avec l'argument unique (z) de toute fonction qui est *holomorphe* sur l'ouvert considéré.

Définition. Une *métrique conforme* \mathcal{C}^∞ sur une surface de Riemann¹ S est donnée en coordonnées locales z par une expression quadratique différentielle du type :

$$\lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z},$$

où $(z, \bar{z}) \mapsto \lambda(z, \bar{z})$ est une fonction \mathcal{C}^∞ (définie sur l'ouvert de carte correspondant²) qui est strictement positive :

$$\lambda(z, \bar{z}) > 0 \quad \text{pour tout } z.$$

Par définition, une telle métrique assigne à tout vecteur infinitésimal de coordonnée $dz = dx + idy$ tangent à la surface au point z la longueur au carré :

$$\boxed{\text{longueur au carré de } dz|_z := \lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z} = \lambda^2(x, y) (dx^2 + dy^2)}.$$

Classiquement, on note :

$$\boxed{ds^2 = \lambda^2 |dz|^2}$$

le carré de cette longueur infinitésimale (qui dépend, via la fonction λ^2 , du point en lequel on se situe).

¹ Dans ce chapitre, la lettre S , plutôt que les lettres X, Y ou Z , sera utilisée pour désigner une surface de Riemann quelconque.

² On décide à présent, par souci d'économie, de s'autoriser souvent à ne pas préciser les ouverts, et donc à ne nommer que les coordonnées locales dans \mathbb{C} .

Observons immédiatement qu'à tout changement de carte *holomorphe* locale $w \mapsto z(w) =: z$ correspondent³ les deux changements de différentielles conjugués l'un de l'autre :

$$dz = z_w(w) dw \quad \text{et} \quad d\bar{z} = \bar{z}_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w},$$

où l'on a abrégé $\frac{dz}{dw} = z_w$ au moyen d'une écriture indicielle, ce qui montre que la métrique transformée demeure de la même forme générale :

$$\begin{aligned} \lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z} &= \lambda^2(z(w), \bar{z}(\bar{w})) \underbrace{z_w(w) \bar{z}_{\bar{w}}(\bar{w})}_{\text{positif } > 0} dw d\bar{w} \\ &=: \mu(w, \bar{w}) dw d\bar{w}, \end{aligned}$$

dans l'autre carte holomorphe locale. Conséquence importante et notoire : puisque les métriques conformes ainsi définies ont une forme spécifique qui reste stable à travers tout changement de carte holomorphe locale, elles possèdent un sens global sur n'importe quelle surface de Riemann grâce à des recollements entre représentations locales.

Proposition élémentaire mais fondamentale. *Toute surface de Riemann compacte S admet une métrique conforme⁴.*

DÉMONSTRATION. Soit un double recouvrement *fini* de S par des ouverts de cartes holomorphes locales :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U'_i = S,$$

ceux de la seconde famille étant compactement inclus dans ceux de la première :

$$U'_i \Subset U_i,$$

et introduisons les notations suivantes pour les homéomorphismes de carte :

$$\varphi_i: U_i \longrightarrow V_i := \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \varphi_i(U'_i) =: V'_i \Subset V_i.$$

Sur chaque ouvert $V_i \subset \mathbb{C}$ muni de la coordonnée canonique $z_i \in \mathbb{C}$, soit $\chi_i(z_i, \bar{z}_i)$ une fonction $\mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty[$ de classe \mathcal{C}^∞ prenant des valeurs :

$$\chi_i = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{C} \setminus V_i \quad \text{et} \quad \chi_i > 0 \quad \text{sur} \quad V'_i$$

(il en existe toujours). Sur chaque ouvert $V_i \subset \mathbb{C}$ on choisit la métrique conforme :

$$\chi_i(z_i, \bar{z}_i) dz_i d\bar{z}_i$$

et ensuite grâce à l'homéomorphisme inverse φ_i^{-1} , on la remonte à S pour obtenir une « pseudo-métrique μ_i localement conforme m_i » qui n'est positive que sur le sous-ouvert

³ La fonction holomorphe $z = z(w)$ étant développable en série entière localement convergente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k z}{dw^k}(w_0) (w - w_0)^k$ au voisinage de tout $w_0 \in \mathbb{C}$ fixé, si on définit la fonction $\bar{z} = \bar{z}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k \bar{z}}{d\bar{w}^k}(w_0) (w - \bar{w}_0)^k$ en ne conjuguant que ses coefficients constants, on voit alors que la barre de conjugaison complexe se distribue naturellement à la fois sur l'argument et sur la fonction :

$$\overline{z(w)} = \bar{z}(\bar{w}), \quad \text{d'où aussi :} \quad \overline{z_w(w)} = \bar{z}_{\bar{w}}(\bar{w}).$$

⁴ On sait qu'en géométrie riemannienne *réelle* (à un nombre quelconque de dimensions), toute variété différentielle \mathcal{C}^∞ admet des métriques riemanniennes. Mais ici, la métrique est de la forme $\lambda^2(x, y) (dx^2 + dy^2)$, ce qui est une forme *spéciale* par rapport aux métriques riemanniennes bidimensionnelles générales $g_{11}(x, y) dx^2 + 2g_{12}(x, y) dx dy + g_{22}(x, y) dy^2$.

U'_i (au sens de la définition donnée, une métrique n'est *conforme* que si son coefficient est partout > 0). Mais si l'on additionne toutes ces pseudo-métriques localement conformes :

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$

il vient qu'en tout point $p \in S$, qui appartient nécessairement à au moins un U'_i , la contribution de m_i est positive, tandis que toutes les autres contributions possibles des autres $m_{i'}$ pour les autres ouverts éventuels $U_{i'} \ni p$ qui contiennent p sont nécessairement aussi positives, d'après ce qu'on vient de voir quand on change de carte. \square

Si l'on préfère exprimer l'existence d'une métrique conforme en termes de fibré tangent à la surface, on dira que la *norme conforme* $\|\mathbf{v}\|^{\text{conf}}$ d'un vecteur tangent $\mathbf{v} \in T_p S$ à la surface de Riemann S représenté dans une carte holomorphe locale z près de p par un nombre complexe $\mathbf{v} \in \mathbb{C}$ est égale à :

$$\|\mathbf{v}\|_p^{\text{conf}} := \sqrt{\lambda^2(z(p), \bar{z}(p)) \mathbf{v} \bar{\mathbf{v}}}.$$

Longueurs et aires associées à une métrique conforme. Soit γ une courbe rectifiable quelconque tracée dans une carte holomorphe locale z de S . Sa *longueur* est définie par :

$$\text{Longueur}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda(z, \bar{z}) |dz|.$$

On montre qu'elle ne dépend pas de la paramétrisation de γ et qu'elle ne dépend pas du choix de carte locale (exercice !), donc la longueur des courbes possède un sens intrinsèque dès qu'une métrique conforme est fixée sur S .

De manière similaire, l'*aire* d'un sous-ensemble mesurable $B \subset S$ est définie, dans une carte holomorphe locale z sur S , par :

$$\text{Aire}(B) := \int_B \lambda^2(z, \bar{z})^{\frac{i}{2}} dz \wedge d\bar{z},$$

intégrale dans l'expression de laquelle on observera *sans attendre* qu'apparaît l'élément d'aire euclidienne classique, puisque l'on calcule :

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2i dx \wedge dy,$$

ce qui explique le terme correctif $\frac{i}{2}$. On montre que cette définition de l'aire ne dépend pas du choix de carte locale (exercice similaire), et par conséquent — grâce *e.g.* aux partitions de l'unité —, l'aire possède un sens intrinsèque pour toute région dès qu'une métrique conforme est fixée sur S .

La *distance* entre deux points $p_1, p_2 \in S$ est définie par la métrique minimisante associée à cette longueur des courbes :

$$\text{dist}(p_1, p_2) := \inf \left\{ \text{Longueur}(\gamma) \in [0, +\infty] : \right. \\ \left. \gamma: [0, 1] \rightarrow S \text{ rectifiable avec } \gamma(0) = p_1 \text{ et } \gamma(1) = p_2 \right\}.$$

On peut démontrer (exercice de rappel mental) que la topologie définie par cette métrique est la même que la topologie originale de S .

Toutes ces notions et celles de géométrie conforme qui vont suivre se généralisent bien entendu à des surfaces qui sont seulement de classe \mathcal{C}^∞ .

Définition. Une surface topologique S est dite de classe \mathcal{C}^∞ si les applications de transition entre cartes d'un atlas maximal sont toutes différentiables une infinité de fois. En particulier, toute surface de Riemann est une surface de classe \mathcal{C}^∞ , puisque ses applications de transition sont holomorphes.

Orientabilité automatique des variétés complexes.

Définition. Une surface S de classe \mathcal{C}^∞ est dite *orientable* s'il existe un atlas de cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i \in I$, définies sur des ouverts $U_i \subset S$ telles que pour toute paire d'ouverts $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$ d'intersection non vide, les applications de transfert associées :

$$\varphi_{i_2} \circ \varphi_{i_1}^{-1}: \varphi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \longrightarrow \varphi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$$

préservent toutes l'orientation standard de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, à savoir leurs déterminants jacobiens réels de taille 2×2 sont tous de signe > 0 en tout point.

Théorème. *Toute surface de Riemann est orientable.*

DÉMONSTRATION. En effet, les changements de carte sont de la forme holomorphe $w \mapsto z(w) =: z$, et l'on sait bien que les applications holomorphe ont une différentielle qui est une similitude, à savoir la composition d'une rotation et d'une homothétie, donc leur matrice jacobienne préserve évidemment l'orientation sur l'espace tangent en tout point.

Une autre manière alternative de le voir serait de démontrer (exercice recommandé) que le déterminant jacobien 2×2 de l'application réelle $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{z(u+iv) + \overline{z(u+iv)}}{2}, \frac{z(u+iv) - \overline{z(u+iv)}}{2i} \right)$$

associée à toute transformation holomorphe locale $w \mapsto z(w)$ est égal au module au carré $|z_w|^2$ du déterminant 1×1 de la matrice jacobienne complexe (z_w) . \square

Fonctionnelle « Longueur » et fonctionnelle « Énergie ». L'objectif est à présent d'introduire le concept de courbe dite *géodésique* sur une surface S compacte sans bord de classe \mathcal{C}^∞ munie d'une métrique conforme. Soit une courbe \mathcal{C}^∞ sur S :

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow S.$$

En représentation paramétrée, sa longueur est donnée par l'intégrale :

$$\text{Longueur}(\gamma) = \int_0^1 \lambda(\gamma(t), \overline{\gamma(t)}) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Maintenant, si on définit l'*énergie* de la courbe comme étant l'intégrale quadratique suivante :

$$\text{Énergie}(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda^2(\gamma(t), \overline{\gamma(t)}) \dot{\gamma}(t) \dot{\overline{\gamma}}(t) dt,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\int fg)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$ appliquée ici à $f := 1$ et à $g := \sqrt{h}$ pour une fonction h positive :

$$(\int \sqrt{h} \cdot 1)^2 \leq \int h \cdot \int 1$$

nous permet ici de majorer immédiatement :

$$\frac{1}{2} [\text{Longueur}(\gamma)]^2 \leq \text{Énergie}(\gamma),$$

avec cas d'égalité lorsque et seulement lorsque les deux fonctions concernées sont égales entre elles à une constante près, à savoir si et seulement si :

$$\lambda(\gamma(t), \overline{\gamma(t)}) |\dot{\gamma}(t)| \equiv \text{const.},$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Dans une telle circonstance, il est naturel de dire qu'une courbe γ satisfaisant cette relation est *paramétrée proportionnellement à sa longueur d'arc (conforme)*.

On déduit de ces (in)égalités que les courbes minimisant la fonctionnelle « Longueur » qui sont paramétrées proportionnellement à leur longueur d'arc sont aussi précisément les minima de l'énergie *Energie*. En d'autres termes, la fonctionnelle d'énergie, lorsqu'elle est comparée à la fonctionnelle de longueur, sélectionne une paramétrisation distinguée pour les courbes qui minimisent la longueur. Il s'agit maintenant de caractériser ces courbes par une équation différentielle. Bien entendu, tous ces raisonnements et ceux qui suivent ont un sens plus général en géométrie riemannienne et en dimension quelconque, mais nous nous concentrerons ici sur le cas des métriques conformes sur les surfaces.

Objectifs, anticipations, discussions. Mais avant de procéder au calcul, effectuons un résumé dynamique anticipateur.

□ On cherche à trouver les courbes qui sont de longueur minimale (au moins localement) pour la longueur naturellement associée à notre métrique conforme, par intégration le long de courbes \mathcal{C}^∞ (voire \mathcal{C}^1 par morceaux, voire même seulement rectifiables), mais les courbes hypothétiquement « minimisantes » pourraient fort bien ne pas être régulières, ou ne pas exister du tout.

□ À un carré près, la fonctionnelle « Énergie » est essentiellement la même que la fonctionnelle de longueur, et elle va s'avérer techniquement un peu plus maniable que la fonctionnelle « Longueur » pour notre *calcul des variations*, puisque la racine carrée⁵ aura disparu, donc nous allons chercher les 'points' critiques — ce sont en fait des courbes — de la fonctionnelle « Énergie ».

□ Ces extremas de la fonctionnelle d'énergie vont s'avérer être caractérisés par une certaine belle équation différentielle du second ordre à coefficients \mathcal{C}^∞ , ce qui les rendra riches et étudiables, mais en poursuivant l'étude de ces courbes que l'on appellera *géodésiques*, on n'aura toujours pas résolu notre question de savoir s'il existe des courbes qui minimisent la distance, au moins entre des paires de points assez proches sur la surface.

□ Alors nous allons oublier cette question pendant un certain temps, étudier les courbes géodésiques pour elles-mêmes, et essayez de mieux les comprendre dans des systèmes de coordonnées qui en simplifient les équations.

□ Ce n'est qu'après avoir introduit des cartes spéciales sur la surface S au moyen de l'application dite *exponentielle* qui utilise les solutions (géodésiques) la belle équation différentielle à coefficients \mathcal{C}^∞ que nous serons en mesure de voir et de démontrer que les courbes géodésiques sont effectivement des courbes de longueur localement minimale, ce qui répondra enfin à notre question. Il s'agit là d'un classique de géométrie riemannienne !

□ Enfin, ultérieurement, grâce à ces courbes géodésiques et à leurs propriétés géométriques, nous serons en mesure de démontrer en détail le théorème de triangulation qui est notre objectif principal dans ce chapitre.

⁵ Il semblerait qu'il n'y ait pas de racine carrée dans l'expression intégrale de $\text{Longueur}(\gamma)$, mais rappelons quand même que $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)}$ si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$.

Extrema de la fonctionnelle « Énergie ». En coordonnées locales $z \in \mathbb{C}$, introduisons une petite variation \mathcal{C}^∞ d'une courbe fixée $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ « le long d'elle-même », c'est-à-dire plus précisément une famille à un paramètre réel $s \in]-s_0, s_0[$ de courbes qui déforment légèrement γ :

$$\gamma(t) + s\eta(t)$$

en la déplaçant au moyen d'une courbe auxiliaire arbitraire $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Si donc γ minimise l'énergie, il faut que $\text{Énergie}(\gamma + s\eta) \geq \text{Énergie}(\gamma)$ pour tout s petit, d'où le critère d'annulation de la dérivée suivi de calculs⁶ que nous détaillons scrupuleusement :

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Énergie}(\gamma + s\eta) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda^2(\gamma(t) + s\eta(t), \overline{\gamma(t) + s\eta(t)}) [\dot{\gamma}(t) + s\dot{\eta}(t)] [\dot{\overline{\gamma}}(t) + s\dot{\overline{\eta}}(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left\{ 2\lambda(\lambda_z \eta + \lambda_{\bar{z}} \bar{\eta}) \dot{\gamma} \dot{\overline{\gamma}} + \lambda^2(\dot{\gamma} \dot{\overline{\eta}} + \dot{\overline{\gamma}} \dot{\eta}) \right\} dt && \text{[supprimer les arguments]} \\ &= \text{Re} \int_{[0,1]} \left\{ 2\lambda \lambda_z \eta \dot{\gamma} \dot{\overline{\gamma}} + \lambda^2 \dot{\gamma} \dot{\overline{\eta}} \right\} dt && \text{[reconnaître une partie réelle].} \end{aligned}$$

Il est requis pour la suite de réexprimer la partie réelle du premier intégrande grâce à $\text{Re}(w) = \text{Re}(\overline{w})$ — le terme souligné en question va agréablement disparaître dans un instant — :

$$0 = \text{Re} \int_{[0,1]} \left\{ \underline{2\lambda \lambda_{\bar{z}} \overline{\eta} \dot{\gamma} \dot{\gamma}_o} + \lambda^2 \dot{\gamma} \dot{\overline{\eta}} \right\} dt.$$

Maintenant, en supposant que la variation fixe les extrémités de γ , à savoir que $\eta(0) = \eta(1) = 0$, on peut intégrer par parties l'intégrale qui porte sur le deuxième intégrande et obtenir après factorisation par $\overline{\eta}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Re} \int_{[0,1]} \left\{ 2\lambda \lambda_{\bar{z}} \overline{\eta} \dot{\gamma} \dot{\gamma} + \underbrace{\lambda^2 \dot{\gamma} \dot{\overline{\eta}}}_{\text{dérivée}} \right\} dt \\ &= \text{Re} \int_{[0,1]} \left\{ \underline{2\lambda \lambda_{\bar{z}} \dot{\gamma} \dot{\gamma}_o} - 2\lambda \lambda_z \dot{\gamma}^2 - \underline{2\lambda \lambda_{\bar{z}} \dot{\gamma} \dot{\gamma}_o} - \lambda^2 \ddot{\gamma} \right\} \overline{\eta} dt \\ &= -\text{Re} \int_{[0,1]} \left\{ 2\lambda \lambda_z \dot{\gamma}^2 + \lambda^2 \ddot{\gamma} \right\} \overline{\eta} dt, \end{aligned}$$

une annulation qui ne peut être satisfaite, *pour toute fonction déformatrice quelconque* $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, que si la fonction entre accolades s'annule identiquement sur l'intervalle $[0, 1]$, ce que l'on réécrit comme suit en restituant les arguments des fonctions :

$$\boxed{\ddot{\gamma}(t) + \frac{2\lambda_z(\gamma(t), \overline{\gamma(t)})}{\lambda(\gamma(t), \gamma(t))} \dot{\gamma}^2(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].}$$

Définition. Une courbe $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ satisfaisant l'équation différentielle du second ordre ci-dessus dans un ouvert de coordonnée holomorphe locale z est appelée une *géodésique* pour la métrique conforme $\lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$.

⁶ On note ici pour abrégier $\mu_z := \frac{\partial \mu}{\partial z}$ et $\mu_{\bar{z}} := \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}}$, puis de manière cohérente $\overline{\mu_z} = \frac{\partial \overline{\mu}}{\partial \bar{z}}$ et $\overline{\mu_{\bar{z}}} = \frac{\partial \overline{\mu}}{\partial z}$. Lorsque la fonction est réelle, comme l'est $\lambda = \overline{\lambda}$, on a alors les deux relations supplémentaires $\lambda_z = \overline{\lambda_{\bar{z}}}$ et $\lambda_{\bar{z}} = \overline{\lambda_z}$.

Première étude locale des courbes géodésiques. On remarquera (exercice recommandé) que l'équation des géodésiques implique qu'elles sont paramétrées proportionnellement à leur longueur d'arc. Comme on doit nécessairement s'y attendre, puisque la définition de l'intégrale d'énergie est invariante par changement de coordonnée holomorphe locale, ses points critiques, à savoir les courbes géodésiques, possèdent elles aussi un sens indépendamment du système de coordonnée dans lesquelles on les regarde. On peut aussi examiner (exercice) comment se transforme l'équation du second ordre ci-dessus à travers un changement de coordonnée holomorphe locale $w \mapsto z(w) =: z$. Nous admettrons le lemme suivant qui découle de résultats que nous considérons comme connus sur les équations différentielles ordinaires (ici du second ordre, et dans le plan), notamment l'existence qui repose sur une itération de type Picard-Lindelöf, ou de type théorème de point fixe dans des espaces de Banach appropriés.

Lemme. Soit S une surface \mathcal{C}^∞ compacte munie d'une métrique conforme et soit $\varphi: U \rightarrow V \cong \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ l'une de ses cartes \mathcal{C}^∞ locales. Soit :

$$\lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$$

la représentation de la métrique dans cette carte, où $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est la coordonnée courante sur V . Alors pour tout point $p \in S$ et tout vecteur tangent $\mathbf{v} \in T_p S$, il existe $\varepsilon > 0$ (qui dépend de p et de \mathbf{v}) et il existe une unique courbe géodésique \mathcal{C}^∞ :

$$\gamma: [0, \varepsilon] \longrightarrow S$$

qui est issue de p et qui est dirigée par v :

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}.$$

De plus, lorsque le point p est restreint à varier dans un sous-ouvert fixé $V' \Subset V$ compactement inclus dans V , et lorsque le vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ est lui aussi restreint à varier dans un disque $\mathbb{D}_{R'}$ de rayon $R' > 0$ fixé borné, il existe un $\varepsilon' > 0$ assez petit et uniforme qui dépend des choix de V' et de R' tel que pour tout point $p' \in V'$ et pour tout vecteur $\mathbf{v}' \in \mathbb{D}_{R'}$ il existe une unique courbe géodésique \mathcal{C}^∞ :

$$\gamma_{p', \mathbf{v}'}: [0, \varepsilon'] \longrightarrow S$$

définie sur $[0, \varepsilon']$ qui est issue de p' et qui est dirigée par \mathbf{v}' :

$$\gamma(0) = p' \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}'. \quad \square$$

Or l'équation différentielle des géodésiques étant de la forme :

$$0 = \ddot{\gamma}(t) + \frac{2\lambda_z(\gamma(t), \overline{\gamma(t)})}{\lambda(\gamma(t), \overline{\gamma(t)})} \dot{\gamma}^2(t),$$

on se convainc aisément que si $\gamma(t)$ en est une solution sur un intervalle $[0, \varepsilon]$, alors pour toute constante $c > 0$, la courbe à temps de parcours renormalisé $t \mapsto \gamma(ct)$ qui est définie sur $[0, \frac{\varepsilon}{c}]$ en est aussi une solution. On déduit de cette observation et de la deuxième partie du lemme précédent que pour tout $p \in S$, le sous-ensemble

$$\mathcal{D}_p := \{ \mathbf{v} \in T_p S : \gamma_{p, \mathbf{v}} \text{ est définie sur } [0, 1] \}$$

contient toujours un disque fermé :

$$\overline{\mathbb{D}}_{R_p} = \{ \mathbf{v} \in T_p S : \|\mathbf{v}\|^{\text{conf}} \leq R_p \}$$

de rayon $R_p > 0$, où l'on rappelle que la *norme conforme* $\|\mathbf{v}\|_p^{\text{conf}}$ d'un vecteur tangent $\mathbf{v} \in T_p S \simeq \mathbb{C}$ est définie par :

$$\boxed{(\|\mathbf{v}\|_p^{\text{conf}})^2 := \lambda^2(z(p), \overline{z(p)}) \mathbf{v} \overline{\mathbf{v}}}.$$

De plus, la compacité de S et à nouveau la deuxième partie du lemme précédent assurent même l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que la courbe géodésique $\gamma_{p,\mathbf{v}}$ est définie pour tout point $p \in S$ et tout vecteur $\mathbf{v} \in T_p S$ de norme conforme $\|\mathbf{v}\|_p^{\text{conf}} \leq \varepsilon$.

Définition. L'application exponentielle au point $p \in S$:

$$\begin{aligned} \exp_p: T_p S &\longrightarrow S \\ \mathbf{v} &\longmapsto \gamma_{p,\mathbf{v}}(1) \end{aligned}$$

associe à un vecteur $\mathbf{v} \in T_p S$ l'extrémité au temps 1 de la courbe géodésique issue de p et dirigée par \mathbf{v} . Elle est donc bien définie sur l'ouvert $\mathcal{D}_p \subset T_p S$ qui contient au moins un petit disque $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon_p} \subset \mathcal{D}_p$ d'un certain rayon $\varepsilon_p > 0$.

Lemme. L'application exponentielle ainsi définie envoie un certain voisinage-disque ouvert $\mathbb{D}_{\varepsilon'_p}$ de 0 dans $T_p S$, avec $\varepsilon'_p > 0$, difféomorphiquement sur un voisinage de p .

DÉMONSTRATION. La différentielle de l'application exponentielle \exp_p à l'origine $0 \in T_p S$ appliquée à un vecteur tangent $\mathbf{v} \in T_p S \cong \mathbb{R}^2$ le reproduit identique à lui-même :

$$\begin{aligned} D_0(\exp_p)(\mathbf{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{p,t\mathbf{v}}(1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{p,\mathbf{v}}(t) \\ &= \dot{\gamma}_{p,\mathbf{v}}(0) \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ainsi donc cette différentielle $D_0(\exp_p)$ est égale à l'identité. La conclusion découle alors instantanément du théorème d'inversion locale. \square

Perte irrémédiable de la structure conforme par passage aux cartes exponentielles. Toutefois, en général, l'application exponentielle n'est pas holomorphe. Donc si l'on utilise \exp_p^{-1} comme carte locale, non seulement on perd l'holomorphie, mais encore, puisque la carte exponentielle n'est que \mathcal{C}^∞ , on perd aussi la structure conforme. Afin de s'en convaincre, il faut examiner comment l'expression :

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$$

se transforme à travers un changement quelconque de coordonnées \mathcal{C}^∞ :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

On calcule alors aisément les deux différentielles :

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv, \\ dy &= y_u du + y_v dv, \end{aligned}$$

puis leur somme au carré, que l'on développe et réorganise :

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2 \\ &= (x_u^2 + y_u^2) du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) du dv + (x_v^2 + y_v^2) dv^2 \end{aligned}$$

et l'on voit apparaître en effet un terme croisé $du dv$ in-annulable dans la métrique transformée :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \lambda^2(x(u, v), y(u, v)) \left\{ (x_u^2 + y_u^2) du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) du dv + (x_v^2 + y_v^2) dv^2 \right\} \\ &=: E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \end{aligned}$$

Les métriques gaussiennes (\equiv riemanniennes en dimension 2) sont alors par définition les métriques de cette forme générale dans un système de coordonnées quelconque, où les trois fonctions E, F, G des deux coordonnées ambiantes satisfont bien entendu en tout point (u, v) une inégalité :

$$EG - F^2 > 0$$

qui garantit la positivité de la forme quadratique infinitésimale ds^2 . On vérifie — exercice fortement recommandé — que cette forme générale $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ reste invariante à travers tout autre changement de coordonnées \mathcal{C}^∞ , disons $(u, v) \mapsto (u'(u, v), v'(u, v)) =: (u', v')$. Ainsi une telle métrique quadratique infinitésimale possède un sens que l'on peut globaliser sur toute surface S de classe \mathcal{C}^∞ et elle assigne alors — de manière intrinsèque — à tout vecteur infinitésimal de coordonnées $(du, dv)|_{(u,v)}$ basé en un point (u, v) vu dans une telle carte locale la longueur :

$$\boxed{\text{longueur de } (du, dv)|_{(u,v)} := \sqrt{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2}}.$$

Si l'on préfère parler de métrique sur le fibré tangent à S , on écrira que le carré de la norme riemannienne $\|\mathbf{v}\|^{\text{riem}}$ d'un vecteur de coordonnées :

$$\mathbf{v} = (\dot{u}, \dot{v})$$

basé en un point de coordonnées $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est égal à :

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}} := \sqrt{E(u, v) \dot{u}^2 + 2F(u, v) \dot{u} \dot{v} + G(u, v) \dot{v}^2}}.$$

En résumé, l'utilisation que nous allons faire des cartes exponentielles inverses locales :

$$\exp_p^{-1}: (S, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

nous force à quitter l'univers (restreint) des métriques conformes et à étudier les métriques riemanniennes générales avant de pouvoir établir — enfin — que les courbes géodésiques minimisent localement la longueur.

Reprise de la théorie au niveau riemannien. En tout cas, il faut commencer par redéfinir les concepts de base dans le cadre des métriques gaussiennes. Soit donc S une surface \mathcal{C}^∞ que l'on suppose munie d'une métrique riemannienne. La *longueur* d'une courbe $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ aboutissant dans une carte locale munie des coordonnées $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$\text{Longueur}(\gamma) := \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t)) \dot{u}(t)^2 + 2F(u(t), v(t)) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(u(t), v(t)) \dot{v}(t)^2} dt,$$

et son *énergie* (disparition de la racine carrée) est :

$$\text{Énergie}(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ E(u(t), v(t)) \dot{u}(t)^2 + 2F(u(t), v(t)) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(u(t), v(t)) \dot{v}(t)^2 \right\} dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\int_a^b fg)^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$ avec $f := \sqrt{h}$ et $g := 1$ qui s'écrit :

$$\left(\int_a^b \sqrt{h} \cdot 1 \right)^2 \leq \int_a^b h \cdot \int_a^b 1,$$

nous donne ici une inégalité entièrement similaire à celle que nous venons de voir dans le contexte conforme :

$$[\text{Longueur}(\gamma)]^2 \leq 2(b-a) \text{Énergie}(\gamma).$$

L'inégalité est une égalité si et seulement si les deux fonctions sont multiples l'une de l'autre par une constante, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\text{const.} \equiv E(u(t), v(t)) \dot{u}(t)^2 + 2F(u(t), v(t)) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(u(t), v(t)) \dot{v}(t),$$

ce qui signifie que la courbe γ est paramétrisée proportionnellement à sa longueur d'arc.

Il s'agit maintenant de redériver les équations d'Euler-Lagrange qui caractérisent les extremas de la fonctionnelle d'énergie, à savoir les courbes géodésiques. Puisque cela est compris depuis plus d'un siècle et demi en géométrie à un nombre quelconque de dimensions, nous nous permettrons d'utiliser une notation indicielle :

$$x = (x^1, x^2) \equiv (u, v)$$

pour les deux coordonnées ambiantes et d'abrégier l'expression du ds^2 au moyen d'une expression sommatoire :

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) dx^j dx^k,$$

avec bien entendu les coïncidences notationnelles :

$$g_{11} \equiv E, \quad g_{12} = g_{21} \equiv F, \quad g_{22} \equiv G,$$

et aussi les propriétés de symétrie et de positivité définie de la matrice $(g_{jk})_{\substack{1 \leq k \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ de la métrique quadratique infinitésimale. Nous admettrons alors la proposition classique suivante sans en détailler scrupuleusement la démonstration.

Proposition. *L'équation différentielle ordinaire vectorielle⁷ du second ordre à coefficients \mathcal{C}^∞ que satisfont les courbes $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ dites géodésiques qui sont 'points critiques' de la fonctionnelle « Énergie » pour la métrique riemannienne ci-dessus s'écrit explicitement :*

$$0 = \ddot{\gamma}^i(t) + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^k(t) \quad (i=1,2),$$

où les fonctions $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$, appelés coefficients de Christoffel de la métrique riemannienne, sont définis par les formules :

$$\Gamma_{jk}^i(x) := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{il}(x) \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right\}$$

(i, j, k = 1, 2)

⁷ Il s'agit en effet d'un système de deux équations différentielles ordinaires du second ordre.

dans lesquelles les coefficients métriques à indices supérieurs sont ceux de la matrice $(g^{jk})_{1 \leq k \leq 2}^{1 \leq j \leq 2}$ de la matrice inverse de $(g_{jk})_{1 \leq j \leq 2}^{1 \leq k \leq 2}$, à savoir qui satisfont :

$$\sum_{l=1}^2 g^{jl} g_{lk} = \delta_j^k = \sum_{l=1}^2 g_{jl} g^{lk},$$

pour tous $j, k = 1, 2$. □

Expression de la métrique ds^2 dans les coordonnées polaires géodésiques. Maintenant, notre but est de ré-écrire la métrique infinitésimale ds^2 dans les coordonnées locales que définit l'application exponentielle inverse⁸. Soit donc un point $p \in S$ de la surface et soit son espace tangent $T_p S \cong \mathbb{R}^2$ que l'on munit à la fois de deux coordonnées cartésiennes (u, v) et de deux coordonnées polaires (r, θ) :

$$\exp_p^{-1}: S \longrightarrow T_p S \cong \mathbb{R}^2 \ni (u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Par définition de l'application exponentielle et par construction, dans ces nouvelles coordonnées (r, θ) , la famille des géodésiques issues de p s'identifie aux rayons-vecteurs :

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2: \theta = \theta_0\}$$

d'angle θ_0 constant. Dans ces nouvelles coordonnées (r, θ) , notre métrique gaussienne infinitésimale s'écrit alors sous une forme que nous allons examiner plus en détail :

$$ds^2 = g_{11} dr^2 + 2 g_{12} dr d\theta + g_{22} d\theta^2,$$

où les g_{jk} sont trois fonctions \mathcal{C}^∞ de (r, θ) . Comme les courbes-rayons $r \mapsto (r, \theta_0)$ satisfont l'équation des géodésiques de la proposition qui précède, on doit avoir dans ces coordonnées (r, θ) les deux équations :

$$\begin{aligned} \underline{i = 1}: & \quad 0 = 0 + \Gamma_{11}^1(r, \theta_0) \cdot 1^2, \\ \underline{i = 2}: & \quad 0 = 0 + \Gamma_{11}^2(r, \theta_0) \cdot 1^2, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement les annulations identiques de deux des coefficients de Christoffel :

$$0 \equiv \Gamma_{11}^1 \equiv \Gamma_{11}^2.$$

Or par définition, ces deux équations s'écrivent en fonction des coefficients métriques :

$$0 \equiv \sum_{l=1}^2 g^{il} \left\{ 2 \frac{\partial g_{1l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right\} \quad (i=1, 2),$$

où $\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial r}$ pour $l = 1$ et $\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial \theta}$ pour $l = 2$, en introduisant la coïncidence notationnelle suivante :

$$(x^1, x^2) \equiv (r, \theta)$$

pour se ramener aux notations générales. Mais puisque la matrice $(g^{il})_{1 \leq i \leq 2}^{1 \leq l \leq 2}$ est inversible, on en déduit immédiatement que l'on a en fait :

$$0 \equiv 2 \frac{\partial g_{1l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l},$$

pour $l = 1, 2$.

⁸ Nous n'introduisons pas de notation pour désigner les petits ouverts autour de points $p \in S$ dans lesquels les applications exponentielles inverses sont définies.

En particulier, pour $l = 1$, on obtient :

$$0 \equiv \frac{\partial g_{11}}{\partial r}.$$

Or, comme on pouvait s'assurer à l'avance par une simple normalisation linéaire préalable que la métrique gaussienne en p s'identifie à la métrique pythagoricienne à l'origine $(0, 0) \equiv (0, \theta)$, à savoir :

$$\begin{aligned} ds^1|_p &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2|_{(0,0)} \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2|_{(0,\theta)} \\ &= dr^2|_{(0,\theta)}, \end{aligned}$$

on voit que $g_{11}(0, \theta) \equiv 1$, et puisque l'on vient de voir que la dérivée partielle par rapport à r s'annule identiquement, on obtient finalement que :

$$\boxed{g(r, \theta) \equiv \text{const.} \equiv 1}.$$

Une fois cela acquis, revenons à la deuxième équation identique pour $l = 2$ obtenue à l'instant qui s'écrit maintenant :

$$0 \equiv \frac{\partial g_{12}}{\partial r}(r, \theta).$$

À nouveau grâce à la normalisation de la métrique au point central qui donne ici $g_{12}(0, \theta) \equiv 0$, on déduit une l'annulation identique du coefficient central :

$$\boxed{0 \equiv g_{12}(r, \theta)}.$$

Pour conclure, puisque la métrique quadratique infinitésimale est définie positive, on doit avoir $g_{22}(r, \theta) > 0$ lorsque $r > 0$. Résumons le résultat obtenu sous la forme d'un énoncé.

Proposition. *En coordonnées polaires géodésiques (r, θ) , toute métrique riemannienne infinitésimale s'écrit sous une forme normale simplifiée :*

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta) d\theta^2,$$

pour une certaine fonction G de classe \mathcal{C}^∞ strictement positive lorsque $r > 0$. \square

Il nous est enfin possible de démontrer que les géodésiques minimisent localement les distances.

Théorème. *Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'application :*

$$\exp_p: \{ \mathbf{v} \in T_p S: \|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}} < \delta \} \longrightarrow S$$

soit définie et constitue un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur son image. Alors pour tout point de la forme $q = \exp_p(\mathbf{v})$ avec $\|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}} < \varepsilon$, la géodésique :

$$\gamma_{p,\mathbf{v}}: [0, 1] \longrightarrow S$$

issue de p et dirigée par \mathbf{v} est l'unique courbe⁹ \mathcal{C}^∞ de plus petite longueur allant de p à q et l'on a aussi :

$$\text{dist}(p, q) = \|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}} = \text{Longueur}(\gamma_{p,\mathbf{v}}([0, 1])).$$

⁹ L'énoncé reste vrai plus généralement pour des courbes qui sont \mathcal{C}^1 par morceaux, voire qui sont seulement rectifiables.

DÉMONSTRATION. Comme on l’aura deviné, c’est en se plaçant dans les coordonnées polaires géodésiques (r, θ) que la démonstration va se déployer dans toute la limpidité que Gauss découvrit et finalisa aux alentours de 1822.

La géodésique issue de l’origine et dirigée par le vecteur \mathbf{v} s’écrit naturellement dans ces coordonnées (r, θ) :

$$\gamma_{p,\mathbf{v}}(t) = (t\|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}}, \theta_0)$$

pour $t \in [0, 1]$, où θ_0 est l’angle que fait \mathbf{v} avec l’axe des x^1 . Soit donc une autre courbe \mathcal{C}^∞ quelconque $\mu: [0, 1] \rightarrow S$:

$$\mu(t) = (r(t), \theta(t))$$

qui part de l’origine et aboutit au même point final :

$$r(0) = 0 \quad \text{et} \quad (r(1), \theta(1)) = (\|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}}, \theta_0).$$

Puisque $ds^1 = dr^2 + G d\theta^2$, sa longueur est par définition égale à une intégrale que l’on minore extrêmement facilement :

$$\begin{aligned} \text{Longueur}(\mu) &= \int_0^1 \sqrt{\dot{r}(t)^2 + G(r(t), \theta(t)) \dot{\theta}(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \dot{r}(t) dt \right| \\ &= |r(1) - r(0)| \\ &= \|\mathbf{v}\|_p^{\text{riem}}, \end{aligned}$$

avant d’appliquer l’inégalité des accroissements finis pour conclure sans effort. \square

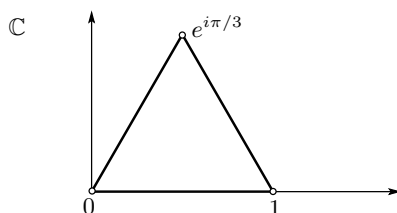
Corollaire. Soit S une surface compacte sans bord de classe \mathcal{C}^∞ . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute paire de points $p, q \in S$ situés à distance $\text{dist}(p, q) \leq \varepsilon$ sont connectés par une unique courbe géodésique $\gamma_{p,q}$ dont la longueur réalise leur distance :

$$\text{Longueur}(\gamma_{p,q}) = \text{dist}(p, q).$$

DÉMONSTRATION. Laissée en exercice d’application des concepts du cours. \square

Triangulations des surfaces compactes \mathcal{C}^∞ sans bord. Une triangulation d’une surface compacte semble être ce à quoi l’on pense, mais il faut se méfier des intuitions imprécises et fixer très rigoureusement les concepts si l’on veut obtenir des théorèmes corrects. En particulier, nous insisterons sur la classe — ici \mathcal{C}^∞ pour simplifier — des triangulations considérées.

Définition. Soit Δ le triangle équilatéral fermé dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ de sommets $0, 1, e^{i\pi/3}$:



et dont les trois arêtes : $[0, 1]$, $[1, e^{i\pi/3}]$ et $[e^{i\pi/3}, 0]$ sont toutes de longueur unité. On dit qu'une surface lisse S admet une triangulation \mathcal{C}^∞ s'il existe un nombre fini $N < +\infty$ d'applications de classe \mathcal{C}^∞ :

$$\psi_k: \Delta \longrightarrow S \quad (i=1 \dots N)$$

dont les images recouvrent S :

$$\bigcup_{k=1}^N \psi_k(\Delta) = S,$$

qui établissent toutes des difféomorphismes sur leurs images respectives :

$$\Delta \xrightarrow{\sim} \psi_k(\Delta) =: T_k$$

appelées *triangles* T_k dans S de sommets :

$$\varphi_k(0), \quad \varphi_k(1), \quad \varphi_k(e^{i\pi/3}),$$

et d'arêtes :

$$\varphi_k([0, 1]), \quad \varphi_k([1, e^{i\pi/3}]), \quad \varphi_k([e^{i\pi/3}, 0]),$$

de telle sorte que pour toute paire de triangles T_{k_1} et T_{k_2} dans S d'indices distincts quelconques $1 \leq k_1 \neq k_2 \leq N$, la trichotomie suivante soit satisfaite :

(i) ou bien ces deux triangles sont disjoints :

$$T_{k_1} \cap T_{k_2} = \emptyset;$$

(ii) ou bien ils s'intersectent exactement le long d'une, et d'une seule arête commune :

$$T_{k_1} \cap T_{k_2} = \varphi_{k_1}([\alpha_{k_1}, \beta_{k_1}]) = \varphi_{k_2}([\alpha_{k_2}, \beta_{k_2}]),$$

pour certains $\alpha_{k_1}, \beta_{k_1}, \alpha_{k_2}, \beta_{k_2} \in \{0, 1, e^{i\pi/3}\}$ avec $\alpha_{k_1} \neq \beta_{k_1}$ et $\alpha_{k_2} \neq \beta_{k_2}$;

(iii) ou bien ils s'intersectent le long d'un et d'un seul sommet :

$$T_{k_1} \cap T_{k_2} = \varphi_{k_1}(\alpha_{k_1}) = \varphi_{k_2}(\alpha_{k_2}),$$

pour certains $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in \{0, 1, e^{i\pi/3}\}$.

De manière analogue et plus généralement, on peut définir la notion de *polygone* dans S comme étant l'image par un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ d'un fermé $P \subset \mathbb{R}^2$ d'intérieur $\text{Int}(P)$ connexe dont le bord ∂P est une réunion finie de segments de droites fermée non réduits à un point. Voici maintenant un résultat absolument fondamental de la théorie.

Théorème. *Toute surface S de classe \mathcal{C}^∞ compacte et sans bord qui est munie d'une métrique conforme¹⁰ \mathcal{C}^∞ admet une triangulation finie \mathcal{C}^∞ au sens de la définition précise qui précède.*

DÉMONSTRATION. Une fois que l'on a muni S d'une métrique conforme de classe \mathcal{C}^∞ , l'idée géométrique est simple et naturelle. On choisit un grand nombre de points distincts deux à deux sur la surface de telle sorte qu'aucun ne soit loin de son plus proche voisin, et, au moyen d'une unique géodésique — pour la métrique conforme en question —, on connecte toute paire de points qui sont assez proches l'un de l'autre pour qu'une unique géodésique de distance minimale existe entre eux. Ces connections géodésiques découpent

¹⁰ La même démonstration fonctionne mot pour mot avec une métrique riemannienne \mathcal{C}^∞ , et comme il existe toujours des métriques riemanniennes \mathcal{C}^∞ sur les variétés compactes (ou non compactes) \mathcal{C}^∞ , ce théorème est donc vrai pour toute surface \mathcal{C}^∞ sans bord.

alors la surface S en un certain nombre de régions dont on peut assurer de surcroît qu'elles sont toutes petites, contenues chacune dans une petite boule géodésique. Les subdivisions induites par connections géodésiques — on est forcé d'ajouter tous les points d'intersection entre ces petites géodésiques — ne posent pas de problème, grâce au théorème d'unicité des géodésiques à vecteur tangent assigné, théorème qui assure alors que *toutes les géodésiques en question s'intersectent avec un angle non nul*. On pourrait s'imaginer que le choix des points d'un tel maillage puisse être ajusté à l'avance pour que toutes les régions en question soient d'emblée des triangles, mais en général, cela est malaisé, et il semble plus raisonnable d'admettre que les régions en question puissent être certains polygones compliqués — mais toujours petits car tous contenus dans de petites boules géodésiques — dont la forme n'est pas contrôlée *a priori*. Mais alors on s' imagine parfaitement bien qu'il ne reste plus qu'à redécouper ces polygones en triangles, exactement comme on le ferait en géométrie euclidienne standard, et c'est à ce niveau là qu'il faut se méfier de raisonnements qui pourraient cacher des erreurs, car les polygones en question n'ont aucune raison d'être convexes.

Voici maintenant les détails.

Soit donc S une surface \mathcal{C}^∞ compacte sans bord. On la munit d'une métrique conforme \mathcal{C}^∞ . Soit un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que toute paire de points de S situés à distance $\leq \varepsilon$ l'un de l'autre puissent être connectés par une unique géodésique qui minimise la distance (globale) entre eux deux. Par compacité de S , on peut supposer de plus que pour le même $\varepsilon > 0$, l'application $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ est un difféomorphisme de $\{v \in T_p S : \|v\|_p^{\text{conf}} < 2\varepsilon\}$ sur son image dans S , et ce, pour tout point $p \in S$ (bijectivité locale uniforme).

On se convainc alors aisément (exercice) que l'on peut choisir suffisamment de points $p_1, \dots, p_n \in S$ pour que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

- (i) tout point $p \in S$ se situe à distance $\leq \varepsilon$ d'au moins un point p_i ;
- (ii) pour tout point p_i dans la liste $\{p_1, \dots, p_n\}$, il existe deux autres points distincts p_j et p_k dans la liste (donc avec $j \neq i, k \neq i, j \neq k$) tels que le triplet $\{p_i, p_j, p_k\}$ forme un triangle satisfaisant :

$$\text{dist}(p_i, p_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dist}(p_i, p_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dist}(p_j, p_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dans ces conditions, tout couple de points $\{p_{i_1}, p_{i_2}\}$ situés à distance $\text{dist}(p_{i_1}, p_{i_2}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ peut être joint par un unique segment de géodésique de classe \mathcal{C}^∞ noté γ_{i_1, i_2} dont la longueur réalise leur distance :

$$\text{Longueur}(\gamma_{i_1, i_2}) = \text{dist}(p_{i_1}, p_{i_2}).$$

Mais ce n'est pas tout. Afin d'éviter d'avoir à considérer des cas dégénérés où triangles et polygones seraient aplatis, on peut en outre s'assurer à l'avance que :

- (iii) pour toute paire de tels segments géodésiques γ_{i_1, i_2} et γ_{j_1, j_2} , si ils s'intersectent en un point $q \in \gamma_{i_1, i_2} \cap \gamma_{j_1, j_2}$ (qui peut être l'une de leurs extrémités), alors ils le font avec un angle $\neq 0 \pmod{\pi}$ en ce point.

DÉMONSTRATION. En effet, lorsqu'un tel point d'intersection existe, par unicité des géodésiques à direction tangente prescrite, la réunion $\gamma_{i_1, i_2} \cup \gamma_{j_1, j_2}$ forme alors un unique segment de géodésique \mathcal{C}^∞ . Une telle configuration dégénérée peut alors être évitée en perturbant par exemple très légèrement la position d'une extrémité de l'un des deux segments géodésiques. Grâce à la bijectivité locale uniforme de l'application exponentielle, on peut même voir qu'il est possible de s'assurer que l'intersection des deux segments de

géodésiques (perturbés) devient vide. Une fois le nombre n de points p_1, \dots, p_n fixé, on peut s'assurer par récurrence sur un entier k allant de 1 à n que toutes les tangentialités éventuelles disparaissent (exercice). \square

Assertion. *Deux tels segments géodésiques quelconques γ_{i_1, i_2} et γ_{j_1, j_2} s'intersectent alors en au plus un point.*

DÉMONSTRATION. Par l'absurde, si γ_{i_1, i_2} et γ_{j_1, j_2} s'intersectaient en deux points distincts q' et q'' , alors en considérant l'application exponentielle de centre q' où ces deux segments géodésiques se rencontrent, nécessairement avec un angle non nul grâce à (iii), il en découlerait que q'' serait l'image de deux vecteurs tangents distincts de l'espace tangent $T_{q'}S$, ce qui contredirait la bijectivité locale uniforme de l'application exponentielle. \square

Assertion. *Pour tout triplet de points $\{p_i, p_j, p_k\}$ satisfaisant :*

$$\text{dist}(p_i, p_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dist}(p_i, p_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dist}(p_j, p_k) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

la réunion des trois arcs géodésiques $\gamma_{i,j}, \gamma_{i,k}, \gamma_{j,k}$ qui les joignent deux à deux divise la surface S en :

- *une région fermée T_{p_i, p_j, p_k} , bordée par $\gamma_{i,j} \cup \gamma_{i,k} \cup \gamma_{j,k}$, petite car contenue dans $\{q \in S : \text{dist}(q, p_i) \leq \varepsilon\}$, qui est \mathcal{C}^∞ -difféomorphe à un triangle fermé non aplati du plan euclidien, e.g. le triangle équilatéral Δ ;*
- *l'extérieur de ce triangle, à savoir l'ouvert $S \setminus T_{p_i, p_j, p_k}$.*

DÉMONSTRATION. Chacun des trois arcs géodésiques, par exemple $\gamma_{i,j}$, peut être prolongé comme segment géodésique de longueur $3 \frac{\varepsilon}{3} \geq 3 \text{dist}(p_i, p_j)$ dans les deux directions de manière symétrique, en partant de p_i ou de p_j . Grâce au lemme qui dit que l'exponentielle forme un difféomorphisme local uniforme, cette géodésique prolongée divise alors l'ouvert :

$$\exp_{p_i}(\{v \in T_{p_i}S : \|v\|_{p_i}^{\text{conf}} < \varepsilon\}) \subset S$$

en deux morceaux fermés dont l'intersection est le segment géodésique central. Le triangle T_{p_i, p_j, p_k} est alors l'intersection appropriée de trois de ces six ensembles fermés. Grâce à la propriété (iii) ajustée à l'avance, les angles en p_i, p_j, p_k des paires de segments géodésiques qui en sont issus sont tous non nuls. Grâce au lemme qui précède, on peut établir rigoureusement que T_{p_i, p_j, p_k} est \mathcal{C}^∞ -difféomorphe à un triangle fermé. \square

Nous augmentons alors la collection de points $\{p_1, \dots, p_n\}$ en y ajoutant tous les points d'intersection (uniques ou inexistant) entre paires de segments géodésiques $\gamma_{i_1, i_2} \cap \gamma_{j_1, j_2}$, ce qui nous donne une nouvelle collection $\{p_1, \dots, p_n, \dots, p_N\}$ avec $N \geq n$. Notons que nous ne rajoutons aucun arc géodésique.

Alors les composantes connexes de l'ouvert :

$$S \setminus \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \gamma_{i_1, i_2}$$

sont en nombre fini, et chacune d'entre elle est bordée par un nombre fini de portions¹¹ des segments géodésiques initiaux γ_{i_1, i_2} . On considérera la *fermeture* de ces polygones géodésiques, i.e. en incluant le bord.

¹¹ Nous venons en effet d'ajouter des points d'intersection.

Il est important d'observer que par construction, tout tel polygone géodésique fermé P est contenu dans au moins un des petits triangles géodésiques initiaux T_{i_1, i_2, i_3} pour des indices $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n$, et est constitué d'au moins trois sommets. Le but maintenant est de subdiviser chacun de ces polygones géodésiques P qui comporte un nombre ≥ 4 de sommets en un nombre fini de sous-triangles géodésiques. La méthode va consister à lui ajouter un certain nombre de segments géodésiques entre paires de sommets bien choisis. Géométriquement parlant, les raisonnements qui vont suivre seraient les mêmes si on travaillait avec des polygones en géométrie euclidienne dans le plan.

Soit donc P un polygone géodésique quelconque dont le nombre de sommets est ≥ 4 . Afin de subdiviser le polygone P en triangles géodésiques, il suffit clairement, grâce à un raisonnement par récurrence, de démontrer qu'il existe toujours une paire de sommets $\hat{p}, \hat{q} \in \text{sommets}(P)$ tels que l'intérieur :

$$\gamma_{\hat{p}, \hat{q}} \setminus \{\hat{p}, \hat{q}\} \subset \text{Int}(P)$$

du segment de géodésique $\gamma_{\hat{p}, \hat{q}}$ qui les joint est entièrement contenu dans l'intérieur $\text{Int}(P)$ du polygone. Or puisque P n'a aucune raison *a priori* d'être (géodésiquement) convexe, il faut commencer par bien choisir un point \hat{p}_0 qui pourra éventuellement être un tel \hat{p} qui attend son *alter ego* \hat{q} .

Assertion. *Il existe au moins un sommet $\hat{p}_0 \in P$ qui a la propriété que le triangle géodésique $T_{\hat{p}_0, p', p''}$ formé par \hat{p}_0 et les deux sommets $p', p'' \in P$ qui lui sont adjacents dans ∂P est localement contenu dans P au voisinage de \hat{p}_0 .*

Notons que le segment géodésique $\gamma_{p', p''}$ qui constitue le troisième côté de $T_{\hat{p}_0, p', p''}$ n'a aucune raison d'appartenir à la famille initiale de segments géodésiques γ_{i_1, i_2} .

DÉMONSTRATION. En effet, l'application exponentielle permet de se ramener à un raisonnement connu de géométrie euclidienne dans le plan : une famille de « grands » disques géodésiques centrés en un point qui contiennent notre polygone P et dont le rayon décroît progressivement et continûment finit toujours par toucher une première fois un certain sommet $\hat{p}_0 \in P$; le triangle $T_{\hat{p}_0, p', p''}$ est alors nécessairement contenu dans ce disque limite qui touche \hat{p}_0 , et le polygone P lui aussi (bien entendu, il peut y avoir plusieurs sommets de P sur le cercle limite). Par conséquent, on a nécessairement :

$$T_{\hat{p}_0, p', p''} \cap V_{\hat{p}_0} = P \cap V_{\hat{p}_0},$$

pour un certain voisinage $V_{\hat{p}_0}$ de \hat{p}_0 dans S . □

Soit donc \hat{p}_0 un tel sommet de P tel que le triangle géodésique $T_{\hat{p}_0, p', p''}$ est localement contenu dans P au voisinage de \hat{p}_0 . Entre p' et p'' , le bord de P est constitué d'un nombre fini ≥ 2 d'autres segments géodésiques, à savoir :

$$\partial P \setminus \{\gamma_{\hat{p}_0, p'}, \gamma_{\hat{p}_0, p''}\}$$

Examinons alors plusieurs configurations possibles en commençant toujours par celles qui sont les plus favorables.

□ Si la partie restante du bord $\partial P \setminus \{\gamma_{\hat{p}_0, p'}, \gamma_{\hat{p}_0, p''}\}$ est entièrement contenue dans l'extérieur $S \setminus T_{\hat{p}_0, p', p''}$, alors l'intérieur du segment géodésique $\gamma_{p', p''}$ est contenu dans l'intérieur de P , et donc il suffit dans ce cas de prendre $\hat{p} := p'$ et $\hat{q} := p''$.

□ Si la partie restante du bord $\partial P \setminus \{\gamma_{\widehat{p}_0, p'}, \gamma_{\widehat{p}_0, p''}\}$ intersecte le troisième côté $\gamma_{p', p''}$ sans rentrer dans l'intérieur du triangle $T_{\widehat{p}_0, p', p''}$, on peut encore trouver (exercice) une paire de sommets :

$$\widehat{p}, \widehat{q} \in \partial P \cap \gamma_{p', p''}$$

dont le segment géodésique satisfait une propriété :

$$\text{Int}(\gamma_{\widehat{p}, \widehat{q}}) \subset \text{Int}(P) \cap \gamma_{p', p''}$$

qui implique la propriété désirée.

Supposons donc maintenant (situation défavorable) que :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} \text{le reste du bord } \partial P \setminus \{\gamma_{\widehat{p}_0, p'}, \gamma_{\widehat{p}_0, p''}\} \\ \text{rentre dans l'intérieur du triangle } T_{\widehat{p}_0, p', p''}. \end{array} \right.$$

Soit alors un point :

$$\widehat{q}_0 \in \text{Int}(T_{\widehat{p}_0, p', p''}) \cap (\partial P \setminus \{\gamma_{\widehat{p}_0, p'}, \gamma_{\widehat{p}_0, p''}\})$$

avec $\text{dist}(\widehat{p}_0, \widehat{q}_0) = \text{dist}(\widehat{p}_0, \partial P \setminus \{\gamma_{\widehat{p}_0, p'}, \gamma_{\widehat{p}_0, p''}\})$

qui minimise, dans l'intérieur de notre triangle, la distance (géodésique) de notre sommet initial \widehat{p}_0 au reste du bord. Bien entendu, cette distance minimale est positive, puisque nous savons que l'intérieur du triangle $T_{\widehat{p}_0, p', p''}$ est contenu dans l'intérieur de P près de \widehat{p}_0 .

□ Lorsque \widehat{q}_0 est un sommet du polygone, la conclusion est gagné sans effort, car alors l'intérieur du segment géodésique $\gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_0}$ qui est contenu dans l'intérieur du triangle, est nécessairement aussi contenu dans l'intérieur du polygone puisque $\text{Int}(\gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_0})$ ne rencontre par définition pas ∂P grâce à la minimalité de la distance.

Supposons donc que ce point \widehat{q}_0 minimisant la distance appartienne à l'intérieur d'un segment géodésique contenu dans le bord restant du polygone, et notons alors r' et r'' les deux sommets de ce segment $\gamma_{r', r''}$. Grâce à un paramétrage bijectif lisse $t \mapsto \widehat{q}_t$ des points de $\gamma_{r', r''}$ défini pour $t \in [-1, 1]$ et satisfaisant $\widehat{q}_{-1} = r'$ et $\widehat{q}_1 = r''$, on produit un faisceau :

$$t \mapsto \gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_t}$$

de segments géodésiques issus de \widehat{p}_0 , pivotant autour de \widehat{p}_0 et aboutissant au point variable \widehat{q}_t . Supposons temporairement que ces segments ne rencontrent jamais ni $\gamma_{\widehat{p}_0, p'}$, ni $\gamma_{\widehat{p}_0, p''}$. Lorsque le paramètre t croît de 0 vers 1, ou lorsqu'il décroît de 0 vers -1, il peut se produire un certain premier instant en lequel $\gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_t}$ rencontre le bord restant $\partial P \setminus \{\gamma_{\widehat{p}_0, r'}, \gamma_{\widehat{p}_0, r''}\}$ (au voisinage de \widehat{p}_0 , on sait qu'aucune rencontre ne se produit jamais).

□ Si une telle première rencontre se produit soit du côté négatif en un instant ≥ -1 , soit du côté positif en un instant ≤ 1 , alors on peut toujours trouver (exercice) un sommet \widehat{r} du bord restant tel que :

$$\text{Int}(\gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{r}}) \subset \text{Int}(P).$$

Donc on peut supposer (situation défavorable) qu'aucune rencontre avec le bord restant ne se produise du tout, que ce soit du côté de r' ou de celui de r'' , et nous affirmons alors qu'une telle circonstance ne peut pas se produire sous l'hypothèse (*) effectuée plus haut d'après laquelle le reste du bord du polygone rentre dans le triangle initial $T_{\widehat{p}_0, p', p''}$.

En effet, si du côté négatif pour un certain $t \geq -1$, ou du côté positif pour un certain $t \leq 1$, le faisceau de segments géodésiques $t \mapsto \gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_t}$ rencontre l'un des deux segments

géodésiques initiaux $\gamma_{\widehat{p}_0, p'}$ ou $\gamma_{\widehat{p}_0, p''}$ issus de \widehat{p}_0 , on a nécessairement $r' = p'$ ou $r'' = p''$ (respectivement). Et si au contraire, de l'un ou l'autre côté, ce faisceau $t \mapsto \gamma_{\widehat{p}_0, \widehat{q}_t}$ ne rencontre pas $\gamma_{\widehat{p}_0, p'}$ ou $\gamma_{\widehat{p}_0, p''}$, alors dans tous les quatre cas de figure possibles, l'intérieur du nouveau triangle géodésique :

$$\text{Int}(\mathbb{T}_{\widehat{p}_0, r', r''}) \subset \text{Int}(P)$$

est toujours contenu dans l'intérieur de P puisqu'il n'en rencontre pas le bord. Mais comme le bord d'un polygone géodésique divise toujours localement une surface en deux côtés ouverts, les deux segments géodésiques $\gamma_{\widehat{p}_0, r'}$ et $\gamma_{\widehat{p}_0, r''}$ doivent alors nécessairement coïncider avec les deux segments géodésiques $\gamma_{\widehat{p}_0, p'}$ et $\gamma_{\widehat{p}_0, p''}$ issus de \widehat{p}_0 qui sont dans ∂P , et l'on en déduit par conséquent que :

$$r' = p' \quad \text{et} \quad r'' = p''.$$

Il en découle enfin :

$$\begin{aligned} \text{Int}(\mathbb{T}_{\widehat{p}_0, p', p''}) \cap (\text{bord restant}) &= \text{Int}(\mathbb{T}_{\widehat{p}_0, r', r''}) \cap (\text{bord restant}) \\ &\subset \text{Int}(P) \cap (\text{bord restant}) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

ce qui contredit (*), et achève la démonstration du théorème de triangulation \mathcal{C}^∞ . □

11. Intégration des formes différentielles et primitives

Toute forme différentielle de degré 1 peut être intégrée le long de courbes. Si la forme est fermée, le résultat dépend alors seulement de la classe d'homotopie de la courbe. Ainsi, sur toute surface de Riemann connexe X , l'intégrale indéfinie d'une 1-forme fermée dans laquelle l'intégration s'effectue le long de courbes à point initial fixé et à point final variable, produit une fonction holomorphe univaluée et bien définie sur X tout entier. Mais en général, l'intégration des 1-formes fermées produit des fonctions holomorphes multivaluées. Toutefois, les fonctions qu'on obtient ainsi possèdent des propriétés très particulières qui les distinguent dans l'univers beaucoup plus complexe des fonctions multivaluées générales.

L'intégration des 2-formes différentielles sur une surface de Riemann X permet de transformer des intégrales curvilignes en intégrales de surfaces, et s'avère utile pour établir un théorème des résidus pour les 2-formes qui sont holomorphes en dehors d'un nombre fini de points.

Formes différentielles de degré 1. Soit X une surface de Riemann et soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ définie sur X . Soit aussi une courbe continue :

$$c: [0, 1] \longrightarrow X$$

qui est différentiable par morceaux, à savoir telle qu'il existe une partition :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

de son intervalle de définition ainsi que des cartes (U_k, z_k) , $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$, avec $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$, telles que pour tout k les deux fonctions restreintes-composées :

$$z_k \circ c: [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \bar{z}_k \circ c: [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont de classe \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire possèdent des dérivées continues. Sous une telle hypothèse, l'intégrale de la 1-forme ω peut alors être définie comme suit. Puisque sur chaque U_k , on peut écrire :

$$\omega|_{U_k} = f_k dz_k + g_k d\bar{z}_k,$$

pour certaines fonctions-coefficients $f_k = f_k(z, \bar{z})$ et $g_k = g_k(z, \bar{z})$ qui sont \mathcal{C}^∞ , on pose, en notant $t \mapsto c(t)$ au lieu de $t \mapsto z_k \circ c(t)$:

$$\begin{aligned} \int_c \omega &:= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k \frac{dz_k}{dt} + g_k \frac{d\bar{z}_k}{dt} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t), \overline{c(t)}) \frac{dc}{dt}(t) + g_k(c(t), \overline{c(t)}) \frac{d\bar{c}}{dt}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

On vérifie (exercice) que cette définition produit un nombre qui est à la fois indépendant du choix de la partition et du choix des cartes locales.

Théorème. Soit X une surface de Riemann, soit $c: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue \mathcal{C}^1 par morceaux et soit $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ une fonction lisse sur X . Alors l'intégrale de sa différentielle le long de c vaut :

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

DÉMONSTRATION. En effet, choisissons une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et des cartes (U_k, z_k) comme ci-dessus. Sur chaque ouvert U_k , la différentielle de $F_k := F(z_k, \bar{z}_k)$ vaut évidemment :

$$dF = \frac{\partial F_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

ce qui nous permet de calculer :

$$\begin{aligned} \int_c dF &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial z_k}(c(t), \overline{c(t)}) \frac{dc}{dt}(t) + \frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_k}(c(t), \overline{c(t)}) \frac{d\bar{c}}{dt}(t) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} F_k(c(t), \overline{c(t)}) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1})) \right\} \\ &= F(c(1)) - F(c(0)) \end{aligned}$$

et achève la vérification de ce premier théorème élémentaire. \square

Définition. Étant donné une 1-forme différentielle $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ de classe \mathcal{C}^∞ sur une surface de Riemann X , une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ dont la différentielle lui est égale :

$$dF = \omega$$

est appelée une *primitive* de ω

Puisque $d \circ d = 0$, toute forme différentielle qui admet une primitive est nécessairement fermée. Évidemment, toute translatée $F + c$ d'une primitive F de ω par une constante $c \in \mathbb{C}$ est encore une primitive de ω , puisque l'opérateur différentiel d annihile les constantes. Réciproquement, deux primitives quelconques F_1 et F_2 de ω diffèrent toujours d'une constante : $F_2 - F_1 = c$, ce qu'on voit en appliquant le théorème qui précède (exercice mental).

Remarquons que ce théorème permet de connaître *sans calcul* l'intégrale de toute forme différentielle qui admet une primitive connue. Enfin, ce théorème dit que l'intégrale d'une 1-forme exacte, *i.e.* qui est la différentielle dF d'une 0-forme F , dépend seulement des points initiaux et finaux des courbes.

Existence locale de primitives. Considérons un disque ouvert $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ de rayon $r > 0$ centré en l'origine dans \mathbb{C} et une forme différentielle $\omega \in \Gamma(\mathbb{D}_r, T^*\mathbb{C})$ de classe \mathcal{C}^∞ sur ce disque, laquelle peut bien sûr s'écrire comme :

$$\omega = f dx + g dy,$$

dans les coordonnées réelles standard $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, avec deux fonctions $f = f(x, y)$ et $g = g(x, y)$ qui sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{D}_r . Supposons que ω est fermée, à savoir $0 = d\omega$. Puisque l'on a par définition :

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

cela revient à supposer que $(\partial g / \partial x) = (\partial f / \partial y)$. Nous allons montrer que ω possède une primitive F qui est la fonction donnée, pour $(x, y) \in \mathbb{D}_r$, par l'intégrale :

$$F(x, y) := \int_0^1 \left\{ f(tx, ty) x + g(tx, ty) y \right\} dt,$$

fonction visiblement \mathcal{C}^∞ par différentiation sous le signe intégral. Il s'agit donc de vérifier que :

$$dF = \omega,$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g.$$

En différentiant effectivement une fois par rapport à x sous le signe intégral, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) tx + f(tx, ty) + \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty) ty \right\} dt.$$

Mais c'est alors à ce moment-là qu'il s'agit d'utiliser la relation différentielle $(\partial g / \partial x) = (\partial f / \partial y)$ afin de métamorphoser simplement l'intégrande :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) tx + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) ty + f(tx, ty) \right\} dt,$$

pour y faire apparaître, à un facteur t près :

$$\frac{d}{dt} [f(tx, ty)] = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y.$$

On obtient de cette façon une intégrale exacte dont on reconstitue la primitive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \left\{ t \frac{d}{dt} [f(tx, ty)] + f(tx, ty) \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} [t f(tx, ty)] \right\} dt \\ &= f(x, y), \end{aligned}$$

comme désiré. De manière entièrement similaire, on vérifie que $(\partial F / \partial y) = g$, ce qui achève d'établir $dF = \omega$.

Dans le cas spécial où la 1-forme fermée ω est holomorphe, la preuve d'existence d'une primitive dans le disque \mathbb{D}_r peut être simplifiée. En effet, on a sous une telle hypothèse :

$$\omega = f(z) dz,$$

pour une certaine fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r)$. Mais alors puisqu'une telle fonction holomorphe se développe par définition en série entière convergente dans un sous-disque ouvert $\mathbb{D}_{r'} \subset \mathbb{D}_r$ non vide :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

on peut immédiatement produire, par intégration formelle terme à terme des puissances de z , une primitive de f :

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1},$$

dont on sait bien (exercice de L2) qu'elle converge — au moins — dans le même disque $\mathbb{D}_{r'}$, et alors avec $F' = f$, on obtient $dF = f dz = \omega$.

Toutefois, globalement parlant, une primitive d'une forme différentielle \mathcal{C}^∞ fermée existe seulement en tant que fonction holomorphe *multivaluée*, comme cela est explicité rigoureusement par l'énoncé fondamental suivant.

Théorème. Soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^∞ arbitraire définie sur une surface de Riemann X quelconque. Alors il existe un revêtement $p: \widehat{X} \rightarrow X$ sur X d'une surface différentiable¹ \widehat{X} connexe \mathcal{C}^∞ telle que sur \widehat{X} , la forme-différentielle :

$$\widehat{\omega} := p^*\omega,$$

tirée en arrière de ω sur X , admet une primitive $\widehat{F} \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C})$:

$$d\widehat{F} = p^*\omega.$$

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{P} le faisceau des primitives de ω qui est défini précisément comme suit. Pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$, on dit que $\mathcal{P}(U)$ consiste en toutes les fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ telles que $df = \omega$ sur U . Alors ceci donne un faisceau \mathcal{P} (exercice) qui satisfait le théorème d'identité, puisque deux éléments $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(U)$ définis sur un ouvert connexe $U \subset X$ diffèrent toujours d'une constante, grâce au théorème qui précède. Considérons alors l'espace associé des germes de \mathcal{P} :

$$\text{Germes}(\mathcal{P}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{P}_x$$

que l'on munit de la projection canonique :

$$p: \text{Germes}(\mathcal{P}) \longrightarrow X, \quad \mathcal{P}_x \longmapsto x.$$

D'après un chapitre qui précède, on sait que la satisfaction du théorème d'identité implique que cet espace topologique $\text{Germes}(\mathcal{P})$ est séparé. Il s'agit maintenant pour nous de montrer que cette projection est un revêtement.

En effet, pour tout point $a \in X$, il existe d'après les raisonnements locaux ci-dessus un ouvert connexe (par exemple, un disque dans une carte) U et une primitive $f \in \mathcal{P}(U)$ de

¹ En partant d'une 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ sur X (automatiquement fermée), la surface \widehat{X} est une surface de Riemann.

la restriction $\omega|_U$. Or toutes les primitives de ω sur U se déduisent de f par addition $f + c$ d'une constante $c \in \mathbb{C}$, fait que l'on peut réexprimer comme suit :

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{c \in \mathbb{C}} [U, f + c],$$

au moyen de la notation déjà vue :

$$[V, g] = \{ \rho_y(g) \in \mathcal{P}_y : y \in V \}$$

pour les ouverts de $\text{Germes}(\mathcal{P})$, avec $g \in \mathcal{P}(V)$, où $V \subset X$ est ouvert et où $\rho_y : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}_y$ est l'application « germe en $y \in V$ ». Or ces ouverts $[U, f + c]$ sont disjoints deux à deux lorsque la constante c parcourt \mathbb{C} (exercice mental), et chaque application restreinte :

$$p|_{[U, f+c]} : [U, f + c] \rightarrow U$$

est un homéomorphisme. Donc la projection $p : \text{Germes}(\mathcal{P})$ est bien un revêtement.

Soit maintenant \widehat{X} une composante connexe (quelconque) de $\text{Germes}(\mathcal{P})$. Alors la restriction $p|_{\widehat{X}} : \widehat{X} \rightarrow X$ est encore un revêtement. La structure complexe sur X fournit une structure \mathcal{C}^∞ -différentiable et permet, en utilisant les inverses locaux de p , de munir \widehat{X} d'une structure de surface \mathcal{C}^∞ . Puisque \widehat{X} est un ensemble de germes de fonctions, on peut définir d'une manière naturelle une fonction $F : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$F(\varphi) := \varphi(p(\varphi)).$$

On vérifie que F est \mathcal{C}^∞ sur X (exercice déjà vu) et qu'il découle des définitions et des constructions que F produit une primitive de $\widehat{\omega} = p^*\omega$ (exercice recommandé). \square

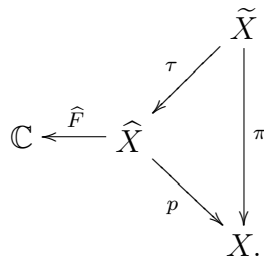
Corollaire. Soit X une surface de Riemann, soit $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel et soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme \mathcal{C}^∞ sur X qui est fermée : $0 = d\omega$. Alors il existe une primitive $\widetilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ de sa tirée en arrière $\widetilde{\omega} := \pi^*\omega$:

$$d\widetilde{F} = \widetilde{\omega}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, si $p : \widehat{X} \rightarrow X$ est le revêtement \mathcal{C}^∞ construit dans le théorème qui précède sur lequel existe une primitive $\widehat{F} \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C})$ de $\widehat{\omega} := p^*\omega = d\widehat{F}$, la propriété universelle dont jouit le revêtement universel nous assure qu'il existe un revêtement \mathcal{C}^∞ :

$$\tau : \widetilde{X} \rightarrow \widehat{X}$$

qui rend commutatif le diagramme :



Si donc l'on pose :

$$\widetilde{F} := \tau^*\widehat{F} = \widehat{F} \circ \tau,$$

il est clair grâce à la commutation de d avec les tirés en arrière que \widetilde{F} est une primitive de $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega = \tau^*p^*\omega = \tau^*\widehat{\omega}$. \square

Corollaire du corollaire. *Sur une surface de Riemann X qui est simplement connexe, toute forme différentielle $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ de classe \mathcal{C}^∞ admet une primitive $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION. En effet, l'identité $\text{Id}: X \rightarrow X$ est alors le revêtement universel de X . \square

Théorème. *Soit X une surface de Riemann et soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel. Soit aussi $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme \mathcal{C}^∞ sur X qui est fermée : $d\omega = 0$ et soit $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbb{C})$ une primitive de la tirée en arrière $\tilde{\omega} := p^*\omega$ de cette forme sur le revêtement universel, i.e. satisfaisant $d\tilde{F} = \tilde{\omega}$. Si $c: [0, 1] \rightarrow X$ est une courbe continue \mathcal{C}^1 par morceaux et si $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ est l'un de ses relèvements, alors on a :*

$$\int_c \omega = \tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}(0)).$$

DÉMONSTRATION. En effet, la formule de changement de variable appliquée à la projection $p: \tilde{X} \rightarrow X$ montre que pour toute courbe continue \mathcal{C}^1 par morceaux $v: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ et pour toute 1-forme $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$, on a :

$$\int_{p \circ v} \omega = \int_v p^*\omega.$$

Si donc \tilde{F} est une primitive de $\tilde{\omega} = p^*\omega$, le premier théorème (élémentaire) de ce chapitre a montré que cette dernière intégrale sur $v := \tilde{c}$ vaut la différence des valeurs de \tilde{F} aux extrémités de la relevée \tilde{c} . \square

«**Intégration**» de formes \mathcal{C}^∞ fermées le long de courbes qui sont seulement continues. La formule $\int_c \omega = \tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}(0))$ de ce dernier théorème nous permet maintenant — quelque peu « miraculeusement » — de définir l'intégrale d'une forme différentielle \mathcal{C}^∞ fermée $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ le long d'une *courbe continue arbitraire* $c: [0, 1] \rightarrow X$ qui n'est pas supposée \mathcal{C}^1 par morceaux, puisqu'une primitive holomorphe \tilde{F} de F existe toujours sur le revêtement universel \tilde{X} de X , et puisque les relèvements de courbes continues existent toujours ; toutefois, il nous faut encore vérifier deux choses :

\square cette différence $\tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}(0))$ aux points d'une relevée continue \tilde{c} ne dépend pas du choix d'une primitive \tilde{F} , puisque les constantes additives disparaissent dans la soustraction ;

\square cette définition est indépendante du choix d'un relèvement \tilde{c} de c , puisque si \tilde{c}' est un autre relèvement, sachant que le revêtement universel est galoisien, il existe toujours un automorphisme \mathcal{C}^∞ de revêtement $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ tel que $\tilde{c}' = \sigma \circ \tilde{c}$; or comme $p \circ \sigma = p$, on a $\sigma^*(p^*\omega) = p^*\omega$, donc $\sigma^*\tilde{F}$ est aussi une primitive de $p^*\omega$ et par conséquent la différence $\sigma^*\tilde{F} - \tilde{F} = c$ est une constante qui disparaît dans la soustraction :

$$\tilde{F}(\tilde{c}'(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}'(0)) = \sigma^*\tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \sigma^*\tilde{F}(\tilde{c}(0)) = \tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}(0)),$$

ce qui montre bien que la valeur assignée $\tilde{F}(\tilde{c}(1)) - \tilde{F}(\tilde{c}(0))$ à l'intégrale $\int_c \omega$ est la même quel que soit le relèvement \tilde{c} de c .

Avec cette nouvelle définition généralisée de l'« intégration » des 1-formes \mathcal{C}^∞ fermées, la règle dite de Chasles sur les courbes concaténées est bien entendu satisfaite, et

on conserve aussi une invariance par déformation homotopique que l'on démontrerait avec des techniques purement différentielles pour des courbes \mathcal{C}^1 par morceaux.

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^∞ fermée : $0 = d\omega$.

(a) Si $a, b \in X$ sont deux points et si $u, v: [0, 1] \rightarrow X$ sont deux courbes continues de a vers b qui sont homotopes l'une à l'autre, alors on a :

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

(b) Si $u, v: [0, 1] \rightarrow X$ sont deux courbes continues fermées qui sont librement homotopes l'une à l'autre (sans fixation d'un point), alors on a encore :

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

DÉMONSTRATION. (a) : Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X , soit \tilde{F} une primitive de $p^*\omega$, et soient $\tilde{u}, \tilde{v}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ deux relèvements quelconques de u et v , mais qui partent du même point initial $\tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) \in p^{-1}(a)$. Puisque u et v sont homotopes, on sait d'après un résultat qui précède, que leurs deux extrémités terminales coïncident alors nécessairement : $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1) \in p^{-1}(b)$. Donc on a bien en appliquant la définition :

$$\int_u \omega = \tilde{F}(\tilde{u}(1)) - \tilde{F}(\tilde{u}(0)) = \tilde{F}(\tilde{v}(1)) - \tilde{F}(\tilde{v}(0)) = \int_v \omega.$$

(b) : Supposons que la courbe fermée u a comme point initial et terminal $x_0 \in X$ et que la courbe fermée v a comme point initial et terminal x_1 . Soit w une courbe continue de x_0 à x_1 telle que u est homotope à la concaténation $w \cdot v \cdot w^{-1}$. Grâce à ce qui vient d'être établi en (a), on peut alors calculer grâce à Chasles :

$$\int_u \omega = \int_{w \cdot v \cdot w^{-1}} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega,$$

ce qui achève la preuve. □

Périodes. Soit X une surface de Riemann et soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une forme différentielle fermée : $0 = d\omega$. Grâce au théorème vu à l'instant, pour toute classe d'homotopie libre $\sigma \in \pi_1(X)$ de courbe continue fermée sur X (sans fixation d'extrémité), on peut définir l'intégrale :

$$\int_\sigma \omega =: a_\sigma \in \mathbb{C},$$

en « intégrant » le long d'une courbe ayant σ pour classe d'homotopie, puisque le résultat ne dépend pas du choix d'une représentante. Ces intégrales sont appelées les *périodes* de ω . La règle de Chasles passe alors au quotient :

$$\int_{\sigma \cdot \tau} \omega = \int_\sigma \omega + \int_\tau \omega \quad \text{pour tous } \sigma, \tau \in \pi_1(X).$$

Ainsi, on récupère un homomorphisme :

$$\pi_1(X) \longrightarrow (\mathbb{C}, +)$$

du groupe fondamental de X dans le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$.

Définition. Cet homomorphisme est appelé l'*homomorphisme des périodes* associé à la forme différentielle fermée ω .

Exemple. Soit $X = \mathbb{C}^*$. On sait que $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Un générateur de $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ est représenté par la courbe $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $u(t) := e^{2i\pi t}$. Soit la forme fermée $\omega := \frac{dz}{z}$ sur \mathbb{C}^* , où z est la coordonnée standard de \mathbb{C} . Alors on a :

$$\int_u \omega = \int_u \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

Par conséquent, l'homomorphisme des périodes de ω n'est autre que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto 2i\pi n, \end{aligned}$$

où l'on a explicitement réalisé l'isomorphisme $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C}^*)$ comme la correspondance $n \mapsto \text{cl}(u^n)$.

Facteurs d'automorphie. Soit X une surface de Riemann et soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel. Le groupe :

$$\text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$$

de ses automorphismes est, comme on le sait, isomorphe au groupe fondamental de X . Si $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ et si $f: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, on peut définir sa transformée :

$$\sigma f: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$$

en la composant à droite avec σ^{-1} :

$$\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$$

Si $g: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ est une autre fonction, on a clairement $\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g$ et $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$. De plus, on a :

$$(\sigma\tau)(f) = \sigma(\tau f).$$

Définition. Une fonction $f: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *additivement automorphe à facteurs d'automorphie constants* s'il existe des constantes $a_\sigma \in \mathbb{C}$ associées à chaque $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ telles que l'on a :

$$f - \sigma f = a_\sigma \quad \text{pour tout } \sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X).$$

Les constantes a_σ , qui sont déterminées de manière unique par la fonction f , sont alors appelées les *facteurs d'automorphie* de f . Alors on a aussi $\sigma f - \sigma\tau f = a_\tau$ pour toute paire d'automorphismes $\sigma, \tau \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ puisque $f - \tau f = a_\tau$, et par conséquent on voit que :

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + (\sigma f - \sigma\tau f) = a_\sigma + a_\tau.$$

Lemme. La correspondance $\sigma \mapsto a_\sigma$ est un homomorphisme de groupe de $\text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ dans $(\mathbb{C}, +)$. \square

Toute fonction $f: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ qui reste invariante par les automorphismes de revêtement, i.e. qui satisfait $\sigma f = f$ pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$, est trivialement additivement automorphe, puisque ses facteurs d'automorphie s'annulent tous. Pour toute fonction de cette espèce, il existe une fonction $f_0: X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f = p^* f_0$ (exercice mental nécessaire). Si f est \mathcal{C}^∞ ou holomorphe, f_0 est \mathcal{C}^∞ ou holomorphe (exercice mental corollaire).

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel.

(a) Si $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ est une forme différentielle fermée sur X et si $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbb{C})$ est une primitive de sa tirée en arrière $p^*\omega$ sur \tilde{X} , alors \tilde{F} est additivement automorphe à facteurs d'automorphie constants. De plus, les facteurs d'automorphie a_σ de \tilde{F} , pour $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$, coïncident avec les périodes de ω :

$$a_\sigma = \int_{\bar{\sigma}} \omega,$$

via l'isomorphisme naturel² :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X) &\xrightarrow{\cong} \pi_1(X) \\ \sigma &\longmapsto \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

(b) Réciproquement, si $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbb{C})$ est une fonction additivement automorphe à facteurs d'automorphie constants, alors il existe une et une seule forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T^*_X)$ telle que $d\tilde{F} = p^*\omega$.

DÉMONSTRATION. (a) : Soit un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$ du revêtement universel, lequel respecte les fibres de p par définition : $p \circ \sigma^{-1} = p$. Si donc $d\tilde{F} = p^*\omega$, on en déduit par un calcul détaillé que :

$$\begin{aligned} d(\sigma\tilde{F}) &= d(F \circ \sigma^{-1}) = (\sigma^{-1})^*(d\tilde{F}) \\ &= (\sigma^{-1})^*p^*\omega \\ &= (p \circ \sigma^{-1})^*\omega \\ &= p^*\omega, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\sigma\tilde{F}$ est aussi une primitive de $p^*\omega$. Alors comme \tilde{X} est connexe, la différence entre ces deux primitives :

$$\sigma\tilde{F} - \tilde{F} =: -a_\sigma \in \mathbb{C}$$

se réduit donc une constante qui ne dépend que de σ .

Ensuite, soit un point $x_0 \in X$, soit un autre point $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ dans la fibre de x_0 et soit un automorphisme quelconque $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$. Rappelons que l'élément $\bar{\sigma} \in \pi_1(X, x_0)$ qui est associé de manière unique à σ est défini en choisissant une courbe continue $\tilde{u}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ partant par exemple du point $y_0 := \sigma^{-1}(\tilde{x}_0) = \tilde{u}(0)$ et aboutissant au point transformé $\sigma(y_0) = \tilde{x}_0 = \tilde{u}(1)$, puis en projetant \tilde{u} sur X , ce qui donne une courbe continue $u := p \circ \tilde{u}$ fermée partant de, et aboutissant à, x_0 dont la classe d'homotopie $\text{cl}(u) =: \bar{\sigma}$ ne dépend que de σ . Alors grâce l'expression déjà vue de l'intégrale de ω comme différence des valeurs de \tilde{F} aux extrémités de \tilde{u} et grâce à ce qui vient d'être

² La démonstration va de toute façon rappeler en quoi consiste cet isomorphisme.

montré on obtient bien :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\sigma}} \omega &= \int_u \omega = \tilde{F}(\tilde{u}(1)) - \tilde{F}(\tilde{u}(0)) \\ &= \tilde{F}(\tilde{x}_0) - \tilde{F}(\sigma^{-1}(\tilde{x}_0)) \\ &= a_\sigma. \end{aligned}$$

(b) : Si \tilde{F} est additivement automorphe à facteurs d'automorphie constants a_σ pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{X} \xrightarrow{p} X)$, alors on a :

$$\sigma^*(d\tilde{F}) = d(\sigma^*\tilde{F}) = d(\tilde{F} + a_\sigma) = d\tilde{F}.$$

Ainsi, la forme différentielle fermée $d\tilde{F}$ est invariante par tous les automorphismes de revêtement. Comme $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est localement biholomorphe, il existe donc une 1-forme $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $d\tilde{F} = p^*\omega$. On se convainc aisément que ω est unique et qu'elle est fermée. \square

Exemple. Soit un réseau $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ dans \mathbb{C} où $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} et considérons le tore complexe associé \mathbb{C}/Γ .

On a déjà vu que la projection canonique $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ fournit le revêtement universel de \mathbb{C}/Γ et que le groupe de ses automorphismes :

$$\text{Aut}(\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{Z}^2$$

est isomorphe au groupe des translations par des vecteurs quelconques $\gamma \in \Gamma$ de la forme $\gamma = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$ avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Considérons à présent l'application identité $z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Il est immédiatement clair que cette fonction z est additivement automorphe sous l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Gamma)$ et que ses facteurs d'automorphisme $a_\gamma = \gamma$ sont les éléments du réseau Γ . Par différentiation, la 1-forme holomorphe dz est alors invariante par tous les automorphismes de revêtement. Le théorème montre donc qu'il existe une 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ telle que $p^*\omega = dz$ dont les périodes sont exactement les éléments du réseau Γ . \square

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^∞ qui est fermée. Alors ω possède une primitive $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$, $dF = \omega$, si et seulement si toutes ses périodes s'annulent : $0 = \int_\sigma \omega$ pour tout $\sigma \in \pi_1(X)$.

DÉMONSTRATION. Dans le sens direct, si $\omega = dF$ possède une primitive F , toutes ses périodes s'annulent puisque l'on a $\int_u \omega = F(u(1)) - F(u(0)) = 0$ pour toute courbe fermée.

Réciproquement, supposons que toutes les périodes de ω sont nulles. Puisque ω est fermée, on sait grâce à un corollaire vu plus haut qu'il existe toujours sur le revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$ une primitive \tilde{F} de sa tirée en arrière $p^*\omega = d\tilde{F}$. Grâce à la partie (a) du théorème qui précède, les périodes (nulles) de ω coïncident avec les facteurs d'automorphie de \tilde{F} , qui sont donc tous nuls. Par conséquent, il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ telle que $\tilde{F} = p^*F = F \circ p$. Il ne reste plus qu'à vérifier que cette fonction F fournit une primitive de ω . Mais comme :

$$p^*\omega = d\tilde{F} = d(p^*F) = p^*(dF)$$

et comme p est un biholomorphisme local, on a bien $\omega = dF$. \square

Lorsque toutes les périodes de la forme fermée ω s'annulent, en fixant un point arbitraire $x_0 \in X$, une primitive de ω est tout simplement donnée par l'intégrale :

$$F(x) := \int_{x_0}^x \omega,$$

dont la valeur est donc automatiquement indépendante du choix d'une courbe \mathcal{C}^∞ allant de x_0 à un point quelconque $x \in X$.

Corollaire. Soit X une surface de Riemann compacte et soient $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ deux formes différentielles holomorphes (donc automatiquement fermées) qui définissent le même homomorphisme de périodes $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$, à savoir :

$$\int_\sigma \omega_1 = \int_\sigma \omega_2,$$

pour tout $\sigma \in \pi_1(X)$. Alors on a en fait $\omega_1 = \omega_2$.

PREUVE. En effet, puisque toutes les périodes de la différence $\omega_2 - \omega_1$ sont alors nulles, cette 1-forme holomorphe fermée admet une primitive F holomorphe : $\omega_2 - \omega_1 = dF$. Mais comme X est compacte par hypothèse, $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$ à cause du principe du maximum, d'où $F = \text{const.}$, puis enfin $\omega_2 - \omega_1 = 0$. \square

Exercices

Exercice 11.1. Soit X une surface de Riemann et soit ω une 1-forme holomorphe sur X . On suppose que φ est une primitive locale de ω dans un voisinage d'un point $a \in X$. Soit alors (Y, p, f, b) un prolongement analytique maximal de φ . Montrer que :

(a) L'application $p: Y \rightarrow X$ constitue un revêtement.

(b) La fonction f est une primitive de $p^*\omega$.

(c) Le revêtement $p: Y \rightarrow X$ est galoisien et son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X)$ est commutatif.

Exercice 11.2. Soit \mathbb{C}/Γ un tore complexe. Étant donné un homomorphisme quelconque :

$$\psi: \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \longrightarrow (\mathbb{C}, +),$$

montrer qu'il existe une 1-forme fermée ω de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C}/Γ dont l'homomorphisme des périodes est précisément égal à ψ .

12. 2-formes différentielles

Dans ce court chapitre, on étudie l'intégration des 2-formes différentielles sur une surface de Riemann. Le premier objectif est de définir rigoureusement cette intégration.

Intégration locale sur des ouverts du plan complexe. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $\omega \in \Gamma(U, \Lambda^2 T^* \mathbb{C})$ une 2-forme différentielle \mathcal{C}^∞ sur U . Alors ω peut être écrite comme :

$$\omega = f dx \wedge dy = \frac{i}{2} f dz \wedge d\bar{z},$$

pour une certaine fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Supposons que f s'annule hors d'un sous-ensemble compact de U . Dans ce cas, on peut définir :

$$\iint_U \omega := \iint_U f(x, y) dx dy,$$

où le membre de droite est l'intégrale double ordinaire des physiciens.

Ensuite, soit V un autre ouvert de \mathbb{C} et supposons qu'il existe une application biholomorphe $\psi: V \xrightarrow{\cong} U$. Si $\psi = u+iv$ est la décomposition de ψ en parties réelle et imaginaire, alors grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on vérifie aisément (où l'on sait déjà) que le déterminant jacobien de l'application réelle sous-jacente $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est égal à :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = |\psi'|^2,$$

où ψ' est la dérivée de l'application holomorphe initiale $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Par conséquent, la formule — considérée comme connue — de changement de variables réelles dans l'intégrale double s'écrit :

$$\iint_U f dx dy = \iint_V (f \circ \psi) |\psi'|^2 dx dy.$$

Mais d'un autre côté, on a immédiatement :

$$\psi^*(dz \wedge d\bar{z}) = d\psi \wedge d\bar{\psi} = (\psi' dz) \wedge (\bar{\psi}' d\bar{z}) = |\psi'|^2 dz \wedge d\bar{z},$$

et donc on en déduit que :

$$\psi^* \omega = (f \circ \psi) |\psi'|^2 dx \wedge dy,$$

ce qui nous permet de reformuler comme suit de manière conceptuelle et élégante le changement de variable sur des ouverts de \mathbb{C} :

$$\iint_U \omega = \iint_{\psi^{-1}(U)} \psi^* \omega \quad \text{pour tout biholomorphisme } \psi: \psi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \text{ entre ouverts de } \mathbb{C}$$

et pour toute 2-forme ω sur U à support compact.

Passage au global. Maintenant, soit X une surface de Riemann quelconque (globale). Par convention, on identifiera 0-formes différentielles et fonctions.

Définition. Le support d'une 0-, d'une 1- ou d'une 2-forme différentielle ω de classe \mathcal{C}^∞ sur X est le sous-ensemble fermé :

$$\text{Supp}(\omega) := \overline{\{a \in X : \omega(a) \neq 0\}}.$$

Pour commencer, soit :

$$\varphi: U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \subset \mathbb{C}$$

une carte sur X et soit $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^2 T^* X)$ une 2-forme différentielle \mathcal{C}^∞ sur X dont le support est compact et est contenu dans U . Alors comme $(\varphi^{-1})^* \omega$ est une 2-forme différentielle dont le support est compact dans $\varphi(U)$, on peut définir en appliquant ce qui précède :

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Or nous affirmons que le résultat numérique de cette dernière intégration est indépendant du choix d'une carte. En effet, supposons que $\varphi': U' \rightarrow \varphi'(U')$ soit une autre carte avec toujours $\text{Supp}(\omega) \subset U'$. Sans perte de généralité, on peut même supposer que $U = U'$, quitte à se restreindre à l'intersection $U \cap U'$. Alors il est clair que la composée :

$$\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \xrightarrow{\cong} \varphi'(U)$$

est une application biholomorphe. Ensuite, puisque l'on a :

$$(\varphi^{-1})^* \omega = (\varphi'^{-1} \circ \psi)^* \omega = \psi^* ((\varphi'^{-1})^* \omega),$$

en appliquant la formule de changement de variable $\iint_{\psi(V)} \omega = \iint_V \psi^* \omega$ valable dans une carte obtenue plus haut, on obtient :

$$\iint_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega = \iint_{\varphi(U)} \psi^* ((\varphi'^{-1})^* \omega) = \iint_{\varphi'(U)} (\varphi'^{-1})^* \omega.$$

En conclusion, l'intégrale ainsi définie $\iint_X \omega$ possède bien une valeur numérique qui est indépendante du choix d'une carte contenant compactement $\text{Supp}(\omega)$.

Ensuite, soit à présent $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^2 T^* X)$ une 2-forme différentielle \mathcal{C}^∞ arbitraire à support compact pas forcément contenu dans une carte. Il existe néanmoins un nombre fini K de cartes :

$$\varphi_k: U_k \xrightarrow{\cong} V_k \quad (k=1 \dots K)$$

qui en recouvrent le support :

$$\text{Supp}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^K U_k.$$

Grâce à l'existence — admise ici — de partitions de l'unité, on dispose de fonctions $\chi_k \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ satisfaisant :

- (i) $\text{Supp}(\chi_k) \subset U_k$ pour tout $k = 1, \dots, K$;
- (ii) $\sum_{k=1}^K \chi_k(x) \equiv 1$ pour tout $x \in \text{Supp}(\omega)$.

Au moyen d'une telle collection de fonctions, puisque pour chaque entier k , la 2-forme différentielle $\chi_k \omega$ est à support :

$$\text{Supp}(\chi_k \omega) \Subset U_k$$

compactement contenu dans l'ouvert de carte U_k , on peut utiliser ce qui précède pour définir :

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^K \iint_X \chi_k \omega.$$

On sait déjà que chaque terme du membre de droite ne dépend pas des cartes $\varphi_k: U'_k \xrightarrow{\cong} V'_k \subset \mathbb{C}$ de domaine U'_k contenant $\text{Supp}(\chi_k \omega)$. On vérifie aussi (exercice nécessaire) que la valeur ainsi assignée à $\iint_X \omega$ ne dépend pas du choix des fonctions χ_k .

Une version particulière du théorème de Stokes. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $A \subset U$ un sous-ensemble compact dont le bord ∂A est un nombre fini de courbes \mathcal{C}^∞ fermées qui sont orientées de telle sorte qu'en tout point de ∂A , le vecteur orienté unitaire tangent à ∂A ainsi que le vecteur normal unitaire rentrant dans A forment un dièdre *direct*, c'est-à-dire un dièdre qui redonne l'orientation standard de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Le théorème général de Stokes dans le plan énonce alors que pour toute 1-forme différentielle $\omega \in \Gamma(U, T^*\mathbb{C})$ de classe \mathcal{C}^∞ , on a :

$$\boxed{\iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega}.$$

Nous n'aurons en fait besoin de ce théorème que dans le cas où A est un disque (rond) ou un anneau rond, et nous allons l'établir complètement dans ces deux cas-là, le second cas englobant le premier cas à la limite lorsque le centre de l'anneau rond tend vers un point.

Soit donc un anneau rond de la forme :

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon \leq |z| \leq R\}$$

avec $0 < \varepsilon < R$. Son bord orienté ∂A consiste en le grand cercle $\{|z| = R\}$ orienté *positivement* (sens trigonométrique) et le petit cercle $\{|z| = \varepsilon\}$ orienté *négativement* (sens des aiguilles d'une montre). Alors le théorème de Stokes pour $\omega = f dx + g dy$ stipule que :

$$\iint_{\varepsilon \leq |z| \leq R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{|z|=R} (f dx + g dy) - \int_{|z|=\varepsilon} (f dx + g dy),$$

et nous allons démontrer directement cette formule en introduisant des coordonnées polaires $z = r e^{i\theta}$, c'est-à-dire en effectuant le changement de variables :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Pour commencer, observons grâce à la linéarité qu'il suffit d'établir cette formule lorsque la 1-forme se réduit à $\omega = g dy$, puisque le cas restant où $\omega = f dx$ s'y ramène au moyen du changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (y, -x)$ qui est de jacobien égal à 1.

Soit donc $\omega = g dy$, d'où immédiatement $d\omega = (\partial g / \partial x) dx \wedge dy$. En utilisant le transfert (connu, ou à redémontrer) par passage aux coordonnées polaires du champ unitaire le long de l'axe des x :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

et en introduisant la fonction transformée $\tilde{g}(r, \theta) := g(re^{i\theta})$ dans le nouveau système de coordonnées, on obtient par le calcul en rappelant que $1 = \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned} \iint_A d\omega &= \iint_{\varepsilon \leq |z| \leq R} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy \\ &= \iint_{\substack{\varepsilon \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left(\cos \theta \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\ &= \iint_{\substack{\varepsilon \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{g} r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{g} \sin \theta) \right) dr d\theta. \end{aligned}$$

Mais le deuxième intégrande ayant une primitive évidente par rapport à θ , on voit qu'il s'annule puisque pour tout $r \in [\varepsilon, R]$ on a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{g} \sin \theta) d\theta = \left[\tilde{g}(r, \theta) \sin \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

Donc il ne reste plus que le premier intégrande avec lequel nous poursuivons les calculs comme suit :

$$\begin{aligned} \iint_A d\omega &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{g} r) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \tilde{g}(R, \theta) R d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta \tilde{g}(\varepsilon, \theta) \varepsilon d\theta \\ &= \int_{|z|=R} g dy - \int_{|z|=\varepsilon} g dy \\ &= \int_{\partial A} \omega. \end{aligned}$$

Ceci démontre donc le théorème de Stokes dans le cas d'un anneau rond, et bien entendu, le cas d'un disque s'obtient comme corollaire en faisant tendre ε vers 0 dans les formules.

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ une 1-forme différentielle \mathcal{C}^∞ dont le support est compact. Alors on a toujours :

$$0 = \iint_X d\omega.$$

DÉMONSTRATION. Soit comme un peu plus haut un recouvrement de $\text{Supp}(\omega)$ par des ouverts de cartes :

$$\bigcup_{k=1}^K U_k = X,$$

et soit $\chi_k \in \mathcal{C}^\infty(U_k, [0, 1])$ des fonctions qui sont chacune à support compact dans U_k et dont la somme $\sum_{k=1}^K \chi_k(x) = 1$ vaut 1 pour tout $x \in \text{Supp}(\omega)$. En posant $\omega_k := \chi_k \omega$, on a donc :

$$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_K.$$

Mais par linéarité de l'intégrale double, il suffit de démontrer le théorème pour chaque ω_k , ce qui nous ramène à travailler dans un ouvert de \mathbb{C} .

Soit donc $\omega \in \Gamma(\mathbb{C}, T^*\mathbb{C})$ une 1-forme \mathcal{C}^∞ dont le support est compact, donc contenu dans un disque ouvert :

$$\text{Supp}(\omega) \Subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

de rayon $R > 0$ assez grand. Alors grâce à la formule de Stokes spéciale que nous venons de démontrer dans le cas simple d'un disque, nous obtenons sans effort :

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega = \iint_{|z| \leq R} d\omega = \int_{|z|=R} \omega = \int_{|z|=R} 0 = 0,$$

d'où le résultat. □

Théorème des résidus pour les 1-formes holomorphes. Soit X une surface de Riemann compacte, soient a_1, \dots, a_n un nombre fini de points de X distincts deux à deux, et soit le complémentaire :

$$X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Alors pour toute 1-forme $\omega \in \Omega(X')$ qui est holomorphe sur ce complémentaire, la somme des résidus de ω en les points singuliers est nulle :

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k}(\omega) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Choisissons des voisinages de coordonnées (U_k, z_k) de chaque a_k qui sont disjoints deux à deux : $U_{k_1} \cap U_{k_2} = \emptyset$ pour tous $k_1 \neq k_2$. Quitte à faire une translation dans \mathbb{C} , une dilatation, et une restriction des U_k , on peut supposer que $z_k(a_k) = 0$ et que l'image homéomorphe $z_k(U_k) = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ est le disque unité ouvert centré en 0.

Pour tout $k = 1, \dots, n$, on peut choisir une fonction χ_k de classe \mathcal{C}^∞ à support compact $\text{Supp}(\chi_k) \Subset U_k$ dont la restriction $\chi_k|_{U'_k} \equiv 1$ à un certain sous-voisinage ouvert $U'_k \Subset U_k$ de a_k est identiquement égale à 1. Posons alors :

$$\kappa := 1 - \chi_1 - \dots - \chi_n.$$

On voit immédiatement que $g|_{U'_k} \equiv 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$. C'est pourquoi la forme $\kappa\omega$ peut être prolongée aux points a_k en la déclarant nulle dans leur voisinage, ce qui nous donne une vraie forme \mathcal{C}^∞ sur X tout entier. À cette forme $\kappa\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ qui est automatiquement à support compact, puisque X est compacte, on peut donc appliquer le théorème qui précède et obtenir :

$$\iint_X d(\kappa\omega) = 0.$$

Or puisque $\omega \in \Omega(X')$ est holomorphe, elle est gratuitement fermée : $0 = d\omega$ sur X' . De plus, comme sur $U'_k \cap X'$, on a $\chi_k\omega \equiv \omega$, il est clair que $d(\chi_k\omega) = 0$ sur $U'_k \setminus \{a_k\}$, et ce, pour tout $k = 1, \dots, n$. Il découle de ces observations que la 2-forme $d(\chi_k\omega)$ peut être considérée comme une vraie 2-forme \mathcal{C}^∞ sur X tout entier dont le support est un sous-ensemble compact (intuitivement de type « couronne ») de $U_k \setminus \{a_k\}$.

Maintenant, l'équation :

$$d(\kappa\omega) = -d\chi_1 - \dots - d\chi_n$$

nous permet, en appliquant l'équation qui précède, d'obtenir :

$$\sum_{k=1}^n \iint_X d(\chi_k \omega) = 0.$$

Nous affirmons alors que pour tout $k = 1, \dots, n$ fixé, on a la relation :

$$\iint_X d(\chi_k \omega) = -2i\pi \operatorname{Res}_{a_k}(\omega),$$

ce qui conclura visiblement la preuve du théorème.

En effet, puisque le support de $d(\chi_k \omega)$ est contenu dans U_k , on a seulement à intégrer sur U_k . Grâce à la coordonnée z_k , on identifie U_k au disque unité \mathbb{D} . Il existe donc ε et R avec $0 < \varepsilon < R < 1$ tels que :

$$\operatorname{Supp}(\chi_k) \subset \{|z_k| < R\} \quad \text{et} \quad \chi_k(z) \equiv 1 \quad \text{pour} \quad |z| \leq \varepsilon.$$

Mais alors on peut calculer en appliquant la formule de Stokes sur cet anneau :

$$\begin{aligned} \iint_X d(\chi_k \omega) &= \iint_{\varepsilon \leq |z_k| \leq R} d(\chi_k \omega) \\ &= \int_{|z_k|=R} \chi_k \omega - \int_{|z_k|=\varepsilon} \chi_k \omega \\ &= - \int_{|z_k|=\varepsilon} \omega \\ &= -2i\pi \operatorname{Res}_{a_k}(\omega), \end{aligned}$$

grâce — en dernier recours ! — à la formule des résidus connue dans le plan complexe. \square

Notons en passant que nous pouvons redémontrer un énoncé déjà vu.

Corollaire. *Toute fonction méromorphe non constante $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ sur une surface de Riemann compacte X possède, en comptant les multiplicités, autant de zéros que de pôles.*

DÉMONSTRATION. En effet, la 1-forme différentielle $\frac{df}{f}$ est holomorphe hors des zéros et des pôles de f , et on vérifie par un calcul élémentaire que si $a \in X$ est un zéro d'ordre k de f , alors $\operatorname{Res}_a(\frac{df}{f}) = k$, tandis que si $b \in X$ est un pôle d'ordre l de f , alors $\operatorname{Res}_b(\frac{df}{f}) = -l$, donc le résultat découle bien directement du théorème des résidus établi à l'instant. \square

Exercices

Exercice 12.3. Soit X une surface de Riemann et soit ω une 1-forme méromorphe sur X dont les résidus en ses pôles sont tous nuls. Montrer qu'il existe un revêtement $p: Y \rightarrow X$ et une fonction méromorphe $G \in \mathcal{M}(Y)$ telle que $dG = p^*\omega$.

Exercice 12.4. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau. Utiliser le théorème des résidus pour établir qu'il n'existe pas de fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ possédant un unique pôle d'ordre 1.

13. Cohomologie de Čech

L'objectif de ce chapitre est de définir les groupes de cohomologie de Čech $H^1(X, \mathcal{F})$ d'ordre 1 lorsque \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X .

Fill ?? Harmoniser l'ordre de la définition $\delta(f_i) = f_j - f_i =: f_{ij}$ ici et dans les chapitres qui suivent.

Cochaînes, cocycles, cobords. Soit X un espace topologique et soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . On suppose qu'un recouvrement ouvert de X est donné, *i.e.* une famille :

$$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$$

d'ouverts de X dont la réunion $\cup_{i \in I} U_i = X$ recouvre X .

Définition. Pour tout entier $q = 0, 1, 2, \dots$, le groupe des q -cochaînes de \mathcal{F} relativement au recouvrement \mathcal{U} est¹ :

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, i_1, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

Les éléments de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sont appelés des q -cochaînes.

Ainsi, une q -cochaîne est une famille :

$$(f_{i_0, i_1, \dots, i_q})_{i_0, i_1, \dots, i_q \in I} \quad \text{telle que } f_{i_0, i_1, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

pour tout $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in I^{q+1}$. L'addition et la soustraction entre q -cochaînes est définie 'composante par composante'.

Définition. Les deux opérateurs de cobord :

$$\delta: C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$\delta: C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

sont définis comme suit :

- pour $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, on pose $\delta((f_i)_{i \in I}) =: (g_{ij})_{i, j \in I}$ avec :

$$g_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

(ici, on sous-entend que f_j et f_i ont été restreints à $U_i \cap U_j$ avant soustraction) ;

- pour $(f_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, on pose $\delta((f_{ij})) =: (g_{ijk})$ avec :

$$g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

(ici à nouveau, on sous-entend que f_{jk} , f_{ik} , f_{ij} ont été restreints à leur domaine de définition commun $U_i \cap U_j \cap U_k$).

¹ Noter ici qu'il y a $(q+1)$ intersections d'ouverts pour C^q .

Ces deux opérateurs de cobord forment alors des homomorphismes de groupes abéliens.

Définition. On pose :

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker}(C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})),$$

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Im}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})),$$

et on appelle 1-cocycles les éléments de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, et 1-cobords les éléments de $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Ainsi par définition², une 1-cochaîne $(f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est un cocycle si et seulement si l'on a³, pour tout triplet d'indices $i, j, k \in I$ les relations de cocycle suivantes :

$$\boxed{f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{sur } U_i \cap U_j \cap U_k \quad \text{[relations de cocycle]}}.$$

En prenant $j = i = k$, puis seulement $k = i$, ces relations impliquent l'antisymétrie indicielle (à mémoriser) de tout 1-cocycle :

$$f_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad f_{ji} = -f_{ij}.$$

Observation fondamentale. Tout 1-cobord est un 1-cocycle, c'est-à-dire $\delta \circ \delta = 0$.

PREUVE. En effet, on calcule :

$$\delta\left(\delta\left((f_i)_{i \in I}\right)\right) = \delta\left((f_i - f_j)_{i,j \in I}\right) = (f_j - f_k) - (f_i - f_k) + (f_i - f_j)$$

et les six termes s'annulent trivialement par paires sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. \square

On dira qu'un 1-cocycle se scinde s'il est égal à un 1-cobord. Conservons alors en mémoire le fait qu'un 1-cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ se scinde — est un 1-cobord — lorsqu'il existe une 0-cochaîne $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ telle que :

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j,$$

pour toute paire d'indices $i, j \in I$.

Définition. Le groupe quotient :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

est appelé le 1^{er} groupe de cohomologie à coefficients dans \mathcal{F} relativement au recouvrement \mathfrak{U} . Ses éléments sont appelés des classes de cohomologie et deux cocycles $\in Z^1$ qui diffèrent seulement d'un cobord, donc définissent la même classe de cohomologie, sont dit être *cohomologues*.

Or ces groupes $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ dépendent visiblement du recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$. Afin de construire et d'obtenir des groupes de cohomologie qui dépendent seulement de X et de \mathcal{F} , on doit utiliser des recouvrements de X qui sont de plus en plus fins pour en prendre la limite, ce que nous allons maintenant faire.

Définition. Un recouvrement $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ de X sera dit *plus fin* qu'un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, ce qui sera noté :

$$\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U},$$

² On notera dorénavant pour abrégier (f_i) et (f_{ij}) au lieu de $(f_i)_{i \in I}$ et $(f_{ij})_{i,j \in I}$.

³ L'insertion de l'indice j au milieu des deux indices i et k revient à une règle de Chasles discrète.

si tout ouvert V_k est contenu dans au moins un ouvert U_i — autrement dit et plus précisément, s'il existe une *application de raffinement* $\tau: K \rightarrow I$ telle que l'on ait :

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \quad \text{pour tout indice } k \in K.$$

Grâce à une telle application τ , on peut définir une *application de raffinement* :

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}: Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

comme suit : pour tout 1-cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, on pose $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}((f_{ij})) =: (g_{kl})$ avec⁴ :

$$g_{kl} := f_{\tau(k), \tau(l)}|_{V_k \cap V_l}.$$

On vérifie (exercice) que (g_{kl}) est bien un cocycle. Puisque cette application $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ envoie les cobords sur des cobords (exercice), elle induit par passage au quotient un homomorphisme entre 1^{ers} groupes de cohomologies relatifs aux deux recouvrements :

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

que nous désignons par le même symbole $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$.

Lemme. *Cette application :*

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

ne dépend pas du choix d'une application de raffinement $\tau: K \rightarrow I$.

DÉMONSTRATION. En effet, soit $\tilde{\tau}: K \rightarrow I$ une autre application de raffinement satisfaisant donc $V_k \subset U_{\tilde{\tau}(k)}$ pour tout $k \in K$. Étant donné un 1-cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, on doit donc démontrer que les deux 1-cocycles suivants de $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ qui sont les deux images de (f_{ij}) par $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ et par $\tilde{t}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$:

$$g_{kl} := f_{\tau(k), \tau(l)}|_{V_k \cap V_l} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{kl} := f_{\tilde{\tau}(k), \tilde{\tau}(l)}|_{V_k \cap V_l}$$

sont cohomologues, *i.e.* différent d'un cobord, ce qui assurera que leurs deux projections coïncideront dans $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$.

Or puisque $V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\tilde{\tau}(k)}$, nous pouvons définir par restriction la 1-cochaîne :

$$h_k := f_{\tau(k), \tilde{\tau}(k)}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k),$$

en terme de laquelle nous pouvons estimer, sur $V_k \cap V_l$, la différence à étudier :

$$\begin{aligned} g_{kl} - \tilde{g}_{kl} &= f_{\tau(k), \tau(l)} - f_{\tilde{\tau}(k), \tilde{\tau}(l)} \\ &= f_{\tau(k), \tau(l)} + \underbrace{f_{\tau(l), \tilde{\tau}(k)}}_{\circ} - \underbrace{f_{\tau(l), \tilde{\tau}(k)}}_{\circ} - f_{\tilde{\tau}(k), \tilde{\tau}(l)} && \text{[insertion volontaire de zéro]} \\ &= f_{\tau(k), \tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l), \tilde{\tau}(l)} && \text{[relations de cocycle]} \\ &= h_k - h_l. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons donc bien démontré que le cocycle $(g_{kl} - \tilde{g}_{kl})$ est un cobord. □

Lemme. *Cette même application :*

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

est aussi injective.

⁴ Ici, les applications de restriction du faisceau \mathcal{F} d'un ouvert à un autre sont notées (léger abus sans conséquence) avec une barre verticale comme si ses éléments étaient des fonctions ou des sections d'un fibré vectoriel.

DÉMONSTRATION. Supposons donc qu'un cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a pour image un cocycle dans $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ qui est un cobord. Nous devons démontrer que le cocycle (f_{ij}) lui-même était en fait un cobord.

Ainsi nous supposons que $f_{\tau(k), \tau(l)} = g_k - g_l$ en restriction à $V_k \cap V_l$ avec certains $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$. Soit U_i un ouvert arbitraire du recouvrement. Alors sur $U_i \cap V_k \cap V_l$, on a grâce aux relations de cocycle et à l'antisymétrie :

$$g_k - g_l = f_{\tau(k), \tau(l)} = f_{\tau(k), i} + f_{i, \tau(l)} = -f_{i, \tau(k)} + f_{i, \tau(l)},$$

ce qui montre en réorganisant l'égalité obtenue que l'on a :

$$f_{i, \tau(k)} + g_k = f_{i, \tau(l)} + g_l.$$

On peut alors appliquer l'axiome de recollement à ces sections définies sur la famille de sous-ouverts $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$ qui recouvrent U_i , ce qui nous fournit une section 'globale' $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ dont les restrictions aux sous-ouverts $U_i \cap V_k$ sont justement :

$$h_i = f_{i, \tau(k)} + g_k.$$

Mais avec ces éléments h_i que nous venons de trouver pour tout $i \in I$, on a ensuite sur les intersections $U_i \cap U_j \cap V_k$:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= f_{i, \tau(k)} + f_{\tau(k), j} && \text{[relations de cocycle]} \\ &= f_{i, \tau(k)} + \underline{g_{k_o}} - f_{j, \tau(k)} - \underline{g_{k_o}} && \text{[insertion volontaire de zéro]} \\ &= h_i - h_j, \end{aligned}$$

et puisque ces relations valent dans tout sous-ouvert du recouvrement $(U_i \cap U_j \cap V_k)_{k \in K}$ de l'ouvert $U_i \cap U_j$, l'axiome d'unicité satisfait par tout faisceau implique que cette équation $f_{ij} = h_i - h_j$ est satisfaite sur tout $U_i \cap U_j$, c'est-à-dire que le 1-cocycle (f_{ij}) se scinde dans le recouvrement \mathfrak{U} . \square

Définition du premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{F})$. Maintenant, si l'on a trois recouvrements $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$ de plus en plus fins, on vérifie aisément (exercice) que les applications induites entre 1^{ers} groupes de cohomologie relatives à ces recouvrements satisfont :

$$\text{restr}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} \circ \text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} = \text{restr}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{W}}.$$

Grâce à cela, on peut définir la relation d'équivalence \sim suivante sur la réunion disjointe :

$$\coprod_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

des 1^{ers} groupes de cohomologie, lorsque \mathfrak{U} parcourt *tous*⁵ les recouvrements de X .

Deux classes de cohomologies $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ et $\xi' \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ relatives à deux recouvrements de X sont dites équivalentes, ce qui est noté $\xi \sim \xi'$, lorsqu'il existe un recouvrement \mathfrak{V} de X qui est plus fin à la fois que \mathfrak{U} et que \mathfrak{U}' :

$$\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U} \quad \text{et} \quad \mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}',$$

en restriction auquel ces classes de cohomologie coïncident :

$$\text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) = \text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\xi').$$

⁵ Cette réunion disjointe, en effet, est un espace 'gigantesque'.

Définition. L'ensemble des classes d'équivalence⁶ de la réunion disjointe $\coprod_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pour cette relation \sim est appelé le 1^{er} groupe de cohomologie de X à coefficients dans le faisceau \mathcal{F} , il est noté :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \coprod_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / \sim,$$

et il s'identifie en termes plus abstraits à ce qu'on appelle généralement la *limite inductive* des groupes de cohomologie à valeurs dans les recouvrements de X :

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

L'addition dans $H^1(X, \mathcal{F})$ est définie comme suit avec des représentants pour en faire un groupe abélien. Soient deux classes de 1-cohomologie $x, x' \in H^1(X, \mathcal{F})$ qui sont représentés par deux classes relatives à deux recouvrements $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ et $\xi' \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$. On choisit un raffinement quelconque $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ commun à ces deux recouvrements \mathfrak{U} et \mathfrak{U}' et l'on définit alors :

$$x + x' \in H^1(X, \mathcal{F})$$

comme étant la classe d'équivalence de la somme de leurs restrictions au sous-recouvrement :

$$\text{classe}(\text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) + \text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\xi')) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

On vérifie (exercice) que cette opération est indépendante des choix effectués, et donc, elle munit $H^1(X, \mathcal{F})$ d'une structure de groupe abélien. Si \mathcal{F} est un faisceau d'espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} alors d'une manière naturelle, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ et $H^1(X, \mathcal{F})$ sont aussi des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On sait de plus grâce à une application d'un lemme qui précède que pour tout recouvrement \mathfrak{U} de X , l'application canonique 'prise de classe d'équivalence' :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

est injective. En particulier, cela implique la caractérisation suivante de l'annulation du premier groupe de cohomologie :

$$0 = H^1(X, \mathcal{F}) \iff H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour tout recouvrement } \mathfrak{U} \text{ de } X.$$

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit \mathcal{C}_X^∞ le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ (à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C}) sur X . Alors on a :

$$H^1(X, \mathcal{C}_X^\infty) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit donc de démontrer que l'on a :

$$0 = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty)$$

pour tout recouvrement \mathfrak{U} de X . Nous allons donner une démonstration en supposant que X est dénombrable à l'infini, démonstration qui sera d'ailleurs valable mot pour mot sur toute variété de dimension $n \geq 1$ quelconque pourvu qu'elle soit dénombrable à l'infini. Or d'après un théorème dû à Radó qui sera vu ultérieurement, toute surface de Riemann (mais pas toute variété différentiable de dimension ≥ 3) est dénombrable à l'infini.

⁶ Exercice : vérifier qu'on a bien affaire ici à une vraie relation d'équivalence.

Soit donc $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert *quelconque* de X . Pour se débarrasser du fait que le cardinal de I peut être *non* dénombrable, on peut alors procéder des deux manières essentiellement équivalentes.

□ Admettre l'énoncé connu — et valable lorsque et seulement lorsque X est dénombrable à l'infini — d'après lequel il existe toujours un sous-recouvrement *dénombrable* plus fin :

$$(\mathfrak{V}_j)_{j \in \mathbb{N}} = \mathfrak{V} \prec \mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I},$$

avec une application de raffinement $\tau: \mathbb{N} \rightarrow I$, et travailler alors avec \mathfrak{V} en adaptant ce qui suit, puisque de $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{C}_X^\infty) = 0$ on déduit $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty) = 0$ aussi.

□ Admettre l'énoncé connu — à nouveau valable lorsque et seulement lorsque X est dénombrable à l'infini — d'après lequel, sans rien supposer sur $\text{Card}(I)$, il existe toujours une *partition de l'unité* qui est subordonnée à ce recouvrement \mathfrak{U} , à savoir une famille $(\psi_i)_{i \in I}$ de fonctions :

$$\psi_i \in \mathcal{C}^\infty(X, [0, 1])$$

qui satisfont les trois propriétés suivantes :

- (i) $\text{Supp}(\psi_i) \subseteq U_i$;
- (ii) tout point de X possède un voisinage ouvert relativement compact dans X qui ne rencontre qu'un nombre *fini* de supports des ψ_i ;
- (iii) $\sum_{i \in I} \psi_i \equiv 1$, la sommation ayant alors un sens.

C'est de cette deuxième manière que nous allons procéder. Nous devons établir que tout 1-cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty)$ se scinde, *i.e.* est un cobord.

En effet, considérons la fonction $\psi_j f_{ij}$ définie sur l'intersection $U_i \cap U_j$, et nulle près du bord de U_j dans cette intersection. Si on la prolonge alors par 0 sur :

$$U_i \setminus \overline{U_i \cap U_j},$$

on obtient une fonction qui est \mathcal{C}^∞ sur U_i tout entier (exercice mental recommandé). On peut alors introduire la fonction suivante qui est définie sur U_i :

$$g_i := \sum_{j \in I} \psi_j f_{ij},$$

expression dans laquelle la somme est en fait localement finie au voisinage de tout point de U_i grâce à la propriété (ii) ci-dessus, ce qui assure donc que g_i est \mathcal{C}^∞ sur U_i . Maintenant, pour toute paire d'indices $i, j \in I$, on peut calculer la différence suivante sur $U_i \cap U_j$:

$$\begin{aligned} g_i - g_j &= \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \psi_k f_{jk} \\ &= \sum_{k \in I} \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) \\ &= \sum_{k \in I} \psi_k f_{ij} \quad [\text{relations de cocycle}] \\ &= f_{ij}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la 0-cochaîne (g_i) scinde le 1-cocycle (f_{ij}) . □

Théorème bis. *Plus généralement, les quatre faisceaux de formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur X :*

$$T_X^*, \quad T_X^{*(1,0)}, \quad T_X^{*(0,1)}, \quad \Lambda^2 T_X^*$$

possèdent eux aussi — exercice d'application du formalisme — des l^{ers} groupes de cohomologie qui s'annulent. \square

Théorème. *Soit X une surface de Riemann simplement connexe. Alors si \mathbb{C}_X et \mathbb{Z}_X désignent les faisceaux d'applications localement constantes sur X à valeurs dans \mathbb{C} et dans \mathbb{Z} , on a les deux annulations cohomologiques :*

$$0 = H^1(X, \mathbb{C}_X) \quad \text{et} \quad 0 = H^1(X, \mathbb{Z}_X).$$

DÉMONSTRATION. C'est une application non complètement immédiate du théorème qui précède. Traitons pour commencer le cas du faisceau \mathbb{C}_X .

Supposons que $\mathfrak{U} = \cup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert de X et soit un 1-cocycle $(c_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$. Puisque l'on a trivialement :

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty),$$

la démonstration du théorème qui précède nous fournit une 0-cochaîne $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty)$ de fonctions \mathcal{C}^∞ mais pas forcément localement constantes qui scinde notre cocycle, à savoir :

$$c_{ij} = f_i - f_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j,$$

pour toute paire d'indices $i, j \in I$. Mais comme on a évidemment $dc_{ij} = 0$, on en déduit $df_i = df_j$ sur $U_i \cap U_j$, et par conséquent, il existe une 1-forme différentielle globalement définie $\omega \in \Gamma(X, T^*X)$ telle que :

$$\omega|_{U_i} = df_i,$$

pour tout $i \in I$, et puisque $d(df_i) = 0$, cette 1-forme est automatiquement fermée : $0 = d\omega$. Grâce à la simple connexité de X , un théorème vu dans un des chapitres qui précèdent stipule alors qu'il existe une primitive $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ à cette forme fermée, à savoir : $\omega = df$. Mais si l'on pose alors :

$$c_i := (f_i - f)|_{U_i},$$

en se servant de f comme terme correctif, on voit immédiatement que l'on a :

$$dc_i = df_i - df = \omega - \omega = 0$$

sur U_i , ce qui montre que la fonction c_i est localement constante, et donc par définition $(c_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_X)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que, sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, on a :

$$c_{ij} = f_i - f_j = (f_i - f) - (f_j - f) = c_i - c_j,$$

ce qui montre bien que le 1-cocycle (c_{ij}) se scinde.

Traitons à présent le cas du faisceau \mathbb{Z}_X . En utilisant ce qui vient d'être démontré pour \mathbb{C}_X , étant donné un 1-cocycle quelconque $(a_{jk}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}_X)$, on peut trouver une 1-cochaîne $(c_i) \in C^0(\mathfrak{U}_X, \mathbb{C}_X)$ de fonctions localement constantes à valeurs dans \mathbb{C} — mais pas encore forcément dans \mathbb{Z} — qui le scinde :

$$a_{jk} = c_j - c_k \quad \text{sur } U_j \cap U_k.$$

Mais comme $\exp(2i\pi a_{jk}) = 1$, on a automatiquement $\exp(2i\pi c_j) = \exp(2i\pi c_k)$ sur toute intersection $U_j \cap U_k$. La surface de Riemann X étant connexe (par définition !), il existe une constante $b \in \mathbb{C}^*$ telle que l'on ait globalement :

$$b = \exp(2i\pi c_j) \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Choisissons alors un $c \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(2i\pi c) = b$ et posons en utilisant cette constante correctrice :

$$a_j := c_j - c.$$

Puisque l'on a évidemment avec ces données :

$$\exp(2i\pi a_j) = \exp(2i\pi c_j) \exp(-2i\pi c) = b b^{-1} = 1,$$

il en découle que chaque $a_j \in \mathbb{Z}$ est un entier, et donc que $(a_j) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}_X)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que, sur chaque intersection $U_j \cap U_k$, on a :

$$a_{jk} = c_j - c_k = (c_j - c) - (c_k - c) = a_j - a_k,$$

ce qui montre bien que le 1-cocycle (a_{jk}) se scinde. \square

Théorème de Leray. Soit \mathcal{F} un faisceau arbitraire de groupes abéliens sur un espace topologique X quelconque. S'il existe un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X tel que l'on ait :

$$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$$

pour tout $i \in I$, alors le 1^{er} groupe de cohomologie de \mathcal{F} à valeurs dans X peut être calculé directement avec ce recouvrement :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

sans passer aux limites inductives.

Un tel recouvrement, qui est appelé *recouvrement de Leray* (d'ordre 1) pour le faisceau \mathcal{F} , permet, dans certaines circonstances, de calculer aisément le 1^{er} groupe de cohomologie de \mathcal{F} , voir exemples et exercices ci-dessous.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que pour tout recouvrement $\mathfrak{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X qui raffine \mathfrak{U} , à savoir qui satisfait $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$, l'application injective naturellement associée :

$$\text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

est aussi surjective, donc est un isomorphisme.

Soit donc $\tau: A \rightarrow I$ une application de raffinement avec $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ pour tout indice $\alpha \in A$. Afin d'établir la surjectivité de $\text{restr}_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$, on doit montrer que pour tout 1-cocycle quelconque $(f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ au niveau plus raffiné \mathfrak{V} , il existe un 1-cocycle $F_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ au niveau initial \mathfrak{U} tel que le 1-cocycle différence :

$$(F_{\tau(\alpha), \tau(\beta)}) - (f_{\alpha\beta})$$

s'identifie à l'image $\delta((h_\alpha)_{\alpha \in A})$ par l'opérateur cobord δ d'un certain 1-cobord $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ avec $h_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)$.

Voici comment procéder. Pour tout $i \in I$ quelconque fixé, la famille de sous-ouverts :

$$(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$$

constitue manifestement un recouvrement ouvert de U_i que nous désignerons en abrégé par $U_i \cap \mathfrak{V}$. Comme on a par hypothèse :

$$0 = H^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}),$$

le 1-cocycle $(f_{\alpha\beta})$ se scinde sur U_i au sens où il existe des :

$$g_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap \mathfrak{V})$$

pour tout $\alpha \in A$ au moyen desquels on peut écrire :

$$(*) \quad f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta} \quad \text{sur } U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta.$$

Maintenant, sur l'intersection quadruple $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$, on a immédiatement :

$$g_{j\alpha} - g_{i\alpha} = g_{j\beta} - g_{i\beta},$$

et ensuite grâce à l'axiome de recollement appliqué au recouvrement $(U_i \cap U_j) \cap \mathfrak{V}$ de chaque $U_i \cap U_j$, on produit des éléments $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tels que :

$$(**) \quad F_{ij} = g_{j\alpha} - g_{i\alpha} \quad \text{sur } U_i \cap U_j \cap V_\alpha.$$

Il découle immédiatement de ces dernières relations que la 1-cochaîne (F_{ij}) satisfait les relations de cocycle sur toute intersection triple $U_i \cap U_j \cap U_k$, et donc $(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

En introduisant alors la 1-cochaîne :

$$h_\alpha := g_{\tau(\alpha), \alpha}|_{V_\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha),$$

nous pouvons enfin vérifier que la différence de 1-cocycles en question sur $V_\alpha \cap V_\beta$:

$$\begin{aligned} F_{\tau(\alpha), \tau(\beta)} - f_{\alpha\beta} &= (g_{\tau(\beta), \alpha} - g_{\tau(\alpha), \alpha}) - f_{\alpha\beta} && \text{[appliquer (*) avec } j := \tau(\beta) \text{ et } i := \tau(\alpha)] \\ &= (g_{\tau(\beta), \alpha} - g_{\tau(\alpha), \alpha}) - (g_{\tau(\beta), \alpha} - g_{\tau(\beta), \beta}) && \text{[appliquer * avec } i := \tau(\beta)] \\ &= \underline{g_{\tau(\beta), \alpha}} - g_{\tau(\alpha), \alpha} - \underline{g_{\tau(\beta), \alpha}} + g_{\tau(\beta), \beta} && \text{[simplifier !]} \\ &= g_{\tau(\beta), \beta} - g_{\tau(\alpha), \alpha} \\ &= h_\beta - h_\alpha \end{aligned}$$

s'identifie bien à l'image par δ de cette 1-cochaîne (h_α) . \square

Exemple. Comme application 'pédagogique' de ce *théorème de Leray*, montrons, en notant simplement à gauche \mathbb{Z} le faisceau des applications localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} , que l'on a :

$$H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Pour ce faire, introduisons les deux ouverts étoilés :

$$U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad U_2 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+,$$

dont la réunion $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$ recouvre visiblement notre espace. Puisque ces deux ouverts sont étoilés, ils sont simplement connexes, et nous avons vu alors que :

$$0 = H^1(U_1, \mathbb{Z}) = H^1(U_2, \mathbb{Z}),$$

ce qui nous assure grâce au théorème de Leray que pour ce recouvrement $\mathfrak{U} := (U_i)_{i=1,2}$ de \mathbb{C}^* , on a :

$$H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}).$$

Maintenant, puisque tout 1-cocycle $a_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ est alternée, *i.e.* satisfait $0 = a_{ii}$ et $a_{ji} = -a_{ij}$, il est complètement déterminé par a_{12} , et donc on a :

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \quad \text{[sections du faisceau } \mathcal{F} := \mathbb{Z}\text{]}.$$

Mais l'intersection $U_1 \cap U_2$ possède exactement deux composantes connexes, à savoir les demi-plans complexes inférieur et supérieur épointés, et donc on a :

$$\mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Comme U_i est connexe, on a aussi $\mathbb{Z}(U_i) \cong \mathbb{Z}$ et donc aussi :

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Relativement à ces deux isomorphismes, on vérifie (exercice) que l'opérateur cobord :

$$\delta: C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$$

est donné par l'application concrète suivante dont les deux composantes images coïncident :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$(b_1, b_2) \longmapsto (b_2 - b_1, b_2 - b_1).$$

Ainsi, les cobords sont exactement le sous-groupe $B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ constitué des éléments (a_1, a_2) dont les deux entrées coïncident : $a_2 = a_1$. Il en découle facilement que :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / B \cong \mathbb{Z}.$$

Groupes de cohomologie d'ordre zéro. Soit \mathcal{F} un faisceau arbitraire de groupes abéliens sur un espace topologique X quelconque et soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . On pose :

$$B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := 0,$$

$$Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker} \left(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \right),$$

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ &= Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

D'après la définition de l'opérateur cobord δ , une 0-cochaîne $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ appartient à $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ précisément lorsque :

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

pour toute paire d'indices $i, j \in I$. Grâce à une application de l'axiome de recollement, les éléments $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ se recollent ensemble pour produire un élément global $f \in \mathcal{F}(X)$ dont les restrictions aux U_i sont les f_i , et donc on a un isomorphisme naturel :

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Théorème. Les groupes de cohomologie d'ordre zéro de n'importe quel faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens :

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$

s'identifient naturellement aux sections globales de \mathcal{F} . □

Exercices

Exercice 13.1. Montrer que $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

Exercice 13.2. Soient p_1, \dots, p_n des points de \mathbb{C} distincts deux à deux et soit :

$$X := \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Montrer que :

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Indication : construire un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=1,2}$ de X par deux ouverts U_1 et U_2 connexes et simplement connexes dont l'intersection $U_1 \cap U_2$ possède $n + 1$ composantes connexes.

Exercice 13.3. (a) Soit X une variété \mathcal{C}^∞ et soient deux ouverts $V \Subset U \subset X$. Montrer que V rencontre seulement un nombre fini de composantes connexes de U .

(b) Soit X une variété \mathcal{C}^∞ compacte et soient $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ deux recouvrements ouverts finis de X tels que $V_i \Subset U_i$ pour tout $i \in I$. Montrer que :

$$\text{Im}(Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}))$$

est un espace vectoriel de dimension finie.

(c) Soit X une surface de Riemann compacte. Montrer que $H^1(X, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie. *Indication* : utiliser deux recouvrements finis $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ de X avec $V_i \Subset U_i$ pour tout i tels que chaque U_i et chaque V_i est homéomorphe à un disque ouvert non vide de \mathbb{C} .

Exercice 13.4. (a) Soit X une surface de Riemann compacte. Montrer que l'application :

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C})$$

induite par l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ est injective.

(b) Soit X une surface de Riemann compacte. Montrer que $H^1(X, \mathbb{Z})$ est un module sur \mathbb{Z} qui est libre et finiment engendré. *Indication* : montrer d'abord en raisonnant comme dans l'exercice précédent que $H^1(X, \mathbb{Z})$ est finiment engendré et utiliser **(a)** pour montrer que $H^1(X, \mathbb{Z})$ est libre.

14. Théorème de Dolbeault à une variable

Dans ce chapitre, on résout l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g,$$

où g est une fonction \mathcal{C}^∞ sur un disque ouvert $\mathbb{D}_R \subset \mathbb{C}$ de rayon $0 < R \leq \infty$. On en déduit alors que le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{D}_R, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}) = 0$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}$ des fonctions holomorphes sur \mathbb{D}_R s'annule.

Lemme. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ une fonction lisse à valeurs complexes dont le support est compact dans \mathbb{C} . Alors il existe une fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

DÉMONSTRATION. Définissons la fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sera solution par l'intégrale double suivante, dite de *Cauchy-Green-Pompeiu*¹ :

$$f(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z},$$

Comme l'intégrande possède visiblement une singularité lorsque $z = \zeta$, on doit raisonner pour montrer que cette intégrale existe et qu'elle dépend d'une manière \mathcal{C}^∞ de ζ . La façon la plus simple et naturelle de s'en assurer, c'est de passer à des coordonnées polaires centrées au point ζ :

$$z = \zeta + r e^{i\theta}.$$

Par rapport à l'intégration, ζ est une constante, et l'on a :

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy = -2ir dr \wedge d\theta.$$

Ainsi donc, nous pouvons réexprimer cette intégrale apparemment singulière en une nouvelle intégrale double dont la singularité disparaît :

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} r_\circ dr d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} g(\zeta + r e^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta. \end{aligned}$$

Puisque le support de g est compact, on doit en fait seulement intégrer sur un certain rectangle polaire $\{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ — ce qui correspond à un disque — pour un rayon $R > 0$ assez grand. Ainsi nous pouvons différentier sous le signe somme de cette intégrale définie bornée et obtenir :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g(\zeta + r e^{i\theta})}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta} dr d\theta.$$

¹ Pour alléger, nous ne noterons pas ici $f(\zeta, \bar{\zeta})$ les arguments d'une fonction f non holomorphe qui n'est que \mathcal{C}^∞ , mais $f(\zeta)$, étant entendu que cela ne prêterait pas à confusion.

Maintenant, en revenant aux coordonnées non polaires initiales, cette dernière expression se réécrit aisément comme limite d'une intégration sur un l'anneau $A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon \leq |z| \leq R\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{z} dz \wedge d\bar{z}.$$

Mais puisque pour $z \neq 0$ on peut intervertir comme suit les différentiations par rapport à $\bar{\zeta}$ et par rapport à \bar{z} :

$$\frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{z} = \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g(\zeta + z)}{z} \right).$$

On en déduit que notre limite d'intégrales doubles non singulières devient :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g(\zeta + z)}{z} \right) dz \wedge d\bar{z} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} d\omega,$$

en introduisant naturellement la 1-forme différentielle (singulière en $z = 0$) :

$$\omega(z) := \frac{1}{2i\pi} \frac{g(\zeta + z)}{z} dz,$$

expression dans laquelle on considère z comme variable et ζ comme constant. Or grâce à une application du théorème de Stokes sur les anneaux vu dans un chapitre qui précède, on peut maintenant continuer le calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} d\omega = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial A_\varepsilon} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \omega,$$

et pour calculer cette dernière intégrale, on paramétrise le cercle $\{|z| = \varepsilon\}$ par $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ce qui nous donne enfin :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

À ce stade, on voit que l'intégrale obtenue fournit la valeur moyenne de la fonction g sur le cercle de centre ζ et de rayon ε , donc par continuité de g — qui est même \mathcal{C}^∞ en fait — on déduit immédiatement que cette valeur moyenne converge, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la valeur ponctuelle, *i.e.* :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = g(\zeta),$$

comme nous devons l'établir. □

Le théorème suivant, résultat principal de ce court chapitre, montre qu'avec des efforts techniques supplémentaires, on peut supprimer l'hypothèse que g était à support compact dans un disque de grand rayon $R > 0$. C'est un cas spécial du *lemme de Dolbeault* dans la théorie des fonctions à plusieurs variables complexes.

Théorème de Dolbeault. *Soit un disque ouvert de rayon quelconque :*

$$\mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

éventuellement infini $0 < R \leq +\infty$, et soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, \mathbb{C})$ une fonction lisse à valeurs complexes. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, \mathbb{C})$ définie sur \mathbb{D}_R tout entier qui résout l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

sur \mathbb{D}_R .

Naturellement, la solution f n'est en rien unique : on peut lui ajouter des constantes, et même des fonctions holomorphes quelconques dans \mathbb{D}_R .

Il importe d'ores et déjà de faire remarquer que cet énoncé possède une signification en termes de formes différentielles. On notera dans ce chapitre et ceux qui suivent $\bar{\partial}$ l'opérateur précédemment noté d'' . On a donc $d = \partial + \bar{\partial}$ au lieu de $d = d' + d''$ et pour tout fonction \mathcal{C}^∞ sur X vue dans une carte locale, $\bar{\partial}\phi := \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z}$.

Reformulation du théorème de Dolbeault. *Étant donné une $(0, 1)$ -forme quelconque :*

$$\psi d\bar{z} \in \Gamma(\mathbb{D}_R, T^{*(0,1)}\mathbb{D}_R)$$

de classe \mathcal{C}^∞ sur un disque $\mathbb{D}_R \subset \mathbb{C}$, il existe toujours une fonction :

$$\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, \mathbb{C})$$

qui résout l'« équation $\bar{\partial}$ » :

$$\bar{\partial}\phi = \psi d\bar{z}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Une solution à cette équation différentielle ne peut plus être simplement donnée par une intégrale comme précédemment, parce que l'expression :

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}_R} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}$$

ne converge pas en général pour peu que g explose au bord de \mathbb{D}_R . C'est pourquoi nous devons introduire un *procédé d'exhaustion* qui nous permettra d'appliquer pas à pas le lemme, et de corriger les solutions obtenues de manière à tout faire converger.

Soit donc $0 < R_0 < R_1 < \dots < R_n$ une suite strictement croissante de rayons satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = R,$$

et considérons les disques ouverts centrée en l'origine et ayant ces rayons :

$$\mathbb{D}_{R_n} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}.$$

Visiblement, ces disques 'exhaustent' (remplissent en croissant) \mathbb{D}_R .

Prenons une suite de fonctions $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, [0, 1])$ à supports compacts :

$$\text{Supp}(\psi_n) \subset \mathbb{D}_{R_{n+1}} \quad \text{telles que : } \psi_n|_{\mathbb{D}_{R_n}} \equiv 1.$$

Pour tout n , la fonction multipliée $\psi_n g$ s'annule hors de $\mathbb{D}_{R_{n+1}}$, donc on peut la prolonger par 0 et en faire une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C} tout entier, fonction à laquelle on peut appliquer le lemme qui précède. Ce dernier fournit de la sorte une fonction $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ telle que l'on ait :

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = \psi_n g \quad \text{en restriction à } \mathbb{D}_R.$$

Posons $\tilde{f}_1 := f_1$ et montrons maintenant par récurrence que nous pouvons modifier la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ en une autre suite $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$ qui, pour tout entier $n \geq 1$, satisfera les deux propriétés suivantes² :

- (i) $\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$ sur \mathbb{D}_{R_n} ;
- (ii) $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{D}_{R_{n-1}})} = \max_{z \in \mathbb{D}_{R_{n-1}}} |\tilde{f}_{n+1}(z) - \tilde{f}_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}$.

Supposons donc que les fonctions $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ aient déjà été construites. Alors puisque $\psi_n = 1$ sur \mathbb{D}_{R_n} on a en soustrayant :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_{n+1} - \tilde{f}_n) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{D}_{R_n},$$

ce qui signifie que cette différence $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ est holomorphe sur \mathbb{D}_{R_n} . En prenant suffisamment de termes dans la série de Taylor de $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ développée à l'origine et convergente sur \mathbb{D}_{R_n} , on peut manifestement produire un polynôme $P_n \in \mathbb{C}[z]$ tel que sur le sous-disque strict $\mathbb{D}_{R_{n-1}} \Subset \mathbb{D}_{R_n}$, on ait (on veut à l'avance un majorant à droite dont la \sum_n converge) :

$$\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - P_n\|_{L^\infty(\mathbb{D}_{R_{n-1}})} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Si donc nous soustrayons de f_{n+1} le nouveau terme correctif :

$$\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P_n,$$

alors la propriété (ii) sera visiblement satisfaite au niveau $n + 1$. De plus, sur $\mathbb{D}_{R_{n+1}}$, on peut calculer :

$$\frac{\partial \tilde{f}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \psi_{n+1} g = g,$$

ce qui montre que la propriété (i) est aussi satisfaite au niveau $n + 1$, et achève notre récurrence.

Or puisque tout point $z \in \mathbb{D}_R$ est contenu dans presque tous les disques \mathbb{D}_{R_n} , la limite :

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$

existe puisque cette suite $(\tilde{f}_n(z))_n$ est de Cauchy grâce à la convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$. On en déduit que sur \mathbb{D}_{R_n} , on peut écrire :

$$f = \tilde{f}_n + \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k).$$

Comme par construction, pour tout $k \geq n$, les fonctions-termes de cette série :

$$\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$$

sont holomorphes sur \mathbb{D}_{R_n} grâce à une soustraction dans (i), et comme leur norme L^∞ est contrôlée normalement sur \mathbb{D}_{R_n} par $\frac{1}{2^k}$ grâce à (ii), on en déduit que ladite série converge

² Pour $K \Subset \mathbb{C}$ compact, on définit la norme L^∞ d'une fonction f sur K qui est au moins continue voire mesurable par :

$$\|f\|_{L^\infty(K)} := \max_{z \in K} |f(z)|,$$

un nombre appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

uniformément vers une fonction :

$$F_n := \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

qui est holomorphe sur \mathbb{D}_{R_n} . Ainsi la fonction :

$$f = \tilde{f}_n + F_n$$

est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{D}_{R_n} pour tout n , et donc puisque tout point $z \in \mathbb{D}_R$ finit par appartenir à un certain \mathbb{D}_{R_n} , cette fonction f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{D}_R tout entier. Enfin, en un point $z \in \mathbb{D}_R$ quelconque, on a $z \in \mathbb{D}_{R_n}$ pour une infinité d'entiers $n \geq N_z$ assez grand, donc pour ces n :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}(z) = g \quad \text{lorsque } z \in \mathbb{D}_{R_n},$$

ce qui achève d'établir que cette fonction f est bien une solution désirée de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ sur le disque original \mathbb{D}_R . \square

Soit maintenant :

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

l'opérateur laplacien.

Corollaire. Soit comme ci-dessus $\mathbb{D}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ avec $0 < R \leq \infty$. Alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, \mathbb{C})$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R, \mathbb{C})$ telle que :

$$\Delta f = g.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le théorème, choisissons une première fonction $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R)$ telle que $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = g$, choisissons ensuite une deuxième fonction $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R)$ telle que $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \bar{f}_1$, et vérifions par le calcul que la fonction :

$$f := \frac{1}{4} \bar{f}_2$$

est solution de $\Delta f = g$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\overline{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}} \right) = \overline{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}} = \bar{g} = g,$$

ce qui fut élémentaire. \square

Nous pouvons maintenant déduire du théorème de Dolbeault l'annulation annoncée du premier groupe de cohomologie de Čech à valeurs dans le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}$ des fonctions holomorphes sur un disque ouvert \mathbb{D}_R .

Théorème.

$$H^1(\mathbb{D}_R, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}) = 0$$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R})$ un 1-cocycle à valeurs dans le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}$. On veut montrer que $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}) = 0$, i.e. que (f_{ij}) peut être scindé.

Les fonction holomorphes étant \mathcal{C}^∞ , on a :

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R)),$$

et puisque nous avons déjà démontré que $H^1(\mathbb{D}_R, \mathcal{C}_{\mathbb{D}_R}^\infty) = 0$, il existe une 0-cochaîne $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}_{\mathbb{D}_R}^\infty)$ telle que :

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j,$$

pour tous $i, j \in I$. Or comme $\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}} = 0$, on a $\frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}}$ sur $U_i \cap U_j$, et donc il existe une fonction globale $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R)$ telle que $h|_{U_i} = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}}$ sur chaque U_i . Mais grâce au théorème de Dolbeault, on dispose d'une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}_R)$ telle que :

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = h,$$

et si on corrige donc chaque g_i au moyen de cette fonction en :

$$f_i := g_i - g,$$

alors il est clair que chaque f_i ainsi corrigée devient *holomorphe* sur U_i , puisque $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$. Ainsi on a construit un 0-cocycle holomorphe $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_R})$ et l'on peut maintenant vérifier comme argument terminal que l'on a bien :

$$f_i - f_j = g_i - g_j = f_{ij}$$

sur toute intersection $U_i \cap U_j$, c'est-à-dire que (f_{ij}) se scinde. \square

Théorème. *Pour la sphère de Riemann³, on a de même $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Posons $U_1 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ et $U_2 := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. Puisque $U_1 = \mathbb{C}$ et $U_2 \cong \mathbb{C}$ sont tous deux simplement connexes, on a déjà démontré que :

$$0 = H^1(U_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = H^1(U_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}),$$

donc ce recouvrement $\mathcal{U} = U_1 \cup U_2$ de \mathbb{P}^1 à deux ouverts est un recouvrement de Leray de \mathbb{P}^1 et le théorème de Leray nous assure alors que :

$$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Par conséquent, la démonstration revient à vérifier que tout 1-cocycle $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ peut être scindé.

Pour cela, observons qu'il suffit clairement de trouver deux fonctions holomorphes $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $i = 1, 2$, satisfaisant :

$$f_{12} = f_1 - f_2 \quad \text{sur } U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*.$$

À cette fin, développons :

$$f_{12}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

en série de Laurent uniformément convergente sur les compacts de \mathbb{C}^* , et posons simplement :

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{et} \quad f_2(z) := - \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Alors $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ (exercice de rappel sur les séries de Laurent) et $f_1 - f_2 = f_{12}$. \square

³ Pour une surface de Riemann compacte X , on établira dans le prochain chapitre que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension *finie* un certain entier $g \in \mathbb{N}$, appelé *genre* de X , entier qui compte aussi le nombre de 'trous' que possède X en tant que surface topologique. Ici donc, le genre de $X = \mathbb{P}^1 \cong S^2$ est nul.

Exercices

Exercice 14.1. Soit $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ avec $0 < R \leq \infty$. On note $\mathcal{H}_{\mathbb{D}_R}$ le faisceau des fonctions harmoniques sur \mathbb{D}_R , i.e. pour tout sous-ouvert $U \subset \mathbb{D}_R$:

$$\mathcal{H}_{\mathbb{D}_R}(U) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\}.$$

Montrer que l'on a $H^1(\mathbb{D}_R, \mathcal{H}_{\mathbb{D}_R}) = 0$.

Exercice 14.2. (a) Montrer que $\mathcal{U} := (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$ est un recouvrement de Leray pour le faisceau $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ des 1-formes holomorphes sur \mathbb{P}^1 .

(b) Montrer que :

$$H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}) \cong H^1(\mathcal{U}, \Omega_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{C},$$

et que la classe de cohomologie de la 1-forme holomorphe :

$$\frac{dz}{z} \in \Omega(U_1 \cap U_2) \cong Z^1(\mathcal{U}, \Omega_{\mathbb{P}^1})$$

constitue une base de $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1})$.

Exercice 14.3. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ une fonction lisse à support compact sur le plan complexe. Montrer qu'il existe une solution $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

dont le support :

$$\text{Supp}(f) \Subset \mathbb{C}$$

est lui aussi compact si et seulement si l'on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0 = \iint_{\mathbb{C}} z^n g(z) dz \wedge d\bar{z}.$$

15. Théorème de finitude de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$

Dans ce chapitre, on démontre que pour toute surface de Riemann compacte X , le 1^{er} groupe de cohomologie (de Čech) $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace vectoriel dont la dimension, *finie*, est appelée le *genre* de X . Une conséquence notable de ce théorème de finitude est qu'il existe de nombreuses fonctions méromorphes non constantes sur de telles surfaces de Riemann compactes X , quel que soit leur genre. Eu égard à des applications ultérieures aux surfaces de Riemann non compacte, il est utile de travailler plus généralement sur des ouverts relativement compacts d'une surface de Riemann quelconque.

Norme L^2 pour les fonctions holomorphes. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert quelconque. Étant donné une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(D)$, on définit sa *norme L^2* par :

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\iint_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right)^{1/2},$$

un nombre positif qui peut éventuellement être infini :

$$\|f\|_{L^2(D)} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Définition. Lorsque cette norme $\|f\|_{L^2(D)} < \infty$ est finie, on dit que f est *de carré intégrable* sur D et on note $L^2(D, \mathcal{O})$ l'espace *vectoriel* (exercice) de toutes les fonctions de carré intégrable sur D .

Par exemple, dans le cas où D est relativement compact, voire plus généralement où :

$$\text{Aire}(D) := \iint_D dx dy < \infty,$$

alors pour toute fonction holomorphe *bornée* $f \in \mathcal{O}(D) \cap L^\infty(D)$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(D)} &\leq \sqrt{\text{Aire}(D)} \|f\|_{L^\infty(D)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

où la norme L^∞ de f est bien entendu définie par :

$$\|f\|_{L^\infty(D)} := \sup \{ |f(z)| \in \mathbb{R}_+ : z \in D \}.$$

Étant donné deux fonction $f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$, on peut définir leur produit scalaire hermitien by :

$$\langle f, g \rangle := \iint_D f \bar{g} dx dy,$$

et l'intégrale converge grâce à l'inégalité ponctuelle :

$$|f(z) \overline{g(z)}| \leq \frac{1}{2} (|f(z)|^2 + |g(z)|^2).$$

Avec ce produit scalaire hermitien, $L^2(D, \mathcal{O})$ est un espace vectoriel complexe hermitien unitaire dans lequel une notion naturelle d'orthogonalité existe.

Maintenant, soit :

$$\mathbb{D}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

le disque ouvert de centre un point $a \in \mathbb{C}$ et de rayon un réel strictement positif $r > 0$. Alors on démontre (exercice de révision de L3) que les monômes :

$$\psi_n(z) := (z - a)^n$$

forment un système complet orthogonal de $L^2(\mathbb{D}_r(a), \mathcal{O})$ et on vérifie en passant aux coordonnées polaires centrées en a que leur normes L^2 sont égales à :

$$\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a))} = \frac{\sqrt{\pi} r^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Or, si on considère le développement en série entière d'une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{D}_r(a), \mathcal{O})$ au point a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

l'identité de Parseval-Plancherel fournit :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a))}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} |c_n|^2.$$

Théorème. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert quelconque, soit $r > 0$ et soit :

$$D^{(r)} := \{z \in \mathbb{C} : \mathbb{D}_r(z) \subset D\}$$

l'ensemble des points de D qui sont à distance $\geq r$ du bord ∂D . Alors pour toute fonction $f \in L^2(D, \mathcal{O})$, on a :

$$\|f\|_{L^\infty(D^{(r)})} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $a \in D^{(r)}$ un point arbitraire et soit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

le développement en série entière de f en a . Grâce à l'identité de Parseval-Plancherel rappelée à l'instant, on peut estimer :

$$|f(a)| = |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a))} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Enfin, puisque l'on a :

$$\|f\|_{L^\infty(D^{(r)})} = \sup \{|f(a)| \in \mathbb{R}_+ : a \in D^{(r)}\},$$

le résultat vient. □

En particulier, il découle de ce théorème que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(D, \mathcal{O})$, alors elle converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de D , et donc la limite est holomorphe d'après un théorème connu dû à Cauchy. Cela montre que $L^2(D, \mathcal{O})$ est complet, donc constitue un espace de Hilbert.

Lemme. Soient $D' \Subset D$ une paire d'ouverts de \mathbb{C} . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel fermé :

$$F \subset L^2(D, \mathcal{O})$$

de codimension finie tel que l'on ait :

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}$$

pour toute fonction $f \in F$.

DÉMONSTRATION. Puisque par hypothèse la fermeture $\overline{D'}$ est compacte et contenue dans D , il existe $r > 0$ et il existe un nombre fini de points $a_1, \dots, a_k \in D$ tels que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathbb{D}_r(a_j) \subset D$ pour tout $j = 1, \dots, k$;

(ii) $D' \subset \bigcup_{j=1}^k \mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(a_j)$.

Choisissons alors en entier n assez grand pour que :

$$k \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

et introduisons l'ensemble F des fonctions $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ qui s'annulent en *tous* les points a_j à un ordre $\geq n$. On se convainc aisément (exercice) que F est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(D, \mathcal{O})$ dont la codimension est $\leq kn$.

Maintenant, toute fonction $f \in F$ peut être développée en tout point a_j comme série entière :

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} (z - a_j)^{\nu}$$

dont le rayon de convergence est $\geq r$, puisque $\mathbb{D}_r(a_j) \subset D$. Grâce à l'identité de Parseval-Plancherel vue ci-dessus, pour tout $\rho \leq r$, on a :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D}_{\rho}(a_j))}^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\pi \rho^{2n+2}}{\nu+1} |c_{\nu}|^2,$$

et il découle de là en posant $\rho := r$ puis $\rho := \frac{r}{2}$ que :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(a_j))} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a_j))}.$$

La propriété (i) implique immédiatement les inégalités :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a_j))} \leq \|f\|_{L^2(D)},$$

pour tout $j = 1, \dots, k$, et la propriété (ii) implique aussi de même :

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(a_j))}.$$

Il ne reste plus qu'à combiner toutes ces inégalités :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(D')} &\leq k \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a_j))} \\ &\leq k \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_{L^2(D)} \\ &\leq \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}, \end{aligned}$$

pour obtenir la conclusion. □

Cochâines de carré intégrable. Sur une surface de Riemann X qu'on ne suppose pas forcément compacte, on choisit une famille finie de cartes :

$$(U'_i, z_i) \quad (i = 1 \dots n)$$

dont chaque image :

$$z_i(U'_i) = \mathbb{D}'_i \subset \mathbb{C}$$

est un disque ouvert \mathbb{D}'_i non vide, et l'on choisit des sous-ouverts $U_i \Subset U'_i$ qui sont images inverses de sous-disques ouverts non vides $\mathbb{D}_i \Subset \mathbb{D}'_i$. Il est important de faire remarquer ici que la famille :

$$\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n}$$

n'est pas supposée recouvrir X , bien que lorsque X sera supposée compacte ci-dessous, une telle hypothèse deviendra naturelle. L'intention en effet est de développer des énoncés techniques qui seront valables et utiles y compris lorsque X n'est pas compacte.

On introduit alors des normes L^2 sur les deux groupes de 0- et de 1-cochâines $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ et $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ relatifs à cette famille d'ouverts¹ :

$$\mathfrak{U} = U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

de la manière suivante.

(i) Pour $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, on pose simplement :

$$\|(f_i)\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(U_i)}^2.$$

(ii) Pour $(f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, on pose simplement de même :

$$\|(f_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}^2.$$

Bien entendu ici, les normes L^2 des fonctions holomorphes f_i et f_{ij} sont calculées en utilisant les cartes (U'_i, z_i) :

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{L^2(U_i)} &:= \|f_i \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i))}, \\ \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)} &:= \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i \cap U_j))}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire L^2 , les ensembles de 0- et de 1-cochâines dont la norme L^2 est finie forment tous deux des espaces vectoriels de Hilbert qui seront notés :

$$C_{L^2}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad C_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X).$$

Les 1-cocycles forment un sous-espace fermé (exercice) de $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ qui sera noté :

$$Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X).$$

Deux propositions techniques. Si $\mathfrak{V} = \bigcup_{i=1}^n V_i$ est une seconde famille d'ouverts de même cardinal qui sont compactement emboîtés dans les premiers ouverts :

$$V_i \Subset U_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n,$$

¹ La notion de cochaîne relative à une famille d'ouvert ne nécessite pas que les ouverts en question recouvrent complètement l'espace ambiant. Par léger abus, on identifie la famille d'ouverts à sa réunion.

alors le lemme vu précédemment montre (corollaire) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ de codimension finie tel que l'on ait, pour tout 1-cocycle $(f_{ij}) \in F$:

$$\|(f_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \|(f_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{U})}.$$

La proposition (très) technique suivante montre qu'à réduction près des familles d'ouverts, tous les 1-cocycle sont cohomologues. C'est dans l'écart entre les ouverts que se lira plus tard la finitude de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ pour X compacte.

Proposition. *Soit X une surface de Riemann quelconque et soit comme ci-dessus $\mathfrak{U} = \bigcup_{i=1}^n U_i$ une famille finie de $n \geq 1$ ouverts de cartes sur X homéomorphes à des disques qui est contenue dans une sur-famille analogue $\mathfrak{U}' = \bigcup_{i=1}^n U'_i$ avec $U'_i \ni U_i$ pour tout i . Alors à toute paire de familles $\mathfrak{W} = \bigcup_{i=1}^n W_i$ et $\mathfrak{V} = \bigcup_{i=1}^n V_i$ de n sous-ouverts compacts emboîtés :*

$$W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U'_i \quad (i=1 \dots n)$$

est associée une constante $C > 0$ telle que pour tout 1-cocycle L^2 sur \mathfrak{V} :

$$(f_{ij}) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X),$$

il existe un 1-cocycle holomorphe et L^2 sur \mathfrak{U} :

$$(F_{ij}) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$$

et il existe une 0-cochaîne holomorphe et L^2 sur \mathfrak{W} :

$$(l_i) \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$$

tels que, en restriction à \mathfrak{W} , on ait :

$$(f_{ij}) = (F_{ij}) + \delta((l_i)) \quad \text{sur chaque intersection } W_i \cap W_j,$$

avec le contrôle suivant de leurs normes L^2 :

$$\max(\|(F_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|(l_i)\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq C \|(f_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

DÉMONSTRATION. Soit donc $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$ un 1-cocycle holomorphe quelconque. Mettant pour l'instant entre parenthèses la considération des normes L^2 , construisons tout d'abord les deux cocycles recherchés (F_{ij}) et (l_i) .

Grâce au théorème d'annulation de H^1 pour les fonctions \mathcal{C}^∞ , il existe tout d'abord une 0-cochaîne $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{C}_X^\infty)$ qui scinde de manière lisse notre 1-cocycle holomorphe :

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{sur } V_i \cap V_j.$$

Puisque $\bar{\partial} f_{ij} = 0$, on déduit instantanément les coïncidences :

$$\bar{\partial} g_j = \bar{\partial} g_i \quad \text{sur chaque intersection } V_i \cap V_j,$$

et donc par recollement, il existe une $(0, 1)$ -forme différentielle 'globale' :

$$\omega \in \Gamma(V_1 \cup \dots \cup V_n, T^{*(0,1)} X)$$

qui redonne par restriction :

$$\omega|_{V_i} = \bar{\partial} g_i \quad (i=1 \dots n).$$

Or comme on a par hypothèse :

$$W_1 \cup \dots \cup W_n \Subset V_1 \cup \dots \cup V_n,$$

prenons une fonction-test $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ avec :

$$\text{Supp}(\psi) \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \quad \text{et} \quad \psi|_{W_1 \cup \dots \cup W_n} \equiv 1,$$

pour s'en servir comme multiplicateur qui localise notre $(0, 1)$ -forme :

$$\psi \omega$$

forme que nous décidons alors de voir comme étant \mathcal{C}^∞ à support compact *dans le plus gros ouvert* $U'_1 \cup \dots \cup U'_n$. Chaque $U'_i \cong \mathbb{D}'_i$ étant un disque, le théorème de Dolbeault produit alors pour tout $i = 1, \dots, n$ une fonction $h'_i \in \mathcal{C}^\infty(U'_i)$ qui résout l'équation :

$$\bar{\partial} h'_i = \psi \omega \quad \text{sur } U'_i.$$

Mais comme on en déduit par soustraction que $\bar{\partial} h'_i = \bar{\partial} h'_j$ sur chaque intersection $U'_i \cap U'_j$, les différences :

$$F'_{ij} := h'_j - h'_i \in \mathcal{O}(U'_i \cap U'_j)$$

s'avère être des fonctions *holomorphes*. On les restreint alors à la sous-famille \mathfrak{U} :

$$F_{ij} := F'_{ij}|_{U_i \cap U_j},$$

ce qui nous donne le 1-cocycle holomorphe voulu $(F_{ij}) \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$. Maintenant, sur chaque ouvert W_i de la plus petite taille, on a d'après ce qui précède :

$$\bar{\partial} h_i = \psi \omega = \omega = \bar{\partial} g_i,$$

et donc la différence $g_i - h_i$ est holomorphe sur W_i . Puisque $g_i - h_i$ est aussi *bornée* sur W_i , le 0-cocycle voulu :

$$(l_i) := ((g_i - h_i)|_{W_i}) \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$$

est trivialement de carré intégrable. Il nous reste maintenant seulement à vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} f_{ij} - F_{ij} &= g_j - g_i - h_j + h_i \\ &= (g_j - h_j) - (g_i - h_i) \\ &= l_j - l_i, \end{aligned}$$

sur chaque intersection $W_i \cap W_j$.

À présent, afin d'obtenir les estimées annoncées sur les normes L^2 , on considère l'espace de Hilbert produit :

$$H := Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \times Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X),$$

muni de la norme naturelle :

$$\|((F_{ij}), (f_{ij}), (l_i))\|_H := \left(\| (F_{ij}) \|_{L^2(\mathfrak{U})} + \| (f_{ij}) \|_{L^2(\mathfrak{V})} + \| (l_i) \|_{L^2(\mathfrak{W})} \right)^{1/2}.$$

Ensuite, on introduit le sous-espace vectoriel $L \subset H$ défini par la précédente résolution :

$$L := \{((F_{ij}), (f_{ij}), (l_i)) \in H : 0 = -(f_{ij}) + (F_{ij}) + \delta((l_i))\}.$$

Puisque L est fermé dans H (exercice mental), c'est un sous-espace de Hilbert de H . D'après ce qui a été vu à l'instant, l'application linéaire de projection :

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X) \\ ((f_{ij}), (F_{ij}), (l_i)) &\longmapsto (F_{ij}) \end{aligned}$$

est surjective. Grâce à un théorème dû à Banach² ici admis, cette application est nécessairement ouverte. Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(f_{ij}) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_X)$, il existe une préimage :

$$((f_{ij}), (F_{ij}), (l_i)) \in L$$

satisfaisant :

$$\|((f_{ij}), (F_{ij}), (l_i))\|_H \leq \| (F_{ij}) \|_{L^2(\mathfrak{Y})}$$

Cette constante C convient donc, ce qui conclut la démonstration. \square

Proposition. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie :*

$$S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$$

tel que pour tout 1-cocycle $(u_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, il existe un 1-cocycle $(s_{ij}) \in S$ et il existe une 0-cochaîne $(w_i) \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$ satisfaisant :

$$(u_{ij}) = (s_{ij}) - \delta((w_i)),$$

en restriction à chaque $W_i \cap W_j$.

Autrement dit (exercice mental), l'application naturelle induite par restriction :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$$

possède une image qui est de dimension finie.

DÉMONSTRATION. Soit $C > 0$ la constante de la proposition précédente, et posons :

$$\varepsilon := \frac{1}{2C}.$$

On a déjà vu juste avant ladite proposition qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ de codimension finie tel que l'on ait, pour tout 1-cocycle $(u_{ij}) \in F$:

$$\|(u_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \|(u_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{U})}.$$

Introduisons alors le supplémentaire orthogonal S de F dans $Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, lequel satisfait par définition :

$$F \perp S = Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X).$$

Maintenant, étant donné un 1-cocycle holomorphe arbitraire $(u_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ sans condition de norme L_2 relative à \mathfrak{U} , sa norme L^2 en restriction à la sous-famille $V_i \in U_i$ est néanmoins trivialement bornée :

$$\|(u_{ij})\|_{L^2(\mathfrak{W})} =: M < \infty.$$

² Ce théorème énonce que toute application linéaire continue $f: E \rightarrow F$ entre deux espaces vectoriels normés complets $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ — parfois dits *espaces de Banach* — qui est *continue et surjective*, est en fait nécessairement ouverte, ce qui implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ avec $f(x) = y$ et :

$$\|x\|_E \leq C \|y\|_F.$$

Grâce à la proposition qui précède, il existe $(v_{ij}^0) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ et il existe $(w_i^0) \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$ tels que l'on ait (on choisit un signe '−') :

$$u_{ij} = v_{ij}^0 - \delta(w_i^0) \quad \text{sur chaque } W_i \cap W_j,$$

avec les deux contrôles suivants de normes L^2 :

$$\|(v_{ij}^0)\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq C M \quad \text{et} \quad \|(w_i^0)\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq C M.$$

Considérons alors la décomposition :

$$v_{ij}^0 = u_{ij}^0 + s_{ij}^0, \quad u_{ij}^0 \in F, \quad s_{ij}^0 \in S$$

en composantes orthogonales.

Nous voulons maintenant construire par récurrence sur un entier $\nu \geq 0$ quatre suites de cochaînes :

$$(v_{ij}^\nu) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X), \quad (w_i^\nu) \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X), \quad u_{ij}^\nu \in F, \quad s_{ij}^\nu \in S,$$

qui jouissent des trois propriétés suivantes :

- (i) $v_{ij}^\nu = u_{ij}^{\nu-1} + \delta(w_i^\nu)$ sur chaque $W_i \cap W_j$;
- (ii) $(v_{ij}^\nu) = (u_{ij}^\nu) + (s_{ij}^\nu)$;
- (iii) $\|(v_{ij}^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \frac{1}{2^\nu} C M$ et aussi $\|(w_i^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \frac{1}{2^\nu} C M$.

Démontrons alors que ces hypothèses se transportent du niveau ν au niveau $\nu + 1$.

Puisque $v_{ij}^\nu = u_{ij}^\nu + s_{ij}^\nu$ est une décomposition orthogonale, on a :

$$\begin{aligned} \|(u_{ij}^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{U})} &\leq \|(v_{ij}^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{U})} \\ &\leq \frac{1}{2^\nu} C M, \end{aligned}$$

ce qui implique, en revenant à une inégalité vue plus haut, que :

$$\begin{aligned} \|(w_i^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{W})} &\leq \varepsilon \|(u_{ij}^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{U})} \\ &\leq \frac{1}{2^\nu} \varepsilon C M \\ &= \frac{1}{2^{\nu+1}} M. \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à la proposition qui précède, on dispose de deux cochaînes :

$$(v_{ij}^{\nu+1}) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad (w_i^{\nu+1}) \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X),$$

qui décomposent (on choisit un signe '−') :

$$u_{ij}^\nu = v_{ij}^{\nu+1} - \delta(w_i^{\nu+1}) \quad \text{sur } W_i \cap W_j,$$

et dont les normes L^2 sont contrôlées :

$$\begin{aligned} \max\left(\|(v_{ij}^{\nu+1})\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|(w_i^{\nu+1})\|_{L^2(\mathfrak{W})}\right) &\leq C \|(u_{ij}^\nu)\|_{L^2(\mathfrak{U})} \\ &\leq \frac{1}{2^{\nu+1}} C M. \end{aligned}$$

Enfin, on effectue la décomposition en composantes orthogonales :

$$v_{ij}^{\nu+1} = u_{ij}^{\nu+1} + s_{ij}^{\nu+1},$$

avec $u_{ij}^{\nu+1} \in F$ et $s_{ij}^{\nu+1} \in S$, ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Maintenant, en partant des équations :

$$u_{ij}^0 + s_{ij}^0 = u_{ij} + \delta(w_i^0) \quad \text{sur } W_i \cap W_j,$$

et y additionnant la somme des égalités déduites de la comparaison entre **(i)** et **(ii)** :

$$u_{ij}^\nu + s_{ij}^\nu = u_{ij}^{\nu-1} + \delta(w_i^\nu) \quad \text{sur } W_i \cap W_j,$$

pour $\nu = 1, \dots, k$, on obtient :

$$(*) \quad u_{ij}^k + \sum_{\nu=0}^k s_{ij}^\nu = u_{ij} + \delta\left(\sum_{\nu=0}^k w_i^\nu\right) \quad \text{sur } W_i \cap W_j.$$

Quant au contrôle des normes L^2 , on voit que **(ii)** **(iii)** assurent que pour tout ν , on a :

$$\max\left(\|u_{ij}^\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|s_{ij}^\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|w_i^\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})}\right) \leq \frac{1}{2^\nu} C M.$$

Donc $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{ij}^k)$ dans L^2 et aussi, les deux séries de cochaînes :

$$(s_{ij}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (s_{ij}^\nu) \in S,$$

$$(w_i) := \sum_{\nu=0}^{\infty} (w_i^\nu) \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$$

convergent dans L^2 . En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, on déduit finalement de (*) que :

$$(s_{ij}) = (u_{ij}) + (\delta(w_i)),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Application principale. Maintenant, soit X un espace topologique, soit $Y \subset X$ un sous-ensemble ouvert, et soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , la famille :

$$\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$$

constitue un recouvrement ouvert de Y et l'application naturelle de restriction :

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$$

induit un homomorphisme entre 1^{ers} groupes de cohomologie :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F}).$$

En passant à la limite inductive sur les recouvrements \mathfrak{U} de X , on obtient un homomorphisme 'de restriction' :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{F}).$$

Certainement, si on a deux ouverts $Y \subset Y' \subset X$, l'homomorphisme :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{F}).$$

est la composition (exercice) entre les deux homomorphismes :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(Y', \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad H^1(Y', \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{F}).$$

Théorème. Soit X une surface de Riemann, et soient deux sous-ensembles ouverts :

$$Y_1 \Subset Y_2 \subset X$$

compactement emboîtés. Alors l'homomorphisme de restriction :

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(Y_1, \mathcal{O}_X)$$

possède une image qui est de dimension finie.

DÉMONSTRATION. Il existe une famille finie de cartes $(U_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur X et des sous-ensembles ouverts relativement compacts :

$$W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U'_i,$$

jouissant des propriétés suivantes :

(i) $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^n W_i =: Y' \Subset Y'' := \bigcup_{i=1}^n U_i \subset Y_2$;

(ii) tous les $z_i(U'_i)$, les $z_i(U_i)$ et les $z_i(W_i)$ sont des disques ouverts non vides dans \mathbb{C} .

Posons alors :

$$\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \mathfrak{W} := (W_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Grâce à la proposition précédente, l'application de restriction :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)$$

possède une image qui est de dimension finie. Mais puisque les ouverts U_i, W_i , homéomorphes à des disques, sont simplement connexes, leur 1^{ère} cohomologie à valeurs dans \mathcal{O}_X s'annule :

$$0 = H^1(U_i, \mathcal{O}_X) = H^1(W_i, \mathcal{O}_X) \\ (i = 1 \dots n).$$

Donc le Théorème de Leray s'applique pour nous donner :

$$H^1(Y'', \mathcal{O}_X) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad H^1(Y'', \mathcal{O}_X) = H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X).$$

Enfin, puisque l'application de restriction :

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O}_X)$$

se factorise en :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(Y_2, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(Y'', \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(Y', \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(Y_1, \mathcal{O}_X) \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ H^1(Y_2, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \underbrace{H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}_X)}_{\text{image de dimension finie}} & \longrightarrow & H^1(Y_1, \mathcal{O}_X), & & \end{array}$$

et puisque toute composition d'applications linéaires :

$$E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H$$

entre espaces vectoriels de dimension quelconques possède automatiquement une image de dimension finie lorsque c'est le cas pour moins une des flèches, le théorème est démontré. \square

Théorème-Corollaire. Pour toute surface de Riemann X compacte, on a :

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) < \infty.$$

DÉMONSTRATION. En effet, on peut choisir $Y_1 = Y_2 = X$ dans le théorème qui précède. \square

Définition. Soit X une surface de Riemann compacte. Alors le nombre entier :

$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

est appelé le *genre* de X .

Comme on a déjà démontré que $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$, le genre de la sphère de Riemann est nul.

Théorème. Soit X une surface de Riemann et soit $Y \Subset X$ un sous-ensemble ouvert relativement compact. Alors pour tout point $a \in Y$, il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$ qui possède un vrai pôle en a et qui est holomorphe sur $Y \setminus \{a\}$.

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème pénultième, on sait que :

$$k := \dim \text{Im} \left(H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_X) \right) < \infty.$$

Soit (U_1, z) une coordonnée holomorphe locale en a avec $z(a) = 0$. Si nous posons :

$$U_2 := X \setminus \{a\},$$

la paire $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ constitue un recouvrement ouvert de X . Les fonctions z^{-j} pour $j = 1, \dots, k+1$ sont holomorphes sur $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$, et elles représentent chacune des cocycles :

$$\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \quad (j=1 \dots k+1).$$

Or, puisque l'on a par hypothèse :

$$\dim \text{Im} \left(H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_X) \right) < k+1,$$

les $(k+1)$ cocycles :

$$\zeta_j|_Y \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_X) \quad (j=1 \dots k+1)$$

sont nécessairement linéairement dépendants modulo les cobords. Par conséquent, il existe des nombres complexes non tous nuls c_1, \dots, c_{k+1} et une 0-cochaîne :

$$\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_X)$$

tels que l'on ait :

$$c_1 \zeta_1 + \dots + c_{k+1} \zeta_{k+1} = \delta(\eta),$$

relativement au recouvrement $\mathfrak{U} \cap Y$ de Y , c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{sur } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Ceci revient à dire qu'il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$ qui coïncide avec :

$$f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$$

sur $U_1 \cap Y$ et qui est égale à la fonction holomorphe f_2 sur $U_2 \cap Y = Y \setminus \{a\}$, comme annoncé. \square

Corollaire. Soit X une surface de Riemann compacte et soient a_1, \dots, a_n des points distincts de X en nombre fini n . Alors pour tout choix de n nombres complexes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que :

$$f(a_i) = c_i,$$

pour $i = 1, \dots, n$.

DÉMONSTRATION. Pour toute paire d'indices distincts $i \neq j$, en appliquant le théorème qui précède dans le cas $Y = X$, on obtient une fonction méromorphe $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ qui possède un vrai pôle en a_i mais qui est holomorphe au point a_j . Si nous choisissons des constantes $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}^*$ telles que :

$$f_{ij}(a_k) \neq f_{ij}(a_j) - \lambda_{ij},$$

pour tout $k = 1, \dots, n$ (y compris $k = i$, sachant que $f_{ij}(a_i) = \infty$), alors la fonction :

$$g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f_{ij}(a_j) + \lambda_{ij}} \in \mathcal{M}(X)$$

est holomorphe en tous les points a_k , $k = 1, \dots, n$, et elle satisfait :

$$1 = g_{ij}(a_i) \quad \text{et} \quad g_{ij}(a_j) = 0 \quad (j \neq i).$$

Maintenant, les fonctions-produit :

$$h_i := \prod_{j \neq i} g_{ij} \quad (i = 1 \dots n)$$

satisfont $h_i(a_j) = \delta_{ij}$ et par conséquent la fonction :

$$f := \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

résout le problème. □

Conséquences du théorème de finitude dans le cas non compact.

Corollaire. Soit $Y \Subset X$ un sous-ensemble ouvert relativement compact d'une surface de Riemann X non compacte. Alors il existe une fonction holomorphe :

$$f: Y \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui n'est constante sur aucune composante connexe de Y .

DÉMONSTRATION. Choisissons un domaine (ouvert connexe) Y_1 avec :

$$Y \Subset Y_1 \Subset X,$$

ainsi qu'un point quelconque $a \in Y_1 \setminus Y$ (comme X est non compacte et connexe, $Y_1 \setminus Y$ est non vide). Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent qui fournit une fonction méromorphe $f_1 \in \mathcal{M}(Y_1)$ ayant un vrai pôle en a , donc non constante, puis non constante sur chaque composante connexe de Y , puisque Y_1 est connexe, grâce au principe d'identité pour les fonction holomorphes. □

Théorème. Soit X une surface de Riemann non compacte et soient :

$$Y \Subset Y' \Subset X$$

deux sous-ensembles ouverts compactement emboîtés. Alors :

$$\operatorname{Im}\left(H^1(Y', \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_X)\right) = 0.$$

Lorsque X est donc non compacte, ce théorème donne une information supplémentaire de taille par rapport à un théorème qui précède avec l'hypothèse supplémentaire que $Y_2 \Subset X$.

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème qui précède en question, on sait pour commencer que :

$$L := \operatorname{Im}\left(H^1(Y', \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_X)\right)$$

est un espace vectoriel de dimension finie. Choisissons alors des classes de cohomologie :

$$\xi_1, \dots, \xi_n \in H^1(Y', \mathcal{O}_X)$$

dont la restriction à Y engendre l'espace vectoriel L . Grâce au corollaire qui précède, on dispose d'une fonction $f \in \mathcal{O}(Y')$ qui n'est constante sur aucune composante connexe de Y' , qui est définie et méromorphe sur un certain domaine $Y'_1 \ni Y_1$, et qui possède un vrai pôle en un certain point de $Y'_1 \setminus Y_1$.

Maintenant, puisque $H^1(Y', \mathcal{O}_X)$ est d'une manière naturelle un module sur $\mathcal{O}(Y')$ — exercice impératif ! —, les produits :

$$f \xi_\nu \in H^1(Y', \mathcal{O}_X) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

sont définis. À cause de la propriété d'engendrement, il existe alors des constantes $c_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$ telles en termes desquelles on peut re-décomposer sur Y :

$$f \xi_\nu = \sum_{\mu=1}^n c_{\nu\mu} \xi_\mu \quad (\nu = 1 \dots n).$$

Introduisons alors la matrice :

$$F := \det\left(\left(f \delta_{\nu\mu} - c_{\nu\mu}\right)_{\substack{1 \leq \mu \leq n \\ 1 \leq \nu \leq n}}\right),$$

qui satisfait donc (exercice) sur Y :

$$F \xi_\nu \equiv 0,$$

pour tout $\nu = 1, \dots, n$. Alors F est une fonction holomorphe sur Y' qui n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Y' , puisque $f \in \mathcal{M}(Y'_1)$ possède un vrai pôle en un point.

Maintenant, une classe de cohomologie arbitraire :

$$\zeta \in H^1(Y', \mathcal{O}_X)$$

peut être représentée par un cocycle :

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X),$$

où $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de Y' tel que chaque zéro de F est contenu dans au plus un U_i . Alors pour toute paire d'indices $i \neq j$, on a :

$$F|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$$

(fonctions holomorphes sans zéros). Puisqu'on peut donc diviser par F sur ces intersections $U_i \cap U_j$, il existe un 1-cocycle $g_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ tel que :

$$f_{ij} = F \cdot g_{ij}.$$

Soit $\eta \in H^1(Y', \mathcal{O}_X)$ la classe de cohomologie de ce 1-cocycle (g_{ij}) , qui satisfait par construction :

$$\zeta = \det F \cdot \eta.$$

Comme la restriction à Y de η s'exprime linéairement en fonction des ξ_ν :

$$\eta|_Y = d_1 \xi_1 + \cdots + d_n \xi_n,$$

avec des constantes $d_\nu \in \mathbb{C}$, on déduit de ce qui précède que $\zeta|_Y = F \eta|_Y = 0$. \square

Corollaire. Soit X une surface de Riemann non compacte et soient deux sous-ensembles ouverts :

$$Y \Subset Y' \Subset X$$

compactement emboîtés. Alors pour toute $(0, 1)$ -forme différentielle :

$$\omega \in \Gamma(Y', T^{*(0,1)} X),$$

il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$ telle que

$$\bar{\partial} f = \omega|_Y.$$

DÉMONSTRATION. On sait déjà grâce au Théorème de Dolbeault que ce problème admet toujours des solutions localement. Ainsi, il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de Y' et des fonctions lisses $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{C})$ résolvant :

$$\bar{\partial} f = \omega|_{U_i}.$$

Alors par soustraction, les différences $f_i - f_j$ sont holomorphes sur les intersections $U_i \cap U_j$, donc elles définissent un certain cocycle de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$. Grâce au théorème qui précède, on sait que ce cocycle est nécessairement nul en restriction au sous-ouvert Y . Ainsi, il existe des fonctions holomorphes $g_i \in \mathcal{O}(U_i \cap Y)$ telles que l'on ait :

$$f_i - f_j = g_i - g_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j \cap Y.$$

Par recollement, il existe une fonction globalement définie $f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$ dont les restrictions aux ouverts $U_i \cap Y$ sont égales à :

$$f_i - g_i = f|_{U_i \cap Y},$$

pour tout $i \in I$. Mais alors la fonction f satisfait visiblement l'équation $\bar{\partial} f = \omega|_Y$. \square

Exercices

Exercice 15.1. Soit l'anneau $\mathbb{A}_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ avec $0 < r < R < \infty$. Déterminer une base orthonormale de $L^2(X, \mathcal{O}_X)$ consistant en des fonctions monômiales de la forme :

$$\varphi_n(z) = c_n z^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 15.2. Soit $X \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert borné, soient $p_1, \dots, p_k \in X$ des points distincts, et soit $X' := X \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Montrer que l'application de restriction :

$$L^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow L^2(X', \mathcal{O}_{X'})$$

est un isomorphisme.

16. Longue suite exacte de cohomologie

Dans ce chapitre, nous considérons des homomorphismes de faisceaux, des suites exactes de faisceaux, ainsi que les longues suites exactes de cohomologie qui leur sont associées. Dans de multiples contextes, ces outils fondamentaux permettent de calculer les groupes de cohomologie à valeurs dans des faisceaux divers sur des surfaces de Riemann.

Commençons par rappeler des notions en partie déjà vues dans un des chapitres qui précèdent. Soit \mathbb{K} un corps, qu'il faut penser comme étant égal à \mathbb{C} dans les applications, et qui peut aussi être égal à \mathbb{R} .

Définition. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux de groupes abéliens ou de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur un espace topologique quelconque X . Un *homomorphisme de faisceaux* $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une famille d'homomorphismes de groupes ou de \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$\alpha_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

indexées par tous les sous-ensemble ouvert $U \subset X$, dont on requiert qu'ils sont compatibles avec les homomorphismes de restriction, au sens où pour toute paire d'ouverts emboîtés :

$$V \subset U \subset X,$$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \text{restr} \downarrow & & \downarrow \text{restr} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Dans la suite, on notera souvent mais pas systématiquement $\alpha: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ à la place de α_U pour abrégier.

Exemples.

(a) Soit \mathcal{C}_X^∞ le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur une surface de Riemann X , soit T_X^* le faisceau des 1-formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur X , et soit $\Lambda^2 T_X^*$ le faisceau des 2-formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur X , toutes à valeurs dans \mathbb{C} . Alors la différentielle extérieure induit, sur les fonctions et sur les 1-formes, deux homomorphismes naturels de faisceaux :

$$d: \mathcal{C}_X^\infty \longrightarrow T_X^* \quad \text{et} \quad d: T_X^* \longrightarrow \Lambda^2 T_X^*.$$

De manière analogue, les deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ induisent des homomorphismes de faisceaux :

$$\partial: \mathcal{C}_X^\infty \longrightarrow T_X^{*(1,0)} \quad \text{et} \quad \bar{\partial}: \mathcal{C}_X^\infty \longrightarrow T_X^{*(0,1)}.$$

(b) Sur une surface de Riemann X , les inclusions naturelles entre espaces (vectoriels) de fonctions ou de formes différentielles définies sur des ouverts de X constituent des morphismes de faisceaux :

$$\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty, \quad \mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty, \quad \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty, \quad \Omega_X \hookrightarrow T_X^{*(1,0)}.$$

(c) Sur une surface de Riemann X , on peut définir un homomorphisme de faisceaux :

$$\begin{aligned} \exp: \quad \mathcal{O}_X &\longrightarrow \mathcal{O}_X^* \\ \mathcal{O}(U) \ni f &\longmapsto \exp(2i\pi f) \in \mathcal{O}^*(U), \end{aligned}$$

du faisceau (vectoriel) \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur X à valeurs dans le faisceau (multiplicatif) \mathcal{O}_X^* des fonctions holomorphes sur X qui ne s'annulent en aucun point.

Noyau d'un homomorphisme de faisceaux. Soient comme ci-dessus \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux sur un espace topologique X et soit $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme de faisceaux. Pour tout ouvert $U \subset X$, on définit :

$$\mathcal{K}(U) := \text{Ker}\left(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U)\right).$$

Alors la correspondance $U \mapsto \mathcal{K}(U)$ forme un préfaisceau sur X dont on vérifie (exercice) qu'il définit à nouveau un vrai faisceau. Ce faisceau, appelé *faisceau-noyau* de l'homomorphisme α , sera noté :

$$\mathcal{K} = \text{Ker}(\alpha).$$

Exemples. Sur une surface de Riemann X , on a (exercices mentaux) :

$$(a) \mathcal{O}_X = \text{Ker}\left(\mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} T_X^{*(0,1)}\right).$$

$$(b) \Omega_X = \text{Ker}\left(T_X^{*(1,0)} \xrightarrow{d} \Lambda^2 T_X^*\right).$$

$$(c) \mathbb{Z}_X = \text{Ker}\left(\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^*\right).$$

Image d'un homomorphisme de faisceaux. Étant donné un homomorphisme général de faisceaux $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sur un espace topologique X , on peut aussi définir, pour tout ouvert $U \subset X$:

$$\mathcal{B}(U) := \text{Im}\left(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)\right),$$

et on vérifie (exercice) qu'il s'agit là d'un préfaisceau. Toutefois, ce préfaisceau ne satisfait pas en général l'axiome de recollement, comme le montre le contre-exemple élémentaire suivant.

Considérons à nouveau l'homomorphisme de faisceaux vu à l'instant :

$$\exp: \quad \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^*, \quad f \longmapsto \exp(2i\pi f)$$

et ce, sur la surface de Riemann $X := \mathbb{C}^*$. Soient aussi les deux ouverts :

$$U_1^* := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-^* \quad \text{et} \quad U_2^* := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+^*.$$

Ensuite, définissons deux fonctions holomorphes nulle part nulles :

$$f_1 \in \mathcal{O}^*(U_1) \quad \text{et} \quad f_2 \in \mathcal{O}^*(U_2)$$

simplement en restreignant à U_i , $i = 1, 2$, la fonction-coordonnée ambiante :

$$f_1(z) := z|_{U_1} \quad \text{et} \quad f_2(z) := z|_{U_2}.$$

Alors puisque U_1 et U_2 sont simplement connexes, des logarithmes uniformes de f_1 et de f_2 existent, ce qui veut dire ici que :

$$f_i \in \text{Im}\left(\mathcal{O}(U_i) \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}^*(U_i)\right) \quad (i=1,2).$$

Mais *bien que* leurs restrictions à $U_1 \cap U_2$ coïncident :

$$f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2},$$

il n'existe *pas* d'élément :

$$f \in \text{Im}\left(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)\right)$$

défini sur la réunion $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$ qui redonnerait par restriction :

$$f|_{U_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{U_2} = f_2,$$

puisque la fonction $z \mapsto z$, de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* , ne possède pas de logarithme uniforme global.

Suites exactes de faisceaux. Soit à nouveau $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme quelconque de faisceaux de groupes abéliens ou de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur un espace topologique X . Alors pour tout point $x \in X$, on obtient — exercice impératif — qu'il existe un homomorphisme induit entre fibres respectives :

$$\alpha_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x.$$

Définition. Une suite de deux homomorphismes de faisceaux :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

est dite *exacte* si, pour tout $x \in X$, la suite d'homomorphismes — de groupes abéliens ou de \mathbb{C} -espaces vectoriels — induits entre les *fibres* :

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

est *exacte* au sens l'image du premier coïncide avec le noyau du second :

$$\text{Im}(\alpha_x) = \text{Ker}(\beta_x).$$

Plus généralement, une suite d'homomorphismes de faisceaux de longueur finie quelconque :

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha^1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\alpha^2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{\alpha^3} \dots \mathcal{F}_{n-2} \xrightarrow{\alpha^{n-2}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha^{n-1}} \mathcal{F}_n$$

est dite *exacte* si, pour tout $x \in X$, la suite d'homomorphismes induits entre les fibres :

$$\mathcal{F}_{1,x} \xrightarrow{\alpha_x^1} \mathcal{F}_{2,x} \xrightarrow{\alpha_x^2} \mathcal{F}_{3,x} \xrightarrow{\alpha_x^3} \dots \mathcal{F}_{n-2,x} \xrightarrow{\alpha_x^{n-2}} \mathcal{F}_{n-1,x} \xrightarrow{\alpha_x^{n-1}} \mathcal{F}_{n,x}$$

est *exacte* au sens où images et noyaux successifs *coïncident* :

$$\text{Im}(\alpha_x^1) = \text{Ker}(\alpha_x^2), \quad \text{Im}(\alpha_x^2) = \text{Ker}(\alpha_x^3), \quad \dots \quad \text{Im}(\alpha_x^{n-2}) = \text{Ker}(\alpha_x^{n-1}).$$

Suite exacte de faisceaux $\stackrel{\text{déf}}{\equiv}$ exacte dans les fibres

Définition. Un homomorphisme de faisceaux $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est appelé *monomorphisme* s'il est injectif dans les fibres, ce qui revient à dire — exercice — que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$$

(injection triviale de 0) est exacte. Un homomorphisme de faisceaux $\beta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est appelé *épimorphisme* s'il est surjectif dans les fibres, ce qui revient à dire — exercice — que la suite exacte :

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

(projection brutale sur 0) est exacte.

Pour terminer ces considérations définitionnelles, voici un concept qui est très fréquemment utilisé en géométrie algébrique.

Définition. Une suite d'homomorphismes de faisceaux du type :

$$\boxed{0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0}$$

à trois termes non triviaux qui est *exacte* est appelée une *courte suite exacte*, ce qui revient à dire que pour tout $x \in X$, on a au niveau des fibres :

- $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est injectif ;
- $\text{Im}(\alpha_x) = \text{Ker}(\beta_x)$ dans \mathcal{G}_x ;
- $\beta_x: \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ est surjectif.

Lemme. Soit $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un monomorphisme de faisceaux sur un espace topologique X . Alors pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$, l'application :

$$\alpha_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

est injective.

DÉMONSTRATION. Supposons donc qu'un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ soit d'image nulle : $\alpha_U(f) = 0$. Comme $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est injective pour tout $x \in U$, et comme $\alpha_x(f_x) = 0$, il existe un sous-voisinage ouvert $V_x \subset U$ tel que :

$$f|_{V_x} = 0.$$

Mais en faisant varier x dans U , l'axiome de recollement pour les faisceaux assure que $f = 0$. □

Ainsi, l'injectivité au niveau des fibres est *héritée* par les ouverts quelconques, locaux ou globaux, de X . Toutefois, il n'en va pas ainsi pour la surjectivité, comme le montre le (contre-)exemple suivant.

Exemple. Soit à nouveau l'homomorphisme exponentiel sur \mathbb{C}^* :

$$\exp: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}^*.$$

Bien que, pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, l'application au niveau des fibres :

$$\exp_x: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*,x}^*$$

soit surjective grâce à l'existence locale d'un logarithme pour toute fonction holomorphe ne s'annulant pas, il est clair (exercice ?) que l'application entre sections globales :

$$\exp: \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$$

n'est pas surjective.

Proposition. *Soit une suite exacte de faisceaux¹ :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

sur un espace topologique X . Alors pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$, la suite d'homomorphismes entre groupes abéliens ou \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme qui précède, on sait déjà que chaque α_U est injective. Il s'agit donc de démontrer que :

$$\text{Im}(\alpha_U) = \text{Ker}(\beta_U).$$

Montrons pour commencer² l'inclusion $\text{Im}(\alpha) \subset \text{Ker}(\beta)$. Soit une section $f \in \mathcal{F}(U)$ et posons $g := \alpha(f)$. Puisque les suites d'applications entre fibres :

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

sont exactes par hypothèse, tout point $x \in U$ possède un voisinage ouvert $V_x \subset U$ tel que :

$$\beta(g)|_{V_x} = \beta_x(\alpha_x(f))|_{V_x} = 0.$$

Mais alors l'axiome d'unicité satisfait par le faisceau \mathcal{H} assure que l'on a en fait $\beta(g) = 0$ sur U tout entier.

Montrons ensuite pour terminer que l'on a l'inclusion inverse $\text{Im}(\alpha) \supset \text{Ker}(\beta)$. Soit donc $g \in \mathcal{G}(U)$ satisfaisant $\beta(g) = 0$. Puisque l'on a $\text{Im}(\alpha_x) = \text{Ker}(\beta_x)$ pour tout $x \in U$, on peut trouver un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de U et des éléments $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tels que :

$$\alpha(f_i) = g|_{V_i},$$

pour tout $i \in I$. Mais alors pour chaque intersection par paires, on a immédiatement :

$$0 = \alpha(f_i - f_j) \quad \text{sur } V_i \cap V_j,$$

et comme on sait déjà que $\alpha_{V_i \cap V_j}$ est injective, on en déduit que :

$$f_i = f_j \quad \text{sur } V_i \cap V_j.$$

L'axiome de recollement assure alors qu'il existe un (unique) élément $f \in \mathcal{F}(U)$ satisfaisant :

$$f|_{V_i} = f_i \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Enfin, comme on a par construction :

$$\alpha(f)|_{V_i} = \alpha(f|_{V_i}) = g|_{V_i},$$

il en découle grâce à l'axiome d'unicité appliqué au faisceau \mathcal{G} que cet élément f satisfait bien $\alpha_U(f) = g$. \square

¹ Il importe de noter qu'il ne s'agit pas ici d'une vraie courte suite exacte dans son intégralité, car si on ajoutait ici « $\mathcal{H} \longrightarrow 0$ » à droite dans l'hypothèse, l'exemple qui précède montrerait d'ores et déjà qu'une surjectivité hypothétique $\mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$ ne serait en général pas satisfaite.

² On a convenu de supprimer parfois l'indice $(\cdot)_U$ dans les homomorphismes de faisceaux.

Cinq exemples fondamentaux. Voici plusieurs courtes suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

de faisceaux sur une surface de Riemann X .

(a) Si $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty$ désigne l'inclusion canonique, le théorème de Dolbeault — exercice simple mais recommandé — assure que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} T_X^{*(0,1)} \longrightarrow 0$$

est exacte.

(b) Si l'on introduit le faisceau-noyau de l'opérateur « différentiation extérieure d » sur les 1-formes :

$$\mathcal{L}_X := \text{Ker} \left(T_X^* \xrightarrow{d} \Lambda^2 T_X^* \right),$$

lequel est précisément le sous-faisceau de T_X^* constitué des 1-formes fermées, alors la courte suite :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{L}_X \longrightarrow 0$$

est *exacte* : on se convaincra de cela en se rappelant que le lemme de Poincaré permet justement de dire que pour tout ouvert $E \subset \mathbb{R}^2$ qui est étoilé, l'application « différentielle sur les fonctions » :

$$d_E: \mathcal{C}_X^\infty(E) \longrightarrow \mathcal{L}_X(E)$$

est surjective, et par conséquent, comme les petits ouverts de cartes peuvent être supposés étoilés, les applications entre fibres :

$$d_x: \mathcal{C}_{X,x}^\infty \longrightarrow \mathcal{L}_{X,x}$$

sont elles aussi surjectives.

(c) L'analogie holomorphe de la précédente suite exacte est la suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega_X \longrightarrow 0,$$

laquelle est en effet exacte, puisqu'on a aussi un lemme de Poincaré dans la catégorie holomorphe (exercice de relecture-généralisation du lemme de Poincaré).

(d) On affirme à présent que la courte suite de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow T_X^{*(1,0)} \xrightarrow{d} \Lambda^2 T_X^* \longrightarrow 0$$

est elle aussi exacte.

En effet, rappelons que le faisceau Ω_X des 1-formes holomorphes sur X s'identifie au noyau :

$$\Omega_X = \text{Ker} \left(T_X^{*(1,0)} \xrightarrow{d} \Lambda^2 T_X^* \right).$$

Il reste donc seulement à établir que le morphisme $d: T_X^{*(1,0)} \longrightarrow \Lambda^2 T_X^*$ est surjectif dans les fibres. Or dans une carte locale quelconque (U, z) , on a évidemment :

$$\begin{aligned} d(f dz) &= df \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, \end{aligned}$$

et donc pour tout sous-ouvert $V \subset U$ tel que $z(V) \subset \mathbb{C}$ est un disque, on voit que le théorème de Dolbeault — à nouveau lui — assure que l'application :

$$d_V: \Gamma(V, T_X^{*(1,0)}) \longrightarrow \Gamma(V, \Lambda^2 T_X^*)$$

est surjective. Par passage aux germes via une famille d'ouverts rétrécissants, on en déduit donc bien que pour tout point $a \in X$, l'application « germique » :

$$d_a: T_{X,a}^{*(1,0)} \longrightarrow \Lambda^2 T_{X,a}^*$$

est surjective.

(e) Grâce à des considérations qui précèdent, l'exactitude de la courte suite :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

va de soi à condition d'y réfléchir mentalement.

Lemme (Homomorphismes induits entre groupes H^0 et groupes H^1). *Tout homomorphisme $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre faisceaux sur un espace topologique X induit deux homomorphismes entre leurs groupes de cohomologie respectifs :*

$$\begin{aligned} \alpha^0: H^0(X, \mathcal{F}) &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}), \\ \alpha^1: H^1(X, \mathcal{F}) &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Au vu des isomorphismes déjà connus :

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X) \quad \text{et} \quad H^0(X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(X),$$

l'homomorphisme α^0 n'est autre l'application :

$$\alpha_X: \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X).$$

Voici ensuite comment se construit l'homomorphisme α^1 . Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . On introduit l'application :

$$\alpha_{\mathfrak{U}}: C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$$

qui assigne à chaque cochaîne :

$$\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

tout simplement la cochaîne :

$$\alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) := (\alpha_{U_i \cap U_j}(f_{ij})) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

On vérifie — exercice mental — que cette application envoie les cocycles sur les cocycles et les cobords sur les cobords. Donc elle induit par passage au quotient un homomorphisme :

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

Ainsi, la collection de ces $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ quand \mathfrak{U} parcourt tous les recouvrements de X induit-elle l'homomorphisme annoncé α^1 . \square

Proposition (Homomorphisme de connection). *Soit une courte suite exacte de faisceaux arbitraires :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

de groupes abéliens ou d'espaces vectoriels sur un espace topologique X quelconque qui induit, d'après ce qui a déjà été vu, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_X} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_X} H^0(X, \mathcal{H}).$$

Alors il existe un homomorphisme naturel, dit « de connexion » :

$$\delta^* : H^0(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}),$$

et qui est absolument fondamental dans toutes les théories cohomologiques, cf. ce qui va suivre.

DÉMONSTRATION. Nous allons définir cet homomorphisme en effectuant certains choix, et vérifier ensuite que la définition qui en aura été donnée ne dépend en fait d'aucun choix qui aura été fait.

Supposons donc qu'un élément arbitraire :

$$h \in H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}(X)$$

est choisi. Puisque, pour tout $x \in X$, les homomorphismes entre fibres :

$$\beta_x : \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$$

sont par hypothèse surjectifs, il existe un recouvrement ouvert de X :

$$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$$

et une 0-cochaîne :

$$(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

tels que³ :

$$\beta(g_i) = h|_{U_i}, \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Mais alors on voit immédiatement que :

$$0 = \beta(g_{i_2} - g_{i_1}) \quad \text{sur chaque intersection } U_{i_1} \cap U_{i_2},$$

et donc grâce à l'exactitude connue de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \xrightarrow{\alpha_{U_{i_1} \cap U_{i_2}}} \mathcal{G}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \xrightarrow{\beta_{U_{i_1} \cap U_{i_2}}} \mathcal{H}(U_{i_1} \cap U_{i_2}),$$

on en déduit qu'il existe un $f_{i_1 i_2} \in \mathcal{F}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ — *unique*, par injectivité de $\alpha_{U_{i_1} \cap U_{i_2}}$ — satisfaisant :

$$\alpha_{U_{i_1} \cap U_{i_2}}(f_{i_1 i_2}) = g_{i_2} - g_{i_1}.$$

Or sur toute intersection triple $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3}$, il en découle par soustractions simples que l'on a :

$$0 = \alpha(f_{i_1 i_2} + f_{i_2 i_3} - f_{i_1 i_3}),$$

et à nouveau par injectivité de $\alpha_{U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3}}$, on en déduit que $(f_{i_1 i_2})$ satisfait les relations de cocycles :

$$0 = f_{i_1 i_2} + f_{i_2 i_3} - f_{i_1 i_3},$$

i.e. que l'élément ainsi construit :

$$(f_{i_1 i_2}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

³ Il faudra à la fin démontrer que le résultat final définissant $\delta^*(h)$ ne dépend ni du choix d'un tel recouvrement \mathcal{U} , ni du choix d'une telle 0-cochaîne (g_i) .

est un 1-cocycle à valeurs dans \mathcal{F} relativement au recouvrement \mathcal{U} . Nous pouvons alors définir :

$$\delta^*(h) := \text{classe}((f_{i_1 i_2})) \in H^1(X, \mathcal{F}),$$

— Mais ... ! — il reste toutefois encore à établir que cette classe de cohomologie ne dépend nullement des choix effectués.

Soit donc un *autre* recouvrement ouvert de X :

$$\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J},$$

et soit une *autre* 0-cochaîne :

$$(d_j) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$

telle que :

$$\beta(d_j) = h|_{V_j}, \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Le raisonnement qui précède s'applique de manière complètement similaire et nous fournit sans effort un 1-cocycle :

$$(c_{j_1 j_2}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

unique satisfaisant :

$$\alpha_{V_{j_1} \cap V_{j_2}}(c_{j_1 j_2}) = d_{j_2} - d_{j_1},$$

au moyen duquel on est tenté de définir à nouveau :

$$\delta^*(h) := \text{classe}((c_{j_1 j_2})) \in H^1(X, \mathcal{F}),$$

et il s'agit alors — afin d'assurer la consistance de cette définition — de démontrer que, dans $H^1(X, \mathcal{F})$, l'on a en fait :

$$\text{classe}((c_{j_1 j_2})) = \text{classe}((f_{i_1 i_2})).$$

À cette fin, il est approprié de choisir un troisième recouvrement :

$$\mathfrak{W} = (W_k)_{k \in K}$$

de X qui est plus fin à la fois que \mathcal{U} et que \mathfrak{V} et qu'on suppose en même temps muni de deux applications de raffinement :

$$\sigma: K \longrightarrow I \quad \text{et} \quad \tau: K \longrightarrow J$$

qui satisfont :

$$W_k \subset U_{\sigma(k)} \quad \text{et} \quad W_k \subset V_{\tau(k)} \quad \text{pour tout } k \in K.$$

Alors σ et τ nous permettent de définir deux restrictions :

$$\text{restr}((f_{i_1 i_2})) \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \text{restr}((c_{j_1 j_2})) \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$$

— le but est de montrer que leurs deux classes dans $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ coïncident dans $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ — qui sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \text{restr}((f_{i_1 i_2})) &:= (f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)}) && \text{en restriction à } W_{k_1} \cap W_{k_2}, \\ \text{restr}((c_{j_1 j_2})) &:= (c_{\tau(k_1)\tau(k_2)}) && \text{en restriction à } W_{k_1} \cap W_{k_2}. \end{aligned}$$

Afin, donc, de démontrer que :

$$(f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} - c_{\tau(k_1)\tau(k_2)}) \in B^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F}),$$

rappelons que $\alpha(f_{i_1 i_2}) = g_{i_2} - g_{i_1}$ et que $\alpha(c_{j_1 j_2}) = d_{j_2} - d_{j_1}$, ce qui nous donne après substitutions naturelles d'indices :

$$\alpha(f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)}) = g_{\sigma(k_2)} - g_{\sigma(k_1)} \quad \text{et} \quad \alpha(c_{\tau(k_1)\tau(k_2)}) = d_{\tau(k_2)} - d_{\tau(k_1)},$$

sur chaque intersection $W_{k_1} \cap W_{k_2}$, et ensuite par soustraction :

$$\alpha(f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} - c_{\tau(k_1)\tau(k_2)}) = \underbrace{g_{\sigma(k_2)} - d_{\tau(k_2)}}_{=: G_{k_2}} - \underbrace{(g_{\sigma(k_1)} - d_{\tau(k_1)})}_{=: G_{k_1}},$$

en termes de la 0-cochaîne :

$$G_k := g_{\sigma(k)} - d_{\tau(k)} \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{G}).$$

Or en remontant aux deux définitions initiales :

$$\beta(g_i) = h|_{U_i} \quad \text{et} \quad \beta(d_j) = h|_{V_j},$$

en soustrayant de manière appropriée, et en substituant les indices au moyen de nos deux applications de raffinement, nous obtenons :

$$0 = \beta(g_{\sigma(k)} - d_{\tau(k)}) = \beta(G_k)$$

sur chaque ouvert $W_k \subset U_{\sigma(k)} \cap V_{\tau(k)}$. Or l'exactitude connue, pour tout $k \in K$, de la suite :

$$\mathcal{F}(W_k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(W_k) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(W_k)$$

nous assure l'existence d'une 0-cochaîne $(F_k) \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ telle que :

$$\alpha(F_k) = G_k \quad \text{pour tout } k \in K.$$

Dans ces conditions, la famille précédente d'équations laissée en chemin devient :

$$\begin{aligned} \alpha(f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} - c_{\tau(k_1)\tau(k_2)}) &= G_{k_2} - G_{k_1} \\ &= \alpha(F_{k_2} - F_{k_1}) \quad \text{sur chaque } W_{k_1} \cap W_{k_2}, \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de l'injectivité connue de $\alpha_{W_{k_1} \cap W_{k_2}}$, implique bien que le cocycle en question :

$$f_{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} - c_{\tau(k_1)\tau(k_2)} = F_{k_2} - F_{k_1}$$

se scinde. La construction *complètement détaillée et argumentée* de l'homomorphisme de connexion δ^* se termine ainsi. \square

Théorème (Longue suite exacte de cohomologie associée à une courte suite exacte).

Soit X un espace topologique quelconque et soit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

une courte suite exacte arbitraire de faisceaux sur X . Alors au moyen des cinq homomorphismes de groupes abéliens ou d'espaces vectoriels introduits et définis à l'instant :

$$\alpha^0, \quad \beta^0, \quad \delta^*, \quad \alpha^1, \quad \beta^1,$$

la suite induite de groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. **(i)** Tout d'abord, les deux exactitudes :

$$0 = \text{Ker}(\alpha^0) \quad \text{et} \quad \text{Im}(\alpha^0) = \text{Ker}(\beta^0)$$

ont déjà été vues dans une proposition liminaire qui précède.

(ii) Montrons pour commencer que l'on a l'inclusion :

$$\text{Im}(\beta^0) \subset \text{Ker}(\delta^*).$$

En effet, soit $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ qui donne un élément quelconque $h := \beta^0(g)$ de cette image. Dans la construction de l'homomorphisme de connexion δ^* qui a été effectuée avant l'énoncé du théorème, en introduisant un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ comme nous le fîmes à ce moment-là, nous voyons que nous pouvons prendre $g_i := g|_{U_i}$ comme 0-cochaîne satisfaisant $\beta(g_i) = h|_{U_i}$. Mais alors on a trivialement $g_{i_2} - g_{i_1} = 0$, et donc seul le 1-cocycle nul $f_{i_1 i_2} = 0$ convient pour satisfaire $\alpha(f_{i_1 i_2}) = g_{i_2} - g_{i_1}$, ce qui montre bien que $\delta^*(h) = 0$.

(iii) Montrons maintenant l'inclusion inverse :

$$\text{Im}(\beta^0) \supset \text{Ker}(\delta^*).$$

Soit donc $h \in \text{Ker}(\delta^*)$. Soit un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ tel qu'il existe des $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ avec $\beta(g_i) = h|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, et soit le 1-cocycle $(f_{i_1 i_2}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ unique satisfaisant :

$$\alpha(f_{i_1 i_2}) = g_{i_2} - g_{i_1}$$

en termes duquel :

$$0 = \delta^*(h) = \text{classe}((f_{i_1 i_2})) \in H^1(X, \mathcal{F}).$$

Ainsi, $(f_{i_1 i_2})$ est un cobord, à savoir il existe une 0-cochaîne $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ telle que :

$$f_{i_1 i_2} = f_{i_2} - f_{i_1} \quad \text{sur chaque } U_{i_1} \cap U_{i_2}.$$

Posons alors en corrigeant g_i :

$$\tilde{g}_i := g_i - \alpha(f_i).$$

Alors sur chaque intersection $U_{i_1} \cap U_{i_2}$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{i_2} - \tilde{g}_{i_1} &= g_{i_2} - g_{i_1} - \alpha(f_{i_2} - f_{i_1}) \\ &= g_{i_2} - g_{i_1} - \alpha(f_{i_1 i_2}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique grâce à l'axiome de recollement que les \tilde{g}_i sont restrictions :

$$\tilde{g}_i = g|_{U_i}$$

d'un certain élément global $g \in H^0(X, \mathcal{G})$. Mais alors sur chaque U_i , on déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \beta(\tilde{g}_i) \\ &= \beta(g_i - \alpha(f_i)) \\ &= \beta(g_i) - \underline{\beta(\alpha(f_i))} \quad [\text{exactitude } \text{Im}(\alpha_V) = \text{Ker}(\beta_V) \text{ pour tout } V \subset X] \\ &= h, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $h \in \text{Im}(\beta^0)$.

(iv) Montrons ensuite l'inclusion :

$$\text{Im}(\delta^*) \subset \text{Ker}(\alpha^1).$$

En effet, en partant de $\delta^*(h) = (f_{i_1 i_2})$ relativement à un recouvrement \mathfrak{U} comme dans la définition de δ^* , on a alors, en se conformant à ladite définition, et en conservant les mêmes notations :

$$\begin{aligned} \alpha(\delta^*(h)) &= \alpha((f_{i_1 i_2})) \\ &= (g_{i_2} - g_{i_1}) && \text{[voici un cobord !]} \\ &\equiv 0 && \text{dans } H^1(X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

(v) Montrons aussi l'inclusion inverse :

$$\text{Im}(\delta^*) \supset \text{Ker}(\alpha^1).$$

Soit donc $\xi \in \text{Ker}(\alpha^1)$ un élément quelconque de $H^1(X, \mathcal{F})$, représenté, relativement à un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, par un 1-cocycle $(f_{i_1 i_2}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Puisque $\alpha^1(\xi) = 0$, il existe une 0-cochaîne $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ telle que :

$$\alpha(f_{i_1 i_2}) = g_{i_2} - g_{i_1} \quad \text{sur } U_{i_1} \cap U_{i_2}.$$

Mais ceci implique que :

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(\alpha(f_{i_1 i_2})) \\ &= \beta(g_{i_2}) - \beta(g_{i_1}) && \text{sur chaque } U_{i_1} \cap U_{i_2}. \end{aligned}$$

Grâce à l'axiome de recollement, on trouve un élément global :

$$h \in \mathcal{H}(X) = H^0(X, \mathcal{H}) \quad \text{avec } h|_{U_i} = \beta(g_i) \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Dans ces conditions, la construction de l'homomorphisme de connexion δ^* donne alors :

$$\delta^*(h) = \text{classe}((f_{i_1 i_2})) = \xi.$$

(vi) Après cela, l'inclusion :

$$\text{Im}(\alpha^1) \subset \text{Ker}(\beta^1)$$

est, en se ramenant à un recouvrement \mathfrak{U} de X , une conséquence directe — exercice mental — du fait déjà vu que tous les homomorphismes :

$$\mathcal{F}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$$

sont exacts.

(vii) Montrons enfin pour terminer l'inclusion inverse :

$$\text{Im}(\alpha^1) \supset \text{Ker}(\beta^1).$$

Soit un élément quelconque :

$$\eta \in \text{Ker}(\beta^1) \subset H^1(X, \mathcal{G})$$

représenté, relativement à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , par un certain 1-cocycle :

$$(g_{i_1 i_2}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}),$$

Puisque $(\beta(g_{i_1 i_2})) = 0$, il existe une 0-cochaîne $(h_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ telle que :

$$\beta(g_{i_1 i_2}) = h_{i_2} - h_{i_1} \quad \text{sur chaque } U_{i_1} \cap U_{i_2}.$$

Pour tout $x \in X$, choisissons alors un indice $i(x) \in I$ tel que l'on ait $x \in U_{i(x)}$. Puisque $\beta_x: \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ est surjective par hypothèse, il existe un sous-voisinage ouvert $V_x \subset U_{i(x)}$ de x et un élément $g_x \in \mathcal{G}(V_x)$ tels que :

$$\beta(g_x) = h_{i(x)}|_{V_x}.$$

Considérons alors le nouveau recouvrement ouvert plus fin $\mathfrak{V} := (V_x)_{x \in X}$ de X et introduisons :

$$\tilde{g}_{xy} := g_{i(x)i(y)}|_{V_x \cap V_y}.$$

On voit que (\tilde{g}_{xy}) forme un 1-cocycle dans $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ et puisque $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$, ce cocycle représente la même classe de cohomologie $\eta \in H^1(X, \mathcal{G})$ que le cocycle $(g_{i_1 i_2})$. Introduisons alors le nouveau cocycle « corrigé » :

$$\psi_{xy} := \tilde{g}_{xy} - g_y + g_x$$

relativement à \mathfrak{V} , qui est visiblement cohomologue au cocycle (\tilde{g}_{xy}) , et vérifions que l'on a sur toute intersection $V_x \cap V_y$:

$$\begin{aligned} \beta(\psi_{xy}) &= \beta(\tilde{g}_{xy}) - \beta(g_y) + \beta(g_x) \\ &= \beta(g_{i(x)i(y)}) - \beta(g_y) + \beta(g_x) \\ &= h_{i(y)} - h_{i(x)} - h_{i(y)} + h_{i(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à l'exactitude des homomorphismes :

$$\mathcal{F}(V_x \cap V_y) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(V_x \cap V_y) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(V_x \cap V_y),$$

on trouve :

$$f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$$

satisfaisant $\alpha(f_{xy}) = \psi_{xy}$. Or sur toute intersection triple $V_x \cap V_y \cap V_z$ du recouvrement \mathfrak{V} , la condition de cocycle satisfaite par (ψ_{xy}) donne :

$$\begin{aligned} \alpha(f_{xy} + f_{yz} - f_{xz}) &= \psi_{xy} + \psi_{yz} - \psi_{xz} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et puisque l'on sait que $\alpha_{V_x \cap V_y \cap V_z}$ est toujours injective, on en déduit que $(f_{xy}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ est aussi un 1-cocycle. Par construction, sa classe de cohomologie :

$$\xi := \text{classe}((f_{xy})) \in H^1(X, \mathcal{F})$$

satisfait donc $\alpha^1(\xi) = \eta$, ce qui achève la démonstration. \square

Théorème. Soit une courte suite exacte arbitraire de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

sur un espace topologique quelconque X , d'où dérive d'après le résultat qui précède, la longue suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \\ \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} \underline{H^1(X, \mathcal{G})} \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Alors sous l'hypothèse particulière que $0 = H^1(X, \mathcal{G})$, on a l'isomorphisme :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X) / \beta^0(\mathcal{G}(X)).$$

DÉMONSTRATION. Le résultat découle d'un lemme-exercice élémentaire d'après lequel, si on a une suite exacte de groupes abéliens ou d'espaces vectoriels :

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 0,$$

à savoir qui satisfait :

$$\text{Im}(a) = \text{Ker}(b) \quad \text{et} \quad \text{Im}(b) = C,$$

alors on a $C \cong B/\text{Im}(a)$. □

Description explicite. Pour des applications ultérieures, il est nécessaire de décrire plus explicitement cet isomorphisme :

$$\Phi: H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(X) / \beta^0(\mathcal{G}(X)).$$

Puisque l'on connaît, pour tout ouvert $U \subset X$, l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$$

on peut sans perte de généralité s'imaginer que \mathcal{F} est un *sous-faisceau* de \mathcal{G} , donc que l'homomorphisme de faisceaux :

$$\alpha: \mathcal{F} \xrightarrow{\text{incl}} \mathcal{G}$$

est l'inclusion, et par voie de conséquence aussi à cause de la même exactitude, que :

$$\mathcal{F} = \text{Ker}(\beta).$$

Soit donc $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ une classe de cohomologie dont on veut calculer $\Phi(\xi)$, laquelle est représentée, relativement à un certain recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , par un cocycle :

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

Puisque par hypothèse $0 = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, ce cocycle se scinde lorsqu'il est vu à valeurs dans \mathcal{G} , à savoir il existe une 0-cochaîne $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ qui décompose :

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{sur chaque } U_i \cap U_j.$$

Mais puisque l'on a :

$$f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \text{Ker}(\beta)(U_i \cap U_j),$$

on en déduit en appliquant $\beta(\cdot)$ de part et d'autre que :

$$0 = \beta(g_j) - \beta(g_i) \quad \text{toujours sur } U_i \cap U_j,$$

et donc par recollement, il existe un élément *global* $h \in \mathcal{H}(X)$ qui redonne les $\beta(g_i)$ après restriction :

$$h|_{U_i} = \beta(g_i).$$

On définit alors :

$$\boxed{\Phi(\xi) := h \text{ modulo } \beta^0(\mathcal{G}(X))},$$

Le lecteur est invité à vérifier que, le fait que cette application Φ est l'inverse de l'isomorphisme :

$$\mathcal{H}(X)/\beta^0(\mathcal{G}(X)) \xrightarrow{\cong} H^1(X, \mathcal{F})$$

induit par δ^* et par β^0 dans la suite exacte de cohomologie du théorème qui précède, découle en fait des raisonnements effectués en (v) dans la construction de la longue suite exacte de cohomologie associée à une courte suite exacte de faisceau. \square

Théorème cohomologique de Dolbeault en dimension 1. *Sur toute surface de Riemann X compacte ou non compacte, on les deux isomorphismes :*

$$\boxed{H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(X, T_X^{*(1,0)}) / \bar{\partial}(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}))},$$

et :

$$\boxed{H^1(X, \Omega_X) \cong \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*) / \bar{\partial}(\Gamma(X, T_X^{*(1,0)}))}.$$

DÉMONSTRATION. En partant d'une courte suite exacte de faisceaux déjà vue :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{inj}} \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} T_X^{*(1,0)} \longrightarrow 0,$$

et en lui appliquant le théorème qui lui associe automatiquement la longue suite exacte suivante de groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{C}_X^\infty) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^0(X, T_X^{*(1,0)}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \underline{H^1(X, \mathcal{C}_X^\infty)} \longrightarrow \underline{H^1(X, T_X^{*(1,0)})}, \end{aligned}$$

on obtient une situation dans laquelle on sait que les deux derniers groupes de cohomologie s'annulent (pourquoi ?), donc le théorème qui précède s'applique — on revient à la notation $\Gamma(X, E)$ pour désigner les sections globales sur X d'un fibré vectoriel $E \rightarrow X$.

De manière parfaitement similaire, en partant d'une courte suite exacte de faisceaux déjà vue :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \xrightarrow{\text{inj}} T_X^{*(1,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^2 T_X^* \longrightarrow 0,$$

et en lui appliquant le théorème qui lui associe automatiquement la longue suite exacte suivante de groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \Omega_X) \longrightarrow H^0(X, T_X^{*(1,0)}) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^0(X, \Lambda^2 T_X^*) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \underline{H^1(X, T_X^{*(1,0)})} \longrightarrow \underline{H^1(X, \Lambda^2 T_X^*)}, \end{aligned}$$

on obtient une situation dans laquelle on sait encore que les derniers groupes de cohomologie s'annulent, donc le théorème qui précède s'applique à nouveau. \square

Groupes de cohomologie de de Rham. Sur une surface de Riemann X arbitraire et plus généralement sur une surface arbitraire de classe \mathcal{C}^∞ , bien que toute 1-forme exacte soit trivialement fermée, les formes fermées ne sont pas nécessairement globalement exactes. C'est pourquoi on s'intéresse classiquement au groupe quotient des formes fermées modulo les formes exactes :

$$\text{Rham}^1(X) := \frac{\text{Ker}[\Gamma(X, T_X^*) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)]}{\text{Im}[\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \Gamma(X, T_X^*)]},$$

appelé (*premier*) *groupe de cohomologie de de Rham* de X . Deux 1-formes différentielles dont la différence est exacte, *i.e.* qui déterminent le même élément du groupe $\text{Rham}^1(X)$, sont dites *cohomologues*. Bien entendu, on a $0 = \text{Rham}^1(X)$ si et seulement si toute 1-forme fermée ω sur X admet une primitive globale $df = \omega$ sur X . Par exemple, lorsque X est simplement connexe, on sait que $\text{Rham}^1(X) = 0$.

Théorème de de Rham pour les surfaces. *Soit X une surface de Riemann, ou plus généralement une surface de classe \mathcal{C}^∞ . Alors on a un isomorphisme :*

$$H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \text{Rham}^1(X).$$

DÉMONSTRATION. En partant de la courte suite exacte de faisceaux déjà vue dans laquelle \mathcal{L}_X désigne le faisceau des 1-formes différentielles *fermées* :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \xrightarrow{\text{inj}} \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{L}_X \longrightarrow 0,$$

en lui appliquant la longue suite exacte de cohomologie associée :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{C}_X^\infty) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}_X) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow \underline{H^1(X, \mathcal{C}_X^\infty)} \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}_X), \end{aligned}$$

et en se souvenant du théorème disant que le H^1 du faisceau mou \mathcal{C}_X^∞ s'annule, l'isomorphisme de de Rham est alors une conséquence du théorème pénultième :

$$H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong H^0(X, \mathcal{L}_X) / \text{Im} \left(H^0(X, \mathcal{C}_X^\infty) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}_X) \right)$$

à des coïncidences notationnelles près — exercice mental. □

Exercices

Exercice 16.1. Soit X une surface de Riemann et soit \mathcal{H}_X le faisceau des fonctions harmoniques sur X . Vérifier que la courte suite de faisceaux sur X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \Lambda^2 T_X^* \longrightarrow 0$$

est exacte.

Exercice 16.2. Montrer que sur toute surface de Riemann X , la suite de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X^* \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d \log} \Omega_X \longrightarrow 0$$

est exacte, où $(d \log)f := \frac{df}{f}$.

Exercice 16.3. Sur une surface de Riemann X , soit :

$$\mathcal{Q}_X \subset T \cdot \mathcal{M}_X^*$$

le sous-faisceau des 1-formes différentielles méromorphes sur X qui ont un résidu égal à 0 en tout point de X . Montrer que la courte suite de faisceaux sur X :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow T \cdot \mathcal{M}_X^* \xrightarrow{d} \mathcal{Q}_X \longrightarrow 0$$

est exacte.

Exercice 16.4. Soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe. Montrer que :

$$H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \text{Rham}^1(X) \cong \mathbb{C}^2,$$

et que les classes de dz et de $d\bar{z}$ forment une base de $\text{Rham}^1(X)$. *Indication :* Soit $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ une 1-forme fermée arbitraire de classe \mathcal{C}^∞ sur X . Montrer que pour des constantes appropriées $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, toutes les périodes de :

$$\omega - c_1 dz - c_2 d\bar{z}$$

s'annulent.



17. Théorème de Riemann-Roch

Le théorème de Riemann-Roch est central dans la théorie des surfaces de Riemann X compactes. Il permet d'estimer le nombre de fonctions méromorphes indépendantes en tenant compte de restrictions faites à l'avance sur le nombre de pôles.

Définition et structure des diviseurs. Soit X une surface de Riemann quelconque, compacte ou non compacte.

Définition. Un *diviseur* sur X est une application à valeurs entières :

$$D: X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

telle que pour tout sous-ensemble compact $K \Subset X$, il existe seulement un nombre fini de points $x \in K$ avec $D(x) \neq 0$, à savoir :

$$\text{Card} \{x \in K : D(x) \neq 0\} < \infty.$$

Définition. Étant donné deux diviseurs D et D' sur X , leur *somme* $D + D'$ est le diviseur défini par :

$$x \longmapsto D(x) + D'(x).$$

Ainsi, l'ensemble de tous les diviseurs sur X forme un groupe abélien qu'on notera :

$$\text{Div}(X).$$

Enfin, il existe un ordre naturel sur $\text{Div}(X)$, pour lequel on déclare $D \leq D'$ lorsque $D(x) \leq D'(x)$ en tout point $x \in X$.

Diviseurs de fonctions méromorphes et de 1-formes méromorphes. Soit X une surface de Riemann et soit Y un sous-ensemble ouvert de X . Étant donné une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$, on définit en un point quelconque $a \in Y$:

$$\text{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ est holomorphe et non nulle en } a; \\ k, & \text{si } f \text{ possède un zéro d'ordre } k \text{ en } a; \\ -k, & \text{si } f \text{ possède un pôle d'ordre } k \text{ en } a; \\ \infty & \text{si } f \text{ est identiquement nulle au voisinage de } a. \end{cases}$$

On voit donc que pour toute fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y) \setminus \{0\}$, l'application :

$$x \longmapsto \text{ord}_x(f)$$

constitue un diviseur sur X , le *diviseur associé* à f , qu'on notera $\text{div}(f)$.

Définition. Une fonction $f \in \mathcal{M}(Y) \setminus \{0\}$ est dite *multiple* d'un diviseur D lorsqu'on a :

$$\text{div}(f) \geq D.$$

En particulier, f est holomorphe si et seulement si $\text{div}(f) \geq 0$.

On peut aussi définir l'ordre en un point quelconque $a \in X$ d'une 1-forme méromorphe arbitraire $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$, ainsi que le diviseur qui lui est associé, comme suit.

Définition. Soit (U, z) un voisinage de coordonnée en a . Sur $U \cap Y$, la 1-forme méromorphe ω s'écrit :

$$\omega = f(z) dz,$$

pour une certaine fonction méromorphe $f = f(z)$. On pose alors :

$$\text{ord}_a(\omega) := \text{ord}_a(f),$$

et on vérifie (exercice impératif) que cette définition ne dépend pas du choix d'une coordonnée holomorphe locale au voisinage de a . Pour une 1-forme méromorphe $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$, l'application :

$$x \longmapsto \text{ord}_x(\omega)$$

définit à nouveau un diviseur sur X , que l'on notera :

$$\text{div}(\omega).$$

Étant donné des fonctions méromorphes $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ et une 1-forme méromorphe $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X) \setminus \{0\}$, on vérifie aisément que les trois relations suivantes sont satisfaites :

$$\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g), \quad \text{div}(1/f) = -\text{div}(f) \quad \text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega).$$

Définition. Un diviseur $D \in \text{Div}(X)$ sur X est appelé un *diviseur principal* s'il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ telle que :

$$D = \text{div}(f).$$

Deux diviseurs $D, D' \in \text{Div}(X)$ sont dit *équivalents* si leur différence $D - D'$ est un diviseur principal.

Définition. On appelle *diviseur canonique* le diviseur $\text{div}(\omega)$ de n'importe quelle 1-forme méromorphe $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$, sachant que deux diviseurs canoniques sont toujours équivalents, puisque pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}T_X^*(X)$, il existe toujours (exercice) une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ déterminée de manière unique telle que $\omega_2 = f\omega_1$, d'où l'on déduit en effet :

$$\text{div}(\omega_2) - \text{div}(\omega_1) = \text{div}(f) = 0 \quad [\text{Lemme ci-dessous}].$$

Degré d'un diviseur. Supposons à partir de maintenant que la surface de Riemann X est *compacte*. Puisque tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$ ne charge alors d'un poids entier qu'un nombre fini de points, on peut définir une *application degré* :

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

en assignant tout simplement et tout naturellement :

$$\text{deg } D := \sum_{x \in X} D(x),$$

la somme étant donc en fait finie. Il est clair que cette application constitue alors un homomorphisme de groupes.

Lemme. Le degré de toute fonction méromorphe non constante :

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

est nul :

$$\text{deg}(f) = 0.$$

DÉMONSTRATION. En effet, nous avons déjà vu que toute telle application possède toujours autant de zéros que de pôles. \square

Il en découle que deux diviseurs équivalents ont le même degré, et que toutes les formes méromorphes non nulles ont le même degré.

Les faisceaux \mathcal{O}_D . Soit maintenant D un diviseur quelconque sur une surface de Riemann compacte X . Pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$, on définit l'espace vectoriel $\mathcal{O}_D(U)$ comme étant celui des fonctions méromorphes sur U dont le diviseur est minoré par $-D$, à savoir :

$$\mathcal{O}_D(U) := \{ f \in \mathcal{M}(U) : \text{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ pour tout } x \in U \}.$$

On se convainc aisément qu'avec les applications naturelles de restriction, \mathcal{O}_D constitue un faisceau, lequel généralise le faisceau \mathcal{O}_X des fonctions méromorphes sur X .

Lemme. *Étant donné deux diviseurs équivalents D et D' sur X , les deux faisceaux \mathcal{O}_D et $\mathcal{O}_{D'}$ qui leurs sont associés sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Voici comment construire un isomorphisme. Prenons une fonction $\psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ telle que $D' - D = \text{div}(\psi)$. Alors on vérifie (exercice simple mais recommandé) que l'homomorphisme de faisceaux induit par la multiplication par ψ :

$$\mathcal{O}_{D'} \longrightarrow \mathcal{O}_D, \quad f \longmapsto \psi f,$$

est un isomorphisme de faisceaux. \square

Théorème. *Soit X une surface de Riemann compacte et soit $D \in \text{Div}(X)$ un diviseur sur X . Si son degré est strictement négatif :*

$$\text{deg}(D) \leq -1,$$

alors aucune fonction méromorphe globale non nulle dont le diviseur est minoré par $-D$ n'existe :

$$0 = H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ non nulle. En prenant le degré de l'inégalité $\text{div}(f) \geq -D$, on déduit en tenant compte d'un lemme de rappel qui précède :

$$1 \leq -\text{deg}(D) \leq \text{degré}(f) = 0,$$

ce qui est une contradiction. \square

Les faisceaux gratte-ciel \mathbb{C}_P . Soit P un point quelconque d'une surface de Riemann compacte X .

Définition. On définit le *faisceau gratte-ciel* \mathbb{C}_P sur X par les espaces suivants pour tout ouvert $U \subset X$:

$$\mathbb{C}_P(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } P \in U, \\ 0 & \text{si } P \notin U, \end{cases}$$

les morphismes de restriction étant évidents. Pour ces faisceaux gratte-ciel associés à des points $P \in X$, on a visiblement :

$$H^0(X, \mathbb{C}_P) \cong \mathbb{C}_P(X) \cong \mathbb{C}.$$

Lemme. *Le premier groupe de cohomologie de Čech de \mathbb{C}_P s'anulle :*

$$0 = H^1(X, \mathbb{C}_P).$$

DÉMONSTRATION. En effet, considérons une classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \mathbb{C}_P)$ qui est représentée par un cocycle dans $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_P)$ relativement à un certain recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X . En ne conservant qu'un seul U_i qui contient P et en remplaçant tous les autres U_j qui contiennent P par $U_j \setminus \{P\}$, on obtient un raffinement $\mathfrak{V} = (V_\alpha)$ tel que P est contenu dans un seul ouvert V_α . Mais alors toutes les intersections de l'ouvert spécial avec les autres ouverts ne contiennent jamais P , et l'on voit que $Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_P) = 0$, d'où au final $\xi = 0$. \square

Courte suite exacte de faisceau impliquant \mathcal{O}_D et \mathcal{O}_{D+P} . Soit maintenant X un diviseur arbitraire sur une surface de Riemann compacte quelconque X . Si $P \in X$ est un point quelconque, on notera par la même lettre P à la fois le point P et le diviseur associé qui prend la valeur 1 en P et zéro ailleurs. On voit donc que $D \leq D + P$ et que l'on a une inclusion naturelle (exactitude) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D+P}.$$

Soit (V, z) un système de coordonnées locale sur X au voisinage de P tel que $z(P) = 0$. On définit un homomorphisme de faisceaux :

$$\beta: \mathcal{O}_{D+P} \longrightarrow \mathbb{C}_P$$

comme suit. Soit $U \subset X$ un ouvert arbitraire. Si $P \notin U$, on a par définition $\mathbb{C}_P(U) = 0$, donc on assigne simplement :

$$\beta_U: \mathcal{O}_{D+P}(U) \longrightarrow \mathbb{C}_P(U)$$

à être l'homomorphisme nul. Si au contraire $P \in U$, et si $f \in \mathcal{O}_{D+P}(U)$, alors la fonction f se développe en une série de Laurent en P dans la coordonnée locale z :

$$f(z) = \sum_{n=-D(P)-1}^{\infty} c_n z^n,$$

qui commence au plus profond (*i.e.* au plus négatif) à l'entier $-D(P) - 1$. On pose alors :

$$\beta_U(f) := c_{-D(P)-1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_P(U).$$

Il alors est évident que β est un épimorphisme de faisceaux, et l'on se convainc (exercice à détailler) que l'on obtient ainsi un courte suite exacte de faisceaux fondamentale :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D+P} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_P \longrightarrow 0,$$

qui fera tout le travail plus bas. Grâce au théorème qui associe une (longue) suite exacte de cohomologie à toute courte suite exacte, on obtient l'exactitude de la suite d'espace vectoriels :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{C}_P) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_P), \end{aligned}$$

d'où en appliquant le lemme qui précède :

$$(*) \quad \begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Corollaire. Soient $D \leq D'$ deux diviseurs sur une surface de Riemann compacte X . Alors l'inclusion de faisceaux :

$$\mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D'}$$

induit un épimorphisme de faisceaux :

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. Lorsque l'on a simplement $D' = D + P$ avec un point de plus P , le lemme découle de la dernière ligne de la suite de cohomologie écrite à l'instant ci-dessus. Dans le cas général, on a :

$$D' = D + P_1 + \cdots + P_m,$$

avec un certain nombre $m := \deg(D') - \deg(D)$ de points, et une récurrence immédiate permet de conclure. \square

Théorème de Riemann-Roch. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X de genre g . Alors on la finitude des deux groupes de cohomologie à valeurs dans le faisceau \mathcal{O}_D :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) < \infty \quad \text{et} \quad \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) < \infty,$$

et ces deux dimensions sont reliées au genre de X et au degré de D par la relation fondamentale :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D).$$

Corollaire (Inégalité de Riemann). Sous les mêmes hypothèses, on déduit immédiatement :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg(D). \quad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Tout d'abord, lorsque $D = 0$, d'où $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_X$, puisque X est compacte, les fonctions holomorphes y sont constantes, donc on a :

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) &= \dim \mathbb{C} = 1 = 1 - g + g \\ &= 1 - g + \dim H^1(X, \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

en rappelant la définition $g := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ qui a été donnée du genre dans ce cours.

Soit maintenant D un diviseur arbitraire sur X , soit P un point quelconque de X , soit le diviseur :

$$D' := D + P$$

et supposons, en relation avec un raisonnement par double récurrence symétrique¹, que le théorème soit vrai pour l'un des deux diviseurs D ou D' .

La suite exacte de cohomologie (*) écrite plus haut peut être découpée en deux courtes suites exactes comme suit. Posons :

$$\begin{aligned} V &:= \text{Im} \left(H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow \mathbb{C} \right), \\ W &:= \mathbb{C}/V, \end{aligned}$$

¹ Tout diviseur D sur X peut être écrit comme :

$$D = P_1 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_n,$$

où les $P_j \in X$ sont des points de X . En partant du diviseur nul, on effectue en effet une double récurrence symétrique à la fois sur le nombre de points négatifs, et sur le nombre de points positifs.

d'où $\mathbb{C} = V \oplus W$. Alors on a immédiatement :

$$\dim V + \dim W = \dim \mathbb{C} = 1 = \deg D' - \deg D,$$

et on vérifie par construction — exercice impératif —, que les deux suites courtes de morphismes d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) & \longrightarrow & V \longrightarrow 0 \\ \text{et} & & 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

sont exactes. Ainsi par double récurrence symétrique, tous les espaces vectoriels qui y apparaissent sont de dimension finie, et on a² les deux relations suivantes entre leurs dimensions :

$$\begin{array}{l} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V \\ \text{et} \quad \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W. \end{array}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D.$$

Cette dernière relation implique que si l'équation de Riemann-Roch est satisfaite pour l'un des deux diviseurs D ou D' , elle est alors satisfaite pour l'autre diviseur. Ainsi, par récurrence sur le nombre de points pondérés qu'un diviseur peut incorporer, le théorème est démontré. \square

Indice de spécialité. On appelle l'entier :

$$i(D) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

l'indice de spécialité du diviseur D . En ces termes, le théorème de Riemann-Roch se reformule comme :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D + i(D).$$

Dans le chapitre suivant, nous démontrerons que l'on a $i(D) = 0$ toutes les fois que $\deg D \geq 2g - 2 + 1$. Notons aussi que lorsque $\deg D \leq -1$, puisqu'on sait que $H^0(X, \mathcal{O}_D) = \{0\}$, l'indice de spécialité vaut $i(D) = g - 1 - \deg D$ dans ce cas-là.

Théorème. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et soit $a \in X$ l'un quelconque de ses points. Alors il existe une fonction méromorphe non constante f sur X qui possède un pôle d'ordre $\leq g + 1$ en a et qui est holomorphe partout ailleurs sur $X \setminus \{a\}$.

DÉMONSTRATION. En effet, soit $D: X \rightarrow \mathbb{Z}$ le diviseur égal à zéro sur $X \setminus \{a\}$ et valant $D(a) = g + 1$ au point a . Grâce au théorème de Riemann-Roch, et plus précisément, grâce à l'inégalité de Riemann, on a :

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) &\geq 1 - g + \deg D \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une fonction méromorphe non constante $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, et cette fonction satisfait clairement les conditions du théorème. \square

Corollaire. Soit X une surface de Riemann de genre g . Alors il existe un revêtement holomorphe ramifié $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui possède au plus $g + 1$ feuillettes.

² Exercice : formuler un lemme général avec $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. La fonction trouvée dans le théorème qui précède produit en effet un tel revêtement, son pôle en a étant d'ordre $\leq g + 1$ par définition de \mathcal{O}_D . \square

Corollaire. *Toute surface de Riemann de genre 0 est biholomorphe à la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 .*

DÉMONSTRATION. En effet, un revêtement holomorphe à 1 feuillet est toujours non ramifié et produit donc un biholomorphisme global. \square

Exercices

Exercice 17.1. Soit D un diviseur sur la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 . Montrer que :

- (a) $\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D) = \max(0, 1 + \deg D)$;
- (b) $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D) = \max(0, -1 - \deg D)$.

Exercice 17.2. Soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe, soit $x_0 \in X$ et soit P le diviseur :

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{si } x \neq x_0. \end{cases}$$

En utilisant la fonction \wp de Weierstrass, montrer :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0, \\ n & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 17.3. Soit X une surface de Riemann compacte, soit D un diviseur sur X et soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que chaque U_i est biholomorphe à un disque. Montrer que \mathfrak{U} est un recouvrement de Leray pour le faisceau \mathcal{O}_D .

Exercice 17.4. (a) Sur une surface de Riemann X , soit \mathcal{D} le faisceau des diviseurs, i.e. pour $U \subset X$ ouvert, $\mathcal{D}(U)$ consiste en toutes les applications :

$$D: U \rightarrow \mathbb{Z}$$

telles que pour tout sous-ensemble compact $K \subset U$, il y a seulement un nombre fini de points $x \in K$ avec $D(x) \neq 0$. Montrer que \mathcal{D} muni des morphismes naturels de restriction est effectivement un faisceau, et montrer, en utilisant une partition de l'unité, que :

$$H^1(X, \mathcal{D}) = 0.$$

(a) Soit $\beta: \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{D}$ l'application qui assigne à toute fonction méromorphe nulle par égale à zéro $f \in \mathcal{M}^*(U)$ son diviseur $\text{div}(f)$, et soit $\alpha: \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^*$ l'injection naturelle. Montrer que la suite de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_X^* \xrightarrow{\beta} \mathcal{D} \rightarrow 0$$

est exacte, et donc qu'il lui est associée la suite exacte de groupes de cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \rightarrow 0.$$

18. Dualité de Brill-Noether-Serre

La *dualité de Brill-Noether-Serre* permet de formuler une interprétation plus simple des groupes de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ en termes de formes différentielles. Plus précisément, $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$ est égal au nombre maximum de 1-formes méromorphes linéairement indépendantes sur X qui sont multiples du diviseur D . Une conséquence de cela est la *formule de Riemann-Hurwitz* qui permet de calculer le genre d'un revêtement holomorphe ramifié en fonction du nombre de ses feuillettes et en fonction de son nombre total de branchement. Une autre conséquence est un théorème d'annulation qui stipule que $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ lorsque $\deg D \geq 2g - 2 + 1$. Ce théorème d'annulation possède des applications intéressantes, notamment pour établir un théorème de plongement des surfaces de Riemann compactes dans un espace projectif complexe \mathbb{P}^N de dimension N assez grande.

Définition d'un résidu intégral $\text{Res}: H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit X une surface de Riemann compacte. On a vu dans un chapitre qui précède que la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow T_X^{*(1,0)} \xrightarrow{d} \Lambda^2 T_X^* \longrightarrow 0$$

induit — puisque $H^1(X, T_X^{*(1,0)})$ s'annule grâce aux partitions \mathcal{C}^∞ de l'unité — le fameux isomorphisme de Dolbeault¹ :

$$H^1(X, \Omega_X) \cong \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*) / d(\Gamma(X, T_X^{*(1,0)})).$$

Soit alors une classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \Omega_X)$ et soit une 2-forme $\tau \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$ qui fournit un représentant de ξ *via* cet isomorphisme. On peut alors définir le *résidu intégral* de ξ par :

$$\boxed{\text{Res}(\xi) := \frac{1}{2i\pi} \iint_X \tau},$$

ce qui produit une *forme linéaire* :

$$\text{Res}: H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On a déjà vu dans un chapitre qui précède grâce à une démonstration de la formule de Stokes sur des anneaux que si $\tau = d\varphi$ est exacte, cette intégrale est nulle², donc cette définition est indépendante du choix d'un représentant τ . Le premier but est de comparer cette définition du résidu intégral à la définition standard des résidus en des points singuliers.

¹ Rappelons que $\bar{\partial}$ et $d = \partial + \bar{\partial}$ ont la même action sur les $(1, 0)$ -formes, puisque $\bar{\partial}$ agissant sur une $(1, 0)$ -forme locale $f dz$ produit $\bar{\partial}(f dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge dz = 0$, donc que l'on mette d ou $\bar{\partial}$ après la barre de fraction, le résultat est le même.

² La formule général de Stokes dirait ici que $\iint_X d\varphi = \int_{\partial X} \varphi = 0$, puisque le bord $\partial X = \emptyset$ est vide.

Mais avant toute chose, il convient de mieux expliciter l'isomorphisme sus-mentionné qui provient d'une longue suite exacte de cohomologie. Soit donc une classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \Omega_X)$ qui possède comme représentant, relativement à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , un 1-cocycle de formes différentielles holomorphes :

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega_X).$$

Au vu de l'inclusion de faisceaux $0 \rightarrow \Omega_X \rightarrow T_X^{*(1,0)}$ et au vu de l'annulation connue $0 = H^1(X, T_X^{*(1,0)})$, ce cocycle se scinde :

$$f_{ij} = \sigma_j - \sigma_i \quad \text{sur chaque intersection } U_i \cap U_j,$$

au moyen d'une 0-cochaîne $(\sigma_i) \in C^0(\mathfrak{U}, T_X^{*(1,0)})$ de 1-formes \mathcal{C}^∞ — bien que cela ne soit en général pas possible avec des 1-formes holomorphes. Alors l'holomorphie de f_{ij} donne³ :

$$0 = df_{ij} = d\sigma_j - d\sigma_i \quad \text{sur chaque intersection } U_i \cap U_j,$$

donc les $d\sigma_i$ se recollent en une certaine 2-forme \mathcal{C}^∞ définie sur X tout entier, disons $\tau \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$, laquelle satisfait :

$$\tau|_{U_i} = d\sigma_i \quad (i \in I).$$

Maintenant, nous affirmons que la classe modulo les formes exactes de cette 2-forme τ ne dépend pas du choix d'un représentant (f_{ij}) pour ξ . En effet, par linéarité, lorsque $\xi = 0$ est nul, c'est un cobord, donc le 1-cocycle (f_{ij}) se scinde holomorphiquement :

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{sur chaque intersection } U_i \cap U_j,$$

au moyen de certaines 1-formes holomorphes $g_i \in \Omega_X(U_i)$. Mais alors par soustraction :

$$0 = f_{ij} - f_{ij} = \sigma_j - \sigma_i - (g_j - g_i),$$

ce qui donne après réécriture spontanée :

$$\sigma_j - g_j = \sigma_i - g_i,$$

donc le système de $(1, 0)$ -formes $(\sigma_i - g_i)$ sur les U_i se recolle en une $(1, 0)$ -forme \mathcal{C}^∞ globale sur X , disons φ , qui satisfait par construction⁴ :

$$d\varphi|_{U_i} = d(\sigma_i - g_i)|_{U_i} = d\sigma_i|_{U_i} - dg_i|_{U_i} = d\sigma_i|_{U_i} = \tau|_{U_i},$$

ce qui montre bien que $\tau = d\varphi$ est exacte, comme annoncé.

Enfin, si on se rapporte aux considérations générales sur la cohomologie des faisceaux, on se convainc par une réflexion (peut-être intense) que la 2-forme τ ainsi construite est bien l'image de la classe de cohomologie ξ par l'isomorphisme de Dolbeault.

Distributions de Mittag-Leffler de formes différentielles. Soit à nouveau X une surface de Riemann (pas forcément compacte), soit $\mathcal{M}T_X^*$ le faisceau des 1-formes différentielles méromorphes sur X et soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X .

Définition. Une 0-cochaîne de \mathfrak{U} à valeurs dans ce faisceau :

$$(\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$$

³ Puisque f_{ij} est une 1-forme holomorphe, sa différentielle s'annule automatiquement.

⁴ Puisque g_i est une 1-forme holomorphe, sa différentielle s'annule automatiquement.

est appelée une *distribution de Mittag-Leffler* si toutes ses différences par paires :

$$\omega_j - \omega_i \in \Omega_X(\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j)$$

sont des 1-formes *holomorphes sans singularités* sur les intersections d'ouverts, ce qui revient à dire que l'opérateur de cobord rend (ω_i) holomorphe :

$$(\delta(\omega_i)) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega_X).$$

On notera alors :

$$[(\delta(\omega_i))] \in H^1(X, \Omega_X)$$

la classe de cohomologie de ce cocycle $(\delta(\omega_i))$.

Soit maintenant a un point de X . Le *résidu* au point a d'une distribution de Mittag-Leffler se définit alors comme suit. On choisit un indice $i \in I$ tel que $a \in \mathbf{U}_i$ et on pose :

$$\text{Res}_a((\omega_i)) := \text{Res}_a(\omega_i),$$

où, en revenant à une définition classique connue, ce dernier résidu est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans la série de Laurent en a du coefficient méromorphe $f_i(z)$ de la représentation $\omega_i = f_i(z) dz$ dans une coordonnée holomorphe locale z près de a , coefficient qui ne dépend pas de la carte, comme cela a déjà été vu dans le chapitre sur les formes différentielles.

Observons sans attendre que si $a \in \mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j$, puisque les différences $\omega_i - \omega_j$ sont holomorphes, il est clair que ω_i et ω_j ont le même résidu en a : ainsi, la définition ne dépend pas du choix d'un indice i tel que $a \in \mathbf{U}_i$.

Dorénavant, on supposera que la surface de Riemann X est *compacte*. Comme on a $\text{Res}_a((\omega_i)) \neq 0$ seulement en un nombre fini de points, on peut définir la somme :

$$\text{Res}((\omega_i)) := \sum_{a \in X} \text{Res}_a((\omega_i)).$$

Voici à présent le lien entre cette définition standard du résidu et la définition du résidu intégral donnée plus haut.

Théorème. *Sur une surface de Riemann compacte X munie d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (\mathbf{U}_i)_{i \in I}$, étant donné une distribution de Mittag-Leffler :*

$$(\omega_i)_{i \in I}$$

relative à ce recouvrement qui est constituée de 1-formes méromorphes :

$$\omega_i \in \mathcal{M}T_X^*(\mathbf{U}_i)$$

dont toutes les différences :

$$\omega_j - \omega_i \in \Omega_X(\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j)$$

deviennent holomorphes sur les intersections par paires des ouverts, si $[\delta((\omega_i))]$ désigne la classe de cohomologie du 1-cocycle de 1-formes holomorphes :

$$\delta((\omega_i)) = (\omega_j - \omega_i)_{i,j \in I}$$

dans le premier groupe de cohomologie de Čech $H^1(X, \Omega_X)$, et si une 2-forme différentielle globale :

$$\tau \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$$

est un représentant de l'image de $[\delta((\omega_i))]$ par l'isomorphisme de Dolbeault :

$$H^1(X, \Omega_X) \cong \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*) / d(\Gamma(X, T_X^{*(1,0)})),$$

alors à un facteur constant près, la somme des résidus ponctuels de (ω_i) est égale l'intégrale de τ sur X :

$$\sum_{a \in X} \text{Res}_a((\omega_i)) = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \tau.$$

DÉMONSTRATION. Soit comme ci-dessus un scindage lisse du 1-cocycle $(\omega_j - \omega_i)$ de 1-formes holomorphes au moyen de 1-formes $\sigma_i \in \Gamma(U_i, T_X^{*(1,0)})$ de classe \mathcal{C}^∞ et de type $(1, 0)$:

$$\omega_j - \omega_i = \sigma_j - \sigma_i \quad \text{sur chaque intersection } U_i \cap U_j,$$

de telle sorte que, comme vu à l'instant, les différentielles $d\sigma_i$ se recollent en une 2-forme globale $\tau \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$ satisfaisant :

$$\tau|_{U_i} = d\sigma_i \quad (i \in I).$$

Ensuite, soient $a_1, \dots, a_n \in X$ la réunion des pôles — en nombre fini — de tous les ω_i et considérons leur complémentaire :

$$X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Sur chaque intersection $X' \cap U_i \cap U_j$, on a d'après ce qui vient d'être vu une égalité sans singularités :

$$\sigma_i - \omega_i = \sigma_j - \omega_j.$$

Par recollement, il existe donc une $(1, 0)$ -forme différentielle globale sur X' :

$$\sigma' \in \Gamma(X', T_{X'}^{*(1,0)})$$

qui redonne en restrictions :

$$\sigma' = \sigma_i - \omega_i \quad \text{sur } X' \cap U_i.$$

Mais puisque $0 = d\omega_i$ par holomorphie de ces 1-formes sur $X' \cap U_i$, on a enfin :

$$\tau = d\sigma' \quad \text{sur } X'.$$

Pour tout point a_k , il existe un indice $i(k) \in I$ tel que $a_k \in U_{i(k)}$. Choisissons donc pour tout k un voisinage de coordonnée (V_k, z_k) de a_k avec $V_k \subset U_{i(k)}$ qui est centré en a_k , i.e. avec $z_k(a_k) = 0$. On peut supposer que les ouverts V_k sont disjoints deux à deux et que chaque $z_k(V_k) \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert. Pour tout $k = 1, \dots, n$, choisissons ensuite une fonction $f_k \in \mathcal{C}^\infty(X)$ avec $\text{Supp}(f_k) \subset V_k$ et qui est égale à 1 sur un certain sous-voisinage ouvert $W_k \Subset V_k$ non vide de a_k , i.e. $f_k|_{W_k} = 1$, et introduisons la fonction :

$$g := 1 - (f_1 + \dots + f_n).$$

Puisque $g|_{W_k} = 0$, la $(1, 0)$ -forme $g\sigma'$ lisse sur X' peut en fait être prolongée naturellement aux points a_k en la déclarant nulle dans leur voisinage, et donc, $g\sigma'$ peut être considérée comme une $(1, 0)$ -forme lisse partout, appartenant à $\Gamma(X, T_X^{*(1,0)})$. Le théorème de Stokes assure alors l'annulation de son intégrale sur X :

$$\iint_X d(g\sigma') = 0.$$

Ensuite, sur $W_k \setminus \{a_k\} \subset U_{i(k)} \setminus \{a_k\}$, on a par construction pour tout k :

$$d(f_k \sigma') = d\sigma' = d(\sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)}) = d\sigma_{i(k)},$$

ce qui montre que chaque $d(f_k \sigma')$ peut être prolongée comme 2-forme \mathcal{C}^∞ au voisinage de a_k . Mais puisque $f_k \sigma'$ s'annule sur le complémentaire $X' \setminus \text{Supp}(f_k)$, cette 2-forme $d(f_k \sigma')$ est naturellement une 2-forme lisse globale sur X , i.e. elle appartient à $\Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$.

Maintenant, en revenant à la relation $1 = g + f_1 + \cdots + f_n$ que l'on multiplie σ' , ce qui nous donne :

$$\sigma' = g\sigma' + f_1\sigma' + \cdots + f_n\sigma',$$

où les $(n+1)$ formes à droites sont toutes lisses sur X entier, et en prenant la différentielle extérieure, nous obtenons une relation :

$$\tau = d\sigma' = d(g\sigma') + d(f_1\sigma') + \cdots + d(f_n\sigma')$$

qui est valable sur X entier et que l'on peut intégrer en se souvenant que $\sigma' = \sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)}$ sur $V_k \subset U_{i(k)}$:

$$\begin{aligned} \iint_X \tau &= \iint_X d(g\sigma') + \sum_{k=1}^n \iint_X d(f_k\sigma') \\ &= \sum_{k=1}^n \iint_{V_k} d(f_k\sigma_{i(k)} - f_k\omega_{i(k)}). \end{aligned}$$

Or puisque les 2-formes $d(f_k\sigma_{i(k)})$ sont \mathcal{C}^∞ à support compact dans V_k , le théorème de Stokes sur un disque montre que leur intégrale, égale à l'intégrale de la $(1,0)$ -forme $f_k\sigma_{i(k)}$ identiquement nulle sur le bord du disque, est nulle. Par ailleurs, on a déjà calculé — en appliquant le théorème de Stokes sur des anneaux — dans la démonstration du *Théorème des résidus pour les 1-formes holomorphes*, chacune des n intégrales restantes :

$$\iint_{V_k} d(f_k\omega_{i(k)}) = -2i\pi \text{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}).$$

Ainsi par sommation on a bien :

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_X \tau = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}),$$

ce qui achève d'établir la coïncidence des deux définitions du résidu total d'une distribution de Mittag-Leffler. \square

Les faisceaux Ω_D . Soit X une surface de Riemann compacte. Pour tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$, on introduit le faisceau Ω_D des 1-formes différentielles méromorphes sur X qui sont multiples de $-D$, à savoir, pour tout ouvert $U \subset X$:

$$\Omega_D(U) := \left\{ \omega \in \mathcal{M}T_X^*(U) : \text{ord}_x(\omega) \geq -D(x) \text{ pour tout } x \in U \right\}.$$

Bien entendu, lorsque $D = 0$ est le diviseur nul, $\Omega_0 = \Omega_X$ coïncide avec le faisceau des 1-formes holomorphes sur X .

Soit maintenant $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$ une 1-forme méromorphe globale non nulle, par exemple $\omega = df$ avec une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ non constante (il en existe beaucoup). Soit $E := \text{div}(\omega)$ le diviseur que définit ω . Alors pour un diviseur quelconque

$D \in \text{Div}(X)$, la multiplication des fonctions méromorphes par ω induit un *isomorphisme de faisceaux* (exercice mental) :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{D+E} &\longrightarrow \Omega_D \\ f &\longmapsto f\omega, \end{aligned}$$

qui sera régulièrement utilisé dans la suite.

Lemme. *Il existe une constante $k_0 \in \mathbb{Z}$ telle que l'on ait l'inégalité de croissance linéaire :*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg D + k_0$$

pour tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$.

DÉMONSTRATION. Soit comme ci-dessus $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$ une 1-forme méromorphe globale non nulle et soit $E := \text{div}(\omega)$ son diviseur. Si $g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est le genre de X , introduisons la constante :

$$k_0 := 1 - g + \deg E.$$

Alors l'isomorphisme qui précède et le théorème de Riemann-Roch nous donnent la minoration :

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+E}) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+E}) + 1 - g + \deg(D + E) \\ &\geq \deg D + k_0, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité de croissance annoncée. \square

Définition d'une dualité entre 1-formes méromorphes et fonctions méromorphes. Soit X une surface de Riemann compacte et soit $D \in \text{Div}(X)$ un diviseur. Au niveau des faisceaux, on a une application naturelle 'produit' entre fonctions méromorphes et 1-formes méromorphes :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D \times \Omega_{-D} &\longrightarrow \Omega_X \\ (f, \omega) &\longmapsto f\omega, \end{aligned}$$

qui aboutit dans le faisceau des formes différentielles *holomorphes*. Ensuite, étant donné une 1-forme méromorphe globale non nulle :

$$\omega \in \Omega_{-D}(X),$$

lorsqu'on considère, relativement à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , cette application 'produit' de ω avec un 1-cocycle :

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D),$$

on obtient l'application :

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) \times H^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow Z^1(\mathfrak{U}, \Omega_X) \\ ((f_{ij}), \omega) &\longmapsto f_{ij}\omega|_{U_i \cap U_j}. \end{aligned}$$

On vérifie (exercice) que cette application passe au double quotient à la fois par les cobords et par les raffinement de recouvrements pour produire une application entre groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{O}_D) \times H^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \\ (\xi, \omega) &\longmapsto \xi\omega. \end{aligned}$$

Enfin, la composée de cette application avec l'application *résidu intégral* étudiée plus haut :

$$\text{Res} : H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

fournit un produit scalaire bilinéaire :

$$\left. \begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(X, \mathcal{O}_D) \times H^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \xi, \omega \rangle &:= \text{Res}(\xi \omega) \end{aligned} \right\}.$$

En particulier, ce produit scalaire induit une application du second espace dans le *dual* du premier :

$$\left. \begin{aligned} \iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \\ \omega &\longmapsto (\xi \mapsto \text{Res}(\xi \omega)) \end{aligned} \right\}.$$

Le théorème de dualité de Brill-Noether-Serre (plus bas) affirme alors, pour tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$, que cette application ι_D est un *isomorphisme*, ce qui sera démontré ultérieurement. Pour l'instant, nous sommes en mesure de démontrer le :

Théorème. *Cette application ι_D est injective.*

DÉMONSTRATION. On doit donc établir que pour toute 1-forme non nulle $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, il existe une classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ telle que $\langle \xi, \omega \rangle \neq 0$.

Soit $a \in X$ un point (générique) en lequel $D(a) = 0$, et soit (U_0, z) une coordonnée holomorphe locale en a avec $z(a) = 0$ et $D|_{U_0} = 0$. Sur U_0 , on peut écrire $\omega = f dz$, avec un coefficient holomorphe $f \in \mathcal{O}(U_0)$. De plus, on peut supposer que l'ouvert U_0 est assez petit pour que f n'ait aucun zéro dans le complémentaire $U_0 \setminus \{a\}$.

Posons maintenant $U_1 := X \setminus \{a\}$ et considérons le recouvrement :

$$\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$$

de X . Ensuite, introduisons la 0-cochaîne :

$$\eta := \left(\frac{1}{zf}, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X).$$

Alors on a immédiatement que le produit :

$$\eta \omega = \left(\frac{1}{z}, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$$

est une distribution de Mittag-Leffler de résidu (standard) total :

$$\text{Res}(\eta \omega) = 1.$$

Puisque la seule intersection d'ouverts est $U_0 \cap U_1 = U_0 \setminus \{a\}$, lieu où $D = 0$, le cobord de η est un 1-cocycle :

$$\delta(\eta) = -\frac{1}{zf} \Big|_{U_0 \setminus \{a\}} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D),$$

à valeurs dans \mathcal{O}_D . Soit alors :

$$\xi := [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

la classe de cohomologie de ce cobord $\delta(\eta)$. Puisque l'on a par construction :

$$\xi \omega = [\delta(\eta)] \omega = [\delta(\eta \omega)],$$

il découle du théorème qui précède que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle \xi, \omega \rangle &= \text{Res}(\xi \omega) = \text{Res}([\delta(\eta \omega)]) && \text{[résidu intégral]} \\ &= \text{Res}(\eta \omega) && \text{[résidu standard]} \\ &= \langle \xi, \omega \rangle \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Un premier lemme technique. Soient maintenant $D, D' \in \text{Div}(X)$ deux diviseurs sur une surface de Riemann compacte X qui satisfont $D' \leq D$. On a vu dans un corollaire du chapitre sur le théorème de Riemann-Roch que le monomorphisme de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \longrightarrow \mathcal{O}_D$$

induit un épimorphisme entre premiers groupes de cohomologie qu'on appelle $S_D^{D'}$:

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{S_D^{D'}} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow 0.$$

Par dualité, ce dernier induit un monomorphisme entre espaces duaux qu'on appelle I_D^D :

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{I_D^D} H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*$$

En revenant aux deux applications :

$$\iota_{D'}: H^0(X, \Omega_{-D'}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \quad \text{et} \quad \iota_D: H^0(X, \Omega_{-D}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

relatives aux deux produits scalaires 'résidu' associés à ces deux diviseurs :

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \times H^0(X, \Omega_{-D'}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathcal{O}_D) \times H^0(X, \Omega_{-D}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

on vérifie alors (exercice) que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{I_D^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & & \uparrow \iota_D & & \uparrow \iota_{D'} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D'}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

est commutatif.

Lemme. Avec les notations qui précèdent, si $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ et si $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ satisfont :

$$I_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega),$$

alors ω appartient en fait au sous-espace $H^0(X, \Omega_{-D})$ et l'on a de plus :

$$\lambda = \iota_D(\omega).$$

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde au contraire que ω n'appartienne pas à $H^0(X, \Omega_{-D})$: autrement dit, il existe un point $a \in X$ en lequel :

$$\text{ord}_a(\omega) \leq D(a) - 1.$$

Soit alors (U_0, z) un voisinage de coordonnée de a avec $z(a) = 0$. Sur U_0 , on peut écrire ω comme $\omega = f dz$, avec un coefficient méromorphe $f \in \mathcal{M}_X(U_0)$. Par isolation des points d'un diviseur, on peut clairement supposer que U_0 est assez petit pour que :

- (i) $0 = D|_{U_0 \setminus \{a\}} = D'|_{U_0 \setminus \{a\}}$;
- (ii) f n'a ni zéros ni pôles dans $U_0 \setminus \{a\}$.

Posons alors $U_1 := X \setminus \{a\}$ et soit $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$ le recouvrement ouvert de X associé, qui est de cardinal 2. Soit la 0-cochaîne :

$$\eta = \left(\frac{1}{zf}, 0\right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X).$$

L'hypothèse $\text{ord}_a(\omega) \leq D(a) - 1$ signifie que $\text{ord}_a(f) \geq -D(a) + 1$, donc :

$$\text{ord}_a\left(\frac{1}{zf}\right) \geq -D(a),$$

ce qui signifie à son tour que $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Puisqu'il n'y a qu'une seule intersection d'ouverts $U_0 \cap U_1 = U_0 \setminus \{a\}$ sur laquelle $D = D' = 0$, on voit que :

$$\delta(\eta) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{D'}).$$

Notons alors ξ' la classe de cohomologie de $\delta(\eta)$ dans $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ et observons que la classe de cohomologie ξ de $\delta(\eta)$ dans $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ s'annule : $\xi = 0$, puisque η est à valeurs dans \mathcal{O}_D , donc $\xi = \delta(\eta)$ est un cobord. Autrement dit, en revenant à l'épimorphisme $S_D^{D'}$, on a :

$$S_D^{D'}(\xi') = \xi = 0.$$

Dans ces conditions, on a par hypothèse et par construction :

$$\begin{aligned} \langle \xi', \omega \rangle &= \iota_{D'}(\omega)(\xi') \\ &= I_{D'}^D(\lambda)(\xi') && \text{[utiliser l'hypothèse]} \\ &= \lambda(S_D^{D'}(\xi')) \\ &= \lambda(\xi) = 0 && [\xi = 0]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\eta\omega = \left(\frac{dz}{z}, 0\right)$, on voit en revenant à la fin de la démonstration du théorème qui précède que :

$$\langle \xi', \omega \rangle = \text{Res}(\xi' \omega) = \text{Res}([\delta(\eta\omega)]) = \text{Res}(\eta\omega) = 1,$$

ce qui est une contradiction ! Ainsi, l'hypothèse de départ était fautive, et ω appartient bien au sous-espace $H^0(X, \Omega_{-D})$.

Pour terminer, puisque le diagramme qui précède est commutatif, on a :

$$I_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega) = I_{D'}^D(\iota_D(\omega)),$$

et l'égalité annoncée $\lambda = \iota_D(\omega)$ découle directement de l'injectivité de $I_{D'}^D$. □

Un second lemme technique. Soient maintenant D et B deux diviseurs sur une surface de Riemann compacte X . Étant donné une fonction méromorphe $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$, le morphisme naturel de faisceaux 'multiplication par ψ ' :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{D-B} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{O}_D \\ f & \longmapsto & \psi f \end{array}$$

induit en passant aux recouvrements et aux cocycles une application linéaire :

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D),$$

et donc aussi par dualité, une application linéaire :

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*,$$

qui, naturellement, est définie par :

$$(\psi^*(\lambda))(\xi) := \lambda(\psi(\xi)),$$

pour $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ et pour $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$.

La multiplication par $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ induit aussi une application au niveau des 1-formes méromorphes globales :

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \xrightarrow{\psi} H^0(X, \Omega_{-D+B}).$$

En revenant à la définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ comme somme de résidus standard, on voit aisément que l'on a :

$$\langle \xi, \psi \omega \rangle = \langle \psi \xi, \omega \rangle,$$

pour toute classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$ et toute 1-forme $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D+B})$. Autrement dit (exercice mental), le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ \iota_D \uparrow & & \uparrow \iota_{D-B} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array}$$

est commutatif.

Lemme. Si la fonction méromorphe $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ est non identiquement nulle, alors l'application duale de l'application qu'elle induit entre groupes de cohomologies :

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

est injective.

DÉMONSTRATION. Introduisons une notation abrégée pour le diviseur de ψ :

$$A := \operatorname{div}(\psi) \geq -B.$$

Au niveau des faisceaux, la multiplication par ψ :

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D$$

se factorise par une injection évidente :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D-B} \longrightarrow \mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D,$$

cette dernière multiplication par ψ étant un isomorphisme (exercice mental) qui se transpose en un isomorphisme au niveau des H^1 :

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+A}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow 0.$$

Mais puisqu'on a déjà vu d'après un corollaire du chapitre sur le théorème de Riemann-Roch que l'application induite par l'inclusion de faisceaux $\mathcal{O}_{D-B} \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+A}$:

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+A}) \longrightarrow 0$$

est un épimorphisme, il est maintenant clair que l'application composée :

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow 0$$

est elle aussi un épimorphisme, donc dualement parlant, ψ^* est injective. \square

Théorème de dualité de Brill-Noether-Serre. *Pour tout diviseur D sur une surface de Riemann compacte X , l'application :*

$$\begin{aligned} \iota_D: \quad H^0(X, \Omega_{-D}) &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \\ \omega &\longmapsto (\xi \mapsto \text{Res}(\xi \omega)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme :

$$\boxed{H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*}.$$

Corollaire (Définition équivalente du genre). *Le genre g d'une surface de Riemann compacte X défini précédemment comme la dimension du 1^{er} groupe de cohomologie de Čech du faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur X :*

$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes globales sur X :

$$\boxed{g = \dim H^0(X, \Omega_X)}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, avec le diviseur nul $D = 0$, le second espace est isomorphe au dual du premier. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Puisque nous avons déjà vu dans un lemme qui précède que cette application ι_D est injective, il nous reste à établir qu'elle est surjective. Si donc $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ est une forme linéaire non nulle fixée arbitraire, nous devons trouver une 1-forme méromorphe $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D})$ satisfaisant $\iota_D(\omega_0) = \lambda$.

Soit P un diviseur réduit à un unique point de multiplicité 1, i.e. $\deg P = 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (grand), considérons le diviseur modifié :

$$D_n := D - nP.$$

Introduisons ensuite un certain sous-espace vectoriel :

$$\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

qui consiste en toutes les formes linéaires sur $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})$ qui sont les 'translatées' $(\psi^*\lambda)(\cdot) := \lambda(\psi \cdot)$ de notre forme fixée λ par des fonctions méromorphes $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ arbitraires, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \psi^*\lambda: \quad H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \lambda(\psi \xi). \end{aligned}$$

Étant donné deux telles fonctions méromorphes ψ_1 et ψ_2 , on a par linéarité $\psi_1^*\lambda = \psi_2^*\lambda$ si et seulement si $(\psi_2 - \psi_1)^*\lambda = 0$, et le lemme qui précède montre que $\psi_2 = \psi_1$. Autrement

dit, Λ est paramétrisé injectivement par $H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, donc l'inégalité de Riemann(-Roch) nous assure, si g désigne comme toujours le genre de X , que :

$$\begin{aligned} \dim \Lambda &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \\ &\geq 1 - g + \deg(nP) \\ &= 1 - g + n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après un théorème qui précède, l'application :

$$\iota_{D_n} : H^0(X, \Omega_{-D_n}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

étant injective, on déduit de l'inégalité de croissance linéaire vue dans un lemme qui précède qu'il existe une constante $k_0 \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(\iota_{D_n}) &= \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \\ &\geq \deg(-D_n) + k_0 \\ &= n + k_0 - \deg D. \end{aligned}$$

Mais pour $n \geq \deg D + 1$ assez grand, on a $\deg D_n \leq -1$ et on sait alors que $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$, donc le théorème de Riemann-Roch nous donne — sous cette hypothèse que l'entier n soit grand :

$$\begin{aligned} \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) \\ &= g - 1 - \deg D_n \\ &= n + (g - 1 - \deg D). \end{aligned}$$

On se convainc alors aisément (exercice direct) que pour n assez grand, l'inégalité stricte suivante est automatiquement satisfaite :

$$\dim \Lambda + \dim \text{Im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Et cette inégalité implique manifestement que :

$$\Lambda \cap \text{Im}(\iota_{D_n}) \neq 0.$$

Autrement dit, il existe une fonction méromorphe non nulle :

$$\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$$

et une 1-forme méromorphe non nulle :

$$\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$$

telles que :

$$\psi^* \lambda = \iota_{D_n}(\omega),$$

ce qui résout presque notre problème de trouver ω_0 telle que $\lambda = \iota_D(\omega_0)$.

En effet, pour supprimer ce facteur ψ , soit $A := \text{div}(\psi)$ son diviseur, d'où :

$$\frac{1}{\psi} \in H^0(X, \mathcal{O}_A),$$

et soit le diviseur $D' := D_n - A$. Avec le monomorphisme :

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{I_{D'}^D} H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*,$$

on peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} I_{D'}^D(\lambda) &= \frac{1}{\psi}(\psi^*\lambda) \\ &= \frac{1}{\psi} \iota_{D_n}(\omega) \\ &= \iota_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right). \end{aligned}$$

Grâce à un lemme qui précède, on obtient finalement à partir de cette dernière relation que :

$$\omega_0 := \frac{1}{\psi}\omega \in H^0(X, \Omega_{-D}),$$

et que :

$$\lambda = \iota_D(\omega_0),$$

ce qui est la conclusion désirée. \square

Ainsi, avec cette nouvelle définition obtenue par dualité, le genre d'une surface de Riemann compacte compte le nombre maximum de 1-formes holomorphes linéairement indépendantes.

Corollaire (Reformulation du Théorème de Riemann-Roch). *Pour tout diviseur D sur une surface de Riemann compacte X de genre g , le nombre maximum de fonctions méromorphes linéairement indépendantes dont le diviseur est $\geq -D$ auquel on soustrait le nombre maximum de 1-formes méromorphes linéairement indépendantes dont le diviseur est $\geq +D$ vaut :*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) - \dim H^0(X, \Omega_D) = 1 - g - \deg D. \quad \square$$

Pour compléter la dualité de Brill-Noether-Serre, on énonce le :

Théorème. *Si D est un diviseur sur une surface de Riemann compacte X , alors on a les deux isomorphismes :*

$$\begin{aligned} H^0(X, \Omega_{-D}) &\cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \\ H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) &\cong H^1(X, \Omega_D)^*. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le premier ayant déjà été vu, établissons le second (il sont en fait équivalents : exercice). Soit $\omega_0 \neq 0$ une 1-forme méromorphe non nulle quelconque sur X et soit :

$$K := \text{div}(\omega_0)$$

son diviseur. L'isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-D-K}$ induit par ω_0 , la dualité déjà vue et l'isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{D+K} \cong \Omega_D$ aussi induit par ω_0 donnent l'un après l'autre :

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) &\cong H^0(X, \Omega_{-D-K}) \\ &\cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+K})^* \\ &\cong H^1(X, \Omega_D)^*, \end{aligned}$$

ce qui est la conclusion. \square

Corollaire. *En particulier, pour $D = 0$, on a :*

$$\dim H^1(X, \Omega_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

DÉMONSTRATION. En effet, les fonctions holomorphes globales sur X sont constantes. \square

Corollaire. *L'application :*

$$\text{Res}: H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. On se convainc (exercice) qu'elle n'est pas identiquement nulle. \square

Théorème. *Le diviseur de toute 1-forme méromorphe $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$ non nulle sur une surface de Riemann compacte de genre g est de degré :*

$$\deg(\omega) = 2g - 2.$$

DÉMONSTRATION. Posons $K := \text{div}(\omega)$. Pour ce diviseur, le théorème de Riemann-Roch nous dit que :

$$1 - g + \deg K = \dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K).$$

Mais nous savons, pour toute telle 1-forme méromorphe, que :

$$\Omega_X \cong \mathcal{O}_K,$$

donc en appliquant un corollaire qui vient d'être vu :

$$\begin{aligned} 1 - g + \deg K &= \dim H^0(X, \Omega_X) - \underbrace{\dim H^1(X, \Omega_X)}_{=1} \\ &= g - 1, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\deg K = 2g - 2$. \square

Corollaire. *Tout tore complexe \mathbb{C}/Γ associé à un réseau $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est de genre égal à 1.*

DÉMONSTRATION. En effet, la 1-forme triviale dz sur \mathbb{C} induit par passage au quotient une 1-forme ω sur ce tore \mathbb{C}/Γ qui, clairement, n'a ni zéros ni pôles. Puisque l'on a donc :

$$0 = \deg(\omega) = 2g - 2,$$

c'est que le genre de \mathbb{C}/Γ est bien égal à 1. \square

Formule de Riemann-Hurwitz. Soient X et X' deux surfaces de Riemann compactes et soit :

$$f: X \longrightarrow X'$$

une application holomorphe non constante. On sait que f est alors surjective puisqu'elle est ouverte, sachant qu'elle se comporte localement au voisinage de tout point $x \in X$ comme une certaine application puissance :

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto z^{k_x} \in \mathbb{C},$$

dans un couple constitué d'une carte locale (U, z) sur X s'annulant en x et d'une carte locale (U', z') sur X' s'annulant en $f(x)$.

Définition. En tout point $x \in X$, on notera :

$$\mu_x(f) := k_x \in \mathbb{N}_*$$

la *multiplicité* avec laquelle f prend la valeur $f(x)$ au point x .

Définition. On appelle *ordre de branchement* de f au point x l'entier :

$$b_x(f) := \mu_x(f) - 1 \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $b_x(f) = 0$ s'annule précisément lorsque f est localement non branchée en x , et puisque X est compacte, il n'y a qu'un nombre fini de points en lesquels $b_x(f) \neq 0$.

Définition. Le nombre total de branchement d'une application holomorphe non constante $f: X \rightarrow X'$ entre surfaces de Riemann compactes est la somme de tous ses nombres de branchements :

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f),$$

en tous les points de X .

On rappelle d'après le chapitre sur les fonctions algébriques qu'en dehors de l'ensemble critique de f :

$$\text{Crit}(f) := \{x \in X : b_x(f) \geq 1\}$$

constitué des points où la dérivée de f s'annule, et en dehors de l'image par f de cet ensemble critique :

$$f(\text{Crit}(f)),$$

la restriction de f :

$$X \setminus f^{-1}(f(\text{Crit}(f))) \xrightarrow{f} X' \setminus f(\text{Crit}(f))$$

établit un vrai revêtement non ramifié entre surfaces de Riemann — toujours connexes, mais non compactes dès que $\text{Crit}(f) \neq \emptyset$ — qui possède donc un certain nombre constant de feuillettes, que l'on notera :

$$\text{degré}(f).$$

En fait, on sait qu'en comptant les multiplicités comme il se doit aux points de branchement, ce degré est aussi égal à la somme :

$$\boxed{\sum_{x \in f^{-1}(x')} \nu_x(f) = \text{degré}(f)},$$

quel que soit le point $x' \in X'$, y compris lorsque $x' \in f(\text{Crit}(f))$.

Théorème de Riemann-Hurwitz. Le nombre total de branchement :

$$b = \text{branchement}(f) = \sum_{x \in X} (\text{multiplicité}_x(f) - 1)$$

d'une application holomorphe non constante $f: X \rightarrow X'$ entre surfaces de Riemann compactes qui établit automatiquement un revêtement holomorphe ramifié à un nombre fini :

$$d := \text{degré}(f)$$

de feuillettes est relié aux genres respectifs :

$$g := \text{genre}(X) \quad \text{et} \quad g' := \text{genre}(X')$$

de X et de X' par la formule :

$$\boxed{2 - 2g = d(2 - 2g') - b},$$

c'est à dire de manière équivalente en termes de leurs caractéristiques d'Euler respectives définies comme :

$$\chi_{\text{Euler}}(X) := 2 - 2g \quad \text{et} \quad \chi_{\text{Euler}}(X') := 2 - 2g',$$

par la formule remarquable :

$$\chi_{\text{Euler}}(X) = \text{degré}(f) \cdot \chi_{\text{Euler}}(X') - \text{branchement}(f).$$

DÉMONSTRATION. On peut donner une démonstration purement topologique de ce théorème, en produisant deux triangulations de X et de X' qui sont adaptées au revêtement ramifié $f: X \rightarrow X'$ et qui respectent ses points de ramifications, mais nous allons plutôt utiliser des arguments analytiques basés sur ce qui a déjà été vu.

Choisissons une 1-forme méromorphe globale non nulle ω' arbitraire sur X' et soit $\omega := f^*\omega'$ sa tirée en arrière, qui est, de même, une 1-forme méromorphe globale non nulle sur X . Grâce à ce qui précède, on connaît les degrés de ω et de ω' :

$$2g - 2 = \text{deg}(\omega) \quad \text{et} \quad 2g' - 2 = \text{deg}(\omega').$$

Soit $x \in X$ un point arbitraire et soit $x' := f(x)$ son image par f . D'après le théorème qui décrit le comportement local des applications holomorphes, il existe un voisinage de coordonnée (U, z) de x et un voisinage de coordonnée (U', z') de x' avec $z(x) = 0$ et $z'(x') = 0$ dans lesquels l'application f est une puissance :

$$z \longmapsto z' = z'(z) = z^k,$$

où l'entier $k = \nu_x(f)$ est bien entendu égal à la multiplicité de f en x . Soit alors :

$$\omega' = \psi(z') dz'$$

la représentation locale de ω' . Clairement, sa tirée en arrière est égale à :

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \psi(z^k) d(z^k) \\ &= k z^{k-1} \psi(z^k) dz, \end{aligned}$$

ce qui montre que son ordre en x s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \text{ord}_x(f^*\omega) &= (k - 1) + k \text{ord}_0(\psi) \\ &= b_x(f) + \nu_x(f) \text{ord}_{x'}(\omega). \end{aligned}$$

Si donc l'on somme ces égalités sur tous les points $x \in f^{-1}(x')$ appartenant à la préimage d'un point quelconque $x' \in X'$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in f^{-1}(x')} \text{ord}_x(f^*\omega) &= \sum_{x \in f^{-1}(x')} b_x(f) + \left(\sum_{x \in f^{-1}(x')} \nu_x(f) \right) \text{ord}_{x'}(\omega) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(x')} b_x(f) + \text{degré}(f) \cdot \text{ord}_{x'}(\omega). \end{aligned}$$

Enfin, en sommant ces relations sur tous les points $x' \in X'$, on calcule :

$$\begin{aligned} \text{deg}(f^*\omega) &= \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f^*\omega) \\ &= \sum_{x' \in X'} \sum_{x \in f^{-1}(x')} \text{ord}_x(f^*\omega) \\ &= \sum_{x' \in X'} \sum_{x \in f^{-1}(x')} b_x(f) + \text{degré}(f) \cdot \sum_{x' \in X'} \text{ord}_{x'}(\omega) \\ &= \text{branchement}(f) + \text{degré}(f) \cdot \text{deg}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui montre bien, en revenant aux valeurs de $\deg(f^*\omega)$ et de $\deg(\omega)$, la relation de Riemann-Hurwitz. \square

Revêtements de la sphère de Riemann. Dans le cas particulier d'un revêtement ramifié :

$$\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

à d feuillets de la sphère de Riemann par une surface de Riemann compacte X avec un nombre total de branchement égal à b , la formule de Riemann-Hurwitz montre que le genre de X est nécessairement égal à :

$$g = \frac{b}{2} - d + 1.$$

Lorsqu'on a affaire à un revêtement double, *i.e.* lorsque $d = 2$, le genre de X est égal à :

$$g = \frac{b}{2} - 1.$$

Une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 qui admet un revêtement (ramifié) double sur \mathbb{P}^1 est dite *hyperelliptique*.

Voici un exemple très concret. Soit $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ la surface de Riemann de la racine carrée $\sqrt{P(z)}$ d'un polynôme :

$$P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_k)$$

de degré k qui possède k racines deux à deux distinctes a_1, \dots, a_k . Puisque l'ordre de branchement b doit être pair, on voit que le revêtement $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ admet le point $\infty \in \mathbb{P}^1$ comme point de branchement précisément lorsque k est impair, ce que nous avons déjà vu dans le chapitre sur les fonctions algébriques. Ainsi en général, le genre de X est-il égal à la partie entière :

$$g = \text{Ent}\left(\frac{k-1}{2}\right).$$

Pour une telle surface de Riemann hyperelliptique, on peut donner une base explicite :

$$\omega_1, \dots, \omega_g$$

de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur X , à savoir la base :

$$\omega_j := \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{P(z)}} \quad (j = 1 \dots g = \text{Ent}\left(\frac{k-1}{2}\right)),$$

où z est une notation naturelle pour la fonction méromorphe $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$; en effet, en utilisant des cartes locales au voisinage des points critiques de π , on vérifie — exercice recommandé — que les ω_j sont holomorphes sur X tout entier, et par ailleurs, il est clair qu'elles sont linéairement indépendantes.

Théorème d'annulation cohomologique. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et soit D un diviseur sur X . Alors dès que :

$$\deg D \geq 2g - 2 + 1,$$

on a annulation du premier groupe de cohomologie du faisceau \mathcal{O}_D :

$$0 = H^1(X, \mathcal{O}_D),$$

donc l'inégalité de Riemann(-Roch) se transforme en une égalité :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

DÉMONSTRATION. En effet, prenons une 1-forme méromorphe ω non nulle sur X et considérons son diviseur :

$$K := \operatorname{div}(\omega) \quad \text{de degré } \deg K = 2g - 2.$$

Rappelons que ω induit l'isomorphisme de faisceaux :

$$\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}.$$

Ainsi grâce à la dualité de Brill-Noether-Serre et à cet isomorphisme :

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* &\cong H^0(X, \Omega_{-D}) \\ &\cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}). \end{aligned}$$

Si donc $\deg D \geq 2g - 2 + 1$, on a immédiatement :

$$\deg(K - D) \leq -1,$$

ce qui implique que ce dernier espace $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$ s'annule, d'après ce qui a été vu avant le théorème de Riemann-Roch. \square

Corollaire. *Sur une surface de Riemann compacte X , le premier groupe de cohomologie du faisceau \mathcal{M}_X des fonctions méromorphes s'annule toujours :*

$$0 = H^1(X, \mathcal{M}_X).$$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $\xi \in H^1(X, \mathcal{M}_X)$ une classe de cohomologie qui est représentée, relativement à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X , par un cocycle :

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X)$$

de fonctions méromorphes. En raffinant si nécessaire le recouvrement \mathfrak{U} , on peut supposer sans perte de généralité que le nombre total des pôles de tous les f_{ij} est fini. Grâce à cela, il est aisé de produire un diviseur D de degré :

$$\deg D \geq 2g - 2 + 1$$

pour lequel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Mais grâce au théorème vu à l'instant, (f_{ij}) est cohomologue à zéro relativement au faisceau \mathcal{O}_D , et donc aussi, relativement au faisceau $\mathcal{M}_X \supset \mathcal{O}_D$. \square

Retour sur la définition du résidu intégral d'une classe de cohomologie $\xi \in H^1(X, \Omega_X)$.

Lemme. *Le faisceau $\mathcal{M}T_X^*$ des 1-formes méromorphes sur X est isomorphe au faisceau \mathcal{M}_X des fonctions méromorphes sur X , donc son premier groupe de cohomologie s'annule lui aussi :*

$$0 = H^1(X, \mathcal{M}T_X^*).$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a déjà plusieurs fois utilisé le fait qu'un isomorphisme $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}T_X^*$ est fourni par $f \mapsto f\omega$, où ω est une 1-forme méromorphe non nulle quelconque sur X . \square

Un tel isomorphisme peut être utilisé pour redonner une définition — sans recourir à des intégrales doubles — de l'application résidu intégral :

$$\text{Res}: H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui a été introduite au tout début de ce chapitre. En effet, supposons qu'une classe de cohomologie arbitraire :

$$\xi \in H^1(X, \Omega_X)$$

soit représentée par un cocycle de 1-formes holomorphes :

$$(\omega_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega_X)$$

relativement à un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X . Comme nous venons de voir que $H^1(X, \mathcal{M}T_X^*) = 0$ s'annule, ce cocycle se scinde dans le faisceau $\mathcal{M}T_X^*$, ce qui veut dire qu'il existe une distribution de Mittag-Leffler de 1-formes méromorphes :

$$(\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$$

dont la classe du cobord redonne ξ :

$$[\delta((\omega_i))] = \xi.$$

Alors puisque les différences $\omega_j - \omega_i = \omega_{ij} \in \Omega_X(U_i \cap U_j)$ sont holomorphes, le premier théorème de ce chapitre montre que :

$$\text{Res}(\xi) = \text{Res}((\omega_i)),$$

ce dernier résidu étant calculé au sens classique.

Engendrement par des sections globales. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann X , sans hypothèse de compacité.

Définition. On dit que le faisceau \mathcal{O}_D est engendré par ses sections globales si, en tout point $x \in X$, il existe une fonction méromorphe globale :

$$f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$$

telle que :

$$\mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_{X,x} f,$$

à savoir : tout germe de fonction méromorphe $\varphi_x \in \mathcal{O}_{D,x}$ avec $\text{ord}_x(\varphi_x) \geq -D(x)$ peut être écrit comme :

$$\varphi_x = \psi_x f_x,$$

avec un certain germe de fonction $\psi_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, où f_x désigne le germe en x de la fonction globale f .

Cette condition $\mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_{X,x} f_x$ équivaut en fait (exercice) à demander que :

$$\text{ord}_x(f) = -D(x).$$

Théorème. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et soit D un diviseur sur X de degré :

$$\text{deg } D \geq 2g.$$

Alors \mathcal{O}_D est engendré par ses sections globales.

DÉMONSTRATION. En effet, fixons un point $x \in X$ et introduisons le diviseur D' défini par :

$$D'(y) := \begin{cases} D(y) & \text{lorsque } y \neq x, \\ D(y) - 1 & \text{lorsque } y = x. \end{cases}$$

Puisque l'on a $\deg D > \deg D' > 2g - 2$, le théorème qui précède nous donne les deux annulations de cohomologie :

$$0 = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

Ensuite, le théorème de Riemann-Roch assure que les (in)égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) &= 1 - g + \deg D \\ &> \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = 1 - g + \deg D'. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une fonction méromorphe globale :

$$f \in H^0(X, \mathcal{O}_D) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

Clairement, cette fonction satisfait $\text{ord}_x(f) = -D(x)$. □

Plongement dans un espace projectif. On note \mathbb{P}^N l'espace projectif de dimension N qui est défini comme le quotient :

$$\mathbb{P}^N := (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

où \sim est la relation d'équivalence suivante :

$$(z_0, \dots, z_N) \sim (z'_0, \dots, z'_N) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : z_0 = \lambda z'_0, \dots, z_N = \lambda z'_N.$$

On notera $[z_0 : \dots : z_N]$ la classe d'équivalence de $(z_0, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$. Muni de la topologie quotient, \mathbb{P}^N est un espace topologique compact (exercice de révision).

Pour tout entier $j = 0, \dots, N$, on introduit maintenant l'ouvert :

$$U_j := \{ [z_0 : \dots : z_N] \in \mathbb{P}^N : z_j \neq 0 \}.$$

Visiblement, la famille des $N + 1$ ouverts U_0, \dots, U_N forme un recouvrement de \mathbb{P}^N . Ensuite, on introduit pour tout $j = 0, \dots, N$ l'application :

$$\varphi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

définie par :

$$\varphi_j(z_0, \dots, z_N) := \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_N}{z_j} \right).$$

On vérifie — exercice de révision — que φ_j est bien définie et envoie U_j homéomorphiquement sur \mathbb{C}^N .

À présent, soit X une surface de Riemann compacte et soit :

$$F : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

une application continue. Alors les $W_j := F^{-1}(U_j)$ sont des sous-ensembles ouverts de X , et on peut considérer les applications composées :

$$F_j := \varphi_j \circ F : W_j \longrightarrow \mathbb{C}^N.$$

Ainsi, chaque application F_j est un vecteur N -dimensionnel :

$$F_j = (F_{j1}, \dots, F_{jN})$$

de fonctions scalaires continues :

$$F_{j\nu}: W_j \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Définition. L'application $F: X \rightarrow \mathbb{P}^N$ est dite *holomorphe* si toutes les composantes $F_{j\nu}$, $\nu = 1, \dots, N$, de chacune des $F_j = \varphi_j \circ F$, $j = 0, \dots, N$, sont holomorphes. Elle est dite une *immersion holomorphe* si de plus, pour tout $x \in X$, il existe au moins une $F_{j\nu}$ de domaine $W_j \ni x$ contenant le point x en lequel sa différentielle $dF_{j\nu}(x) \neq 0$ ne s'annule pas. Enfin, $F: X \rightarrow \mathbb{P}^N$ est dite un *plongement holomorphe* si c'est une immersion injective⁵.

Des exemples d'applications holomorphes $F: X \rightarrow \mathbb{P}^N$ peuvent être construits de la manière suivante. Soient $f_0, \dots, f_N \in \mathcal{M}_X(X)$ des fonctions méromorphes qui ne s'annulent pas identiquement. On définit une application :

$$F := [f_0 : f_1 : \dots : f_N]: X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

comme suit. Pour $x \in X$, soit (V, z) un voisinage de coordonnée de x avec $z(x) = 0$ et soit :

$$k := \min_j \text{ord}_k(f_j).$$

Sur V , on peut écrire :

$$f_j = z^k g_j,$$

où g_j est holomorphe dans un voisinage de x et où, pour au moins un entier j , on a $g_j(x) \neq 0$. Posons alors :

$$F(x) := [g_0(x) : \dots : g_N(x)].$$

Bien entendu (exercice), cette définition est indépendante de la carte locale choisie. Lorsque $g_j(x) \neq 0$, on a $F(x) \in U_j$, d'où $x \in W_j$, et donc l'application :

$$F_j: W_j \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

définie plus haut s'exprime comme suit dans un voisinage de x :

$$F_j = \left(\frac{g_0}{g_j}, \dots, \frac{g_{j-1}}{g_j}, \frac{g_{j+1}}{g_j}, \dots, \frac{g_N}{g_j} \right),$$

ce qui montre que F est en fait une application holomorphe.

Théorème. Soit X une surface de Riemann compacte arbitraire de genre g quelconque. Pour tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$ de degré :

$$\deg D \geq 2g - 2 + 3,$$

et pour toute base $\{f_0, \dots, f_N\}$ de $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ de cardinal⁶ :

$$1 + N = 1 - g + \deg D,$$

l'application holomorphe associée :

$$F = [f_0 : \dots : f_N]: X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

fournit un plongement de X dans l'espace projectif complexe \mathbb{P}^N .

⁵ Ici, X est supposée compacte, mais quelle serait la définition appropriée de la notion de plongement sans hypothèse de compacité ?

⁶ A fortiori $\deg D \geq 2g - 2 + 1$, donc le théorème d'annulation de $0 = H^1(X, \mathcal{O}_D)$ s'applique.

Toujours sous l'hypothèse que $\deg D \geq 2g - 2 + 3$, on peut raffiner ce théorème et trouver — ce que nous ne ferons pas ici — quatre fonctions méromorphes globales :

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$$

qui fournissent un plongement :

$$[\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3]$$

dans l'espace projectif complexe de dimension 3.

DÉMONSTRATION. (a) Pour commencer, montrons que F est injective. Soient donc $x_1 \neq x_2$ deux points arbitraires de X . Soit D' le diviseur défini par :

$$D'(x) := \begin{cases} D(x) & \text{lorsque } x \neq x_2, \\ D(x) - 1 & \text{lorsque } x = x_2. \end{cases}$$

Comme son degré est minoré par :

$$\deg D' = \deg D - 1 \geq 2g,$$

un théorème qui précède nous assure que le faisceau $\mathcal{O}_{D'}$ est engendré par ses sections globales. En particulier, quand on se place au point x_1 , il existe une fonction méromorphe globale $f \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ telle que :

$$\text{ord}_{x_1}(f) = -D(x_1),$$

tandis que, par définition de D' , on a :

$$\text{ord}_{x_2}(f) \geq -D(x_2) + 1.$$

Bien entendu, f appartient aussi à l'espace $H^0(X, \mathcal{O}_D)$, et donc on peut décomposer f selon la base qui en est donnée :

$$f = \sum_{j=0}^N \lambda_j f_j,$$

avec certaines constantes $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Soient maintenant (V_1, z_1) et (V_2, z_2) deux voisinages de coordonnées de x_1 et de x_2 avec $z_1(x_1) = 0$ et $z_2(x_2) = 0$. Puisque le faisceau \mathcal{O}_D est engendré par ses sections globales, on doit avoir en termes de la base et aux deux points x_μ :

$$-D(x_\mu) = \min_{0 \leq j \leq N} \text{ord}_{x_\mu}(f_j) =: k_\mu \quad (\mu = 1, 2).$$

Si nous écrivons alors dans un voisinage de chaque x_μ les factorisations :

$$f = z_\mu^{k_\mu} g_\mu \quad \text{et} \quad f_j = z_\mu^{k_\mu} g_{\mu j} \quad (j = 0 \dots N),$$

il vient après suppression de $z_\mu^{k_\mu}$:

$$F(x_\mu) = [g_{\mu 0}(x_\mu) : \dots : g_{\mu N}(x_\mu)] \quad (\mu = 1, 2),$$

et aussi :

$$g_\mu(x_\mu) = \sum_{j=0}^N \lambda_j g_{\mu j}(x_\mu).$$

Mais grâce aux contrôles des ordres de f en x_1 et en x_2 préparés à l'avance plus haut, on voit aisément que :

$$g_1(x_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad g_2(x_2) = 0,$$

ce qui montre que $F(x_1) \neq F(x_2)$.

(b) Montrons maintenant que F est une immersion. Fixons un point $x_0 \in X$ et introduisons le diviseur D' défini par :

$$D'(x) := \begin{cases} D(x) & \text{lorsque } x \neq x_0, \\ D(x) - 1 & \text{lorsque } x = x_0. \end{cases}$$

Alors comme $\deg D' \geq 2g$, le faisceau $\mathcal{O}_{D'}$ est à nouveau globalement engendré, ce qui signifie, au point x_0 , qu'il existe une fonction méromorphe globale $f \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ satisfaisant :

$$\text{ord}_{x_0}(f) = -D(x_0) + 1.$$

Comme ci-dessus, décomposons f selon la base de $H^0(X, \mathcal{O}_D)$:

$$f = \sum_{j=0}^N \lambda_j f_j,$$

avec certaines constantes $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Ensuite, prenons un voisinage de coordonnée (V, z) de x_0 avec $z(x_0) = 0$ et factorisons :

$$f = z^k g \quad \text{et} \quad f_j = z^k g_j \quad (j=0 \dots N),$$

par la puissance minimale de z possible :

$$k := \min_{0 \leq j \leq N} \text{ord}_{x_0}(f_j) = -D(x_0).$$

Soit ν un indice tel que $g_\nu(x_0) \neq 0$. Après renumérotation éventuelle, on peut supposer que $\nu = 0$. L'application introduite juste avant le théorème :

$$F_0 = \varphi_0 \circ F: \quad W_0 \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

dans laquelle on divise par g_0 s'écrit :

$$F_0 = (F_{01}, \dots, F_{0N}) = \left(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_N}{g_0} \right),$$

ce qui nous permet de ré-écrire la relation de décomposition selon la base :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j F_{0j} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{g_j}{g_0} \right) = \frac{g}{g_0} - \lambda_0.$$

Par conséquent :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j dF_{0j} = d\left(\frac{g}{g_0} \right).$$

Mais puisque $g_0(x_0) \neq 0$ et puisque g possède un zéro qui n'est que du premier ordre en x_0 , on a :

$$d\left(\frac{g}{g_0} \right)(x_0) \neq 0.$$

Donc $dF_{0j}(x_0) \neq 0$ pour au moins un indice j . Ceci montre que F est une immersion et conclut la démonstration du théorème de plongement projectif des surfaces de Riemann compactes. \square

Exercices

Exercice 18.1. Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ la surface de Riemann de la fonction algébrique $\sqrt[n]{1-z^n}$, i.e. la fonction algébrique définie par le polynôme :

$$P(T) = T^n + z^n - 1 \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)[T],$$

où $z \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ est la fonction coordonnée canonique. Montrer que le genre de X est égal à :

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Exercice 18.2. Soit X une surface de Riemann compacte. Soit $\mathcal{Q}(X) \subset \mathcal{M}T_X^*(X)$ l'espace des 1-formes méromorphes sur X dont les résidus s'annulent en tout point de X . En utilisant l'Exercice 16.3, montre que :

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{Q}(X)/d(\mathcal{M}(X)).$$

Exercice 18.3. Soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe. Montrer que les classes de dz et de $\wp_\Gamma dz$ forment une base de $\mathcal{Q}(X) \bmod d(\mathcal{M}(X))$.

Exercice 18.4. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X de genre g . Montrer que :

- | | | |
|-----|---|--|
| (a) | $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$ | pour $\deg D \leq -1$; |
| (b) | $0 \leq \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \leq 1 + \deg D$ | pour $-1 \leq \deg D \leq g - 1$; |
| (c) | $1 - g + \deg D \leq \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \leq g$ | pour $g - 1 \leq \deg D \leq 2g - 1$; |
| (d) | $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D$ | pour $\deg D \geq 2g - 1$. |

Exercice 18.5. Soit $K = \operatorname{div}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X) \setminus \{0\}$, un diviseur canonique sur une surface de Riemann compacte X de genre $g \geq 1$, et soit $D \geq K$ un diviseur avec $\deg D = \deg K + 1$. Montrer que le faisceau \mathcal{O}_K est engendré par ses sections globales, mais que \mathcal{O}_D ne l'est pas.

Exercice 18.6. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau et soit \wp la fonction \wp de Weierstrass qui lui est associée. Interpréter \wp et sa dérivée \wp' comme des fonctions méromorphes sur \mathbb{C}/Γ Montrer que :

$$[1: \wp: \wp'] : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

est un plongement.

Exercice 18.7. Soit X une surface de Riemann compacte de genre 2. Soit $\{\omega_1, \omega_2\}$ une base de $H^0(X, \Omega_X)$. On définit $f \in \mathcal{M}(X)$ par $\omega_1 = f\omega_2$. Montrer que $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement holomorphe ramifié à deux feuilletés.

19. Fonctions et formes différentielles à parties principales prescrites

Le théorème classique de Mittag-Leffler dans le plan complexe stipule qu'il existe toujours des fonctions méromorphes dont les parties principales :

$$\lambda_1 \frac{1}{z - a_k} + \lambda_2 \frac{1}{(z - a_k)^2} + \cdots + \lambda_{\nu_k} \frac{1}{(z - a_k)^{\nu_k}}$$

sont prescrites en un ensemble discret quelconque de points $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. Sur une surface de Riemann compacte, excepté sur \mathbb{P}^1 , cela n'est pas toujours vrai, mais grâce à la dualité de Brill-Noether-Serre, on peut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que cela soit satisfait.

Distributions de Mittag-Leffler de fonctions méromorphes. Soit X une surface de Riemann et soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X .

Définition. Une cochaîne :

$$(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X)$$

est appelée une *distribution de Mittag-Leffler de fonctions méromorphes* si les différences par paires :

$$f_j - f_i \in \mathcal{O}_X(U_j \cap U_i)$$

sont *holomorphes* sur les intersections d'ouverts.

Autrement dit, les fonctions f_i et f_j ont mêmes parties principales — mêmes pôles a et mêmes coefficients complexes des puissances de $\frac{1}{z-a}$ — sur leur domaine commun de définition.

Définition. Une *solution* du problème de Mittag-Leffler est une fonction méromorphe globale :

$$f \in \mathcal{M}_X(X)$$

ayant les mêmes parties principales que (f_i) , à savoir les différences :

$$f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}_X(U_i),$$

deviennent *holomorphes* pour tout $i \in I$.

Notons alors :

$$[\delta((f_i))] = [(f_j - f_i)] \in H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

la classe de cohomologie que ce cocycle *holomorphe* représente.

Théorème. Sur une surface de Riemann X arbitraire, compacte ou non compacte, munie d'un recouvrement ouvert quelconque $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, une distribution de Mittag-Leffler de fonctions méromorphes :

$$(f_i), \quad f_i \in \mathcal{M}_X(U_i),$$

possède une solution méromorphe globale :

$$f \in \mathcal{M}_X(X)$$

rendant holomorphes toutes les différences :

$$f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}_X(U_i) \quad (i \in I),$$

si et seulement si la classe de cohomologie de son cobord :

$$\delta((f_i)) = (f_j - f_i) = 0$$

s'annule dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Historiquement parlant, ce sont les problèmes de Mittag-Leffler (additif) et de Cousin (multiplicatif) qui ont été moteurs de l'invention de la cohomologie. La démonstration qui suit est essentiellement élémentaire avec tous les outils introduits jusqu'à présent, mais il importe de bien en (re)méditer les principes.

DÉMONSTRATION. (a) S'il existe une fonction méromorphe globale $f \in \mathcal{M}_X(X)$ rendant holomorphes toutes les différences $f|_{U_i} - f_i$, corrigeons naturellement notre cochaîne méromorphe (f_i) :

$$g_i := f_i - f \in \mathcal{O}_X(U_i),$$

en une cochaîne holomorphe sans modifier son cobord :

$$\delta((g_i)) = \underbrace{(g_j - g_i)}_{\text{holomorphe}} = (f_j - \underline{f}_o - f_i + \underline{f}_o) = (f_j - f_i),$$

ce qui montre que le cocycle $\delta((f_i)) = (f_j - f_i)$ est contenu dans $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, donc s'annule en cohomologie.

(b) Réciproquement, supposons l'annulation du cocycle $[\delta((f_i))] = 0$ dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. D'après les éléments généraux de la cohomologie de Čech, indépendamment du choix du recouvrement ouvert, cela signifie exactement que notre cocycle est le cobord :

$$\delta((f_i)) = (f_j - f_i) = (g_j - g_i) = \delta((g_i))$$

d'une certaine cochaîne holomorphe :

$$(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X).$$

Mais alors on déduit immédiatement que :

$$f_i - g_i = f_j - g_j$$

sur chaque intersection d'ouverts $U_i \cap U_j$, donc les $f_i - g_i$ se recollent pour fournir une fonction méromorphe globale $f \in \mathcal{M}_X(X)$. Or puisqu'il est clair que :

$$f|_{U_i} - f_i = \underline{f}_{i_o} - g_i - \underline{f}_{i_o} = -g_i \in \mathcal{O}_X(U_i),$$

cette fonction f résout bien le problème de Mittag-Leffler. □

Le cas compact. Pour toute surface de Riemann compacte X , on a démontré dans le chapitre qui précède que $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$. Ceci implique qu'étant donné une classe de cohomologie quelconque $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$, il existe toujours une distribution de Mittag-Leffler de fonctions méromorphes $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X)$ telle que $\xi = [\delta(\mu)]$, dans un recouvrement ouvert approprié. Par conséquent, excepté sur la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 sur laquelle

$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \text{genre}(\mathbb{P}^1) = 0$, sur toutes les autres surfaces de Riemann qui sont de genre ≥ 1 , il y a des problèmes de Mittag-Leffler qui sont sans solution.

Maintenant, supposons que X est une surface de Riemann compacte quelconque et soit $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X)$ une distribution arbitraire de Mittag-Leffler de fonctions méromorphes sur des ouverts de X . Alors pour toute 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega_X(X)$, le produit :

$$\mu \omega \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X^*)$$

fournit une distribution de Mittag-Leffler de 1-formes méromorphes, dont on peut calculer le résidu en appliquant l'une des deux définitions du chapitre qui précède.

Théorème. *Pour qu'une distribution de Mittag-Leffler :*

$$\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_X)$$

de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte X admette une solution méromorphe globale sur X , il faut et il suffit que l'on ait l'annulation de :

$$\text{Res}(\mu \omega) = 0,$$

pour toute 1-forme holomorphe globale $\omega \in \Omega_X(X)$.

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème qui précède, une solution existe si et seulement si $[\delta(\mu)] = 0$. Bien entendu, $[\delta(\mu)] \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$ s'annule si et seulement si l'on a :

$$\lambda([\delta(\mu)]) = 0,$$

pour toute forme linéaire $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_X)^*$. Grâce au théorème de dualité de Brill-Noether-Serre qui représente toute telle forme linéaire sous la forme d'un résidu-produit, tel est le cas si et seulement si l'on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [\delta(\mu)], \omega \rangle \\ &= \text{Res}([\delta(\mu)] \omega) \\ &= \text{Res}(\mu \omega), \end{aligned}$$

pour toute 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega_X(X)$, ce qui conclut. \square

Notons que si $\omega_1, \dots, \omega_g$ est une base de $\Omega_X(X)$, la condition $\text{Res}(\mu \omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega_X(X)$ revient aux g conditions :

$$0 = \text{Res}(\mu \omega_k) \quad (k=1 \dots g).$$

Ainsi, μ possède une solution si et seulement si $g = \text{genre}(X)$ équations linéaires sont satisfaites.

De plus, si $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_X(X)$ sont deux solutions, alors $f_1 - f_2$ sont holomorphes sur X compacte, donc constantes. Autrement dit, les solutions au problème de Mittag-Leffler sont uniques à une constante additive près.

Application aux fonctions doublement périodiques. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} et soit :

$$P := \{t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2 : 0 \leq t_1 < 1, 0 \leq t_2 < 1\}.$$

Supposons qu'en des points $a_1, \dots, a_n \in P$, des parties principales soient prescrites :

$$\sum_{\nu=-r_j}^{-1} c_\nu^{(j)} (z - a_j)^\nu,$$

pour $j = 1, \dots, n$.

Proposition. *Il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ doublement périodique par rapport au réseau $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ et possédant des pôles ayant exactement ces parties principales prescrites si et seulement si :*

$$0 = \sum_{j=1}^n c_{-1}^{(j)}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, toute fonction méromorphe doublement périodique par rapport au réseau Γ peut être considérée comme une fonction méromorphe sur le tore \mathbb{C}/Γ . Les parties principales prescrites donnent naissance (exercice mental) à une distribution de Mittag-Leffler μ sur X . La forme différentielle ω sur X induite par la 1-forme dz sur \mathbb{C} fournit une base de $\Omega_X(X)$, puisque $\dim \Omega_X(X) = 1$. Maintenant :

$$\text{Res}(\mu\omega) = \sum_{j=1}^n c_{-1}^{(j)},$$

donc le résultat découle du théorème qui précède. □

En particulier, ceci implique qu'il n'existe pas de fonction méromorphe doublement périodique ayant précisément un seul pôle d'ordre 1 dans tout parallélogramme de périodes, fait déjà connu.

Dans ce qui va suivre, le but est de déterminer s'il existe, sur une surface de Riemann compacte X de genre $g \geq 2$, des fonctions méromorphes qui ont exactement un pôle d'ordre $\leq g$ en un point, et qui sont holomorphes ailleurs. À cette fin, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Le déterminant wronskien. Soient f_1, \dots, f_g des fonctions holomorphes sur un domaine $U \subset \mathbb{C}$.

Définition. Le déterminant wronskien de f_1, \dots, f_g , est le déterminant de la matrice des dérivées $f_k^{(m)}$, $0 \leq m \leq g-1$, $1 \leq k \leq g$, à savoir :

$$W(f_1, \dots, f_g) := \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_g \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_g' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)} \end{pmatrix}.$$

Lemme. *Si les fonctions f_1, \dots, f_g sont linéairement indépendantes sur \mathbb{C} , alors leur déterminant wronskien n'est pas identiquement nul en tant que fonction de la variable complexe z dans le domaine $U \in \mathbb{C}$.*

(La réciproque est immédiatement vraie.)

DÉMONSTRATION. En raisonnant par récurrence sur l'entier g , supposons que nous ayons déjà établi que :

$$W(f_1, \dots, f_{g-1}) \neq 0.$$

Considérons alors l'équation différentielle ordinaire de degré $g - 1$:

$$W(f_1, \dots, f_{g-1}, w) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{g-1} & w \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_{g-1}' & w' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_{g-1}^{(g-1)} & w^{(g-1)} \end{pmatrix} \\ = 0,$$

satisfaite par une fonction holomorphe inconnue $w = w(z)$, $z \in U$. En développant ce déterminant par cofacteurs le long de sa dernière colonne, on obtient :

$$a_0 w^{(g-1)} + a_1 w^{(g-2)} + \cdots + a_{g-1} w = 0,$$

où le premier coefficient est le wronskien :

$$a_0 = W(f_1, \dots, f_{g-1}).$$

Il est clair que f_1, \dots, f_{g-1} sont solutions de cette équation différentielle. Si donc on suppose par l'absurde que $W(f_1, \dots, f_{g-1}, f_g) \equiv 0$ s'annule identiquement, alors $w := f_g$ est une autre solution de cette équation différentielle. Mais puisqu'elle est linéaire, l'espace de ses solutions est un espace vectoriel de dimension $g - 1$ (théorème supposé connu dans ce cours), donc f_g s'exprime nécessairement comme combinaison linéaire des $g - 1$ solutions indépendants f_1, \dots, f_{g-1} , ce qui contredit l'hypothèse. \square

Maintenant, supposons que X est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, et soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de $\Omega_X(X)$. Pour toute coordonnée holomorphe locale (U, z) sur X , on peut définir une fonction holomorphe $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)$ sur U comme suit. Les 1-formes ω_k peuvent être écrites $\omega_k = f_k dz$ sur U , et on pose :

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) := W(f_1, \dots, f_g),$$

où les dérivées sont prises par rapport à z .

Théorème. Soient (U, z) et (\tilde{U}, \tilde{z}) deux coordonnées holomorphes locales sur X . Alors sur $U \cap \tilde{U}$, la relation entre les deux déterminants wronskiens relatifs à ces deux coordonnées est :

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) = \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right)^{\frac{g(g+1)}{2}} W_{\tilde{z}}(\omega_1, \dots, \omega_g).$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, la fonction holomorphe :

$$\psi := \frac{d\tilde{z}}{dz} \in \mathcal{O}_X^*(U \cap \tilde{U})$$

ne s'annule en aucun point. Définissons les deux fonctions holomorphes f_k et \tilde{f}_k sur $U \cap \tilde{U}$ par :

$$\omega_k = f_k dz = \tilde{f}_k d\tilde{z}.$$

Alors on a :

$$f_k = \psi \tilde{f}_k.$$

Par récurrence sur un entier m , on se convainc aisément (exercice) que :

$$\frac{d^m f_k}{dz^m} = \psi^{m+1} \frac{d^m \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^m} + \sum_{\mu=0}^{m-1} \varphi_{m\mu} \frac{d^\mu \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^\mu},$$

avec des fonctions $\varphi_{m\mu}$ holomorphes sur $U \cap \tilde{U}$ qui ne dépendent pas de k . On en tire par combinaisons linéaires entre les lignes des déterminants (exercice) que l'on a :

$$\det \left(\frac{d^m f_k}{dz^m} \right)_{m=0, \dots, g-1}^{k=1, \dots, g} = \det \left(\psi^{m+1} \frac{d^m \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^m} \right)_{m=0, \dots, g-1}^{k=1, \dots, g}.$$

Puisque $1 + 2 + \dots + g = \frac{g(g+1)}{2}$, le résultat est démontré. □

Si $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_g$ est une autre base de $\Omega_X(X)$, il existe des constantes $c_{jk} \in \mathbb{C}$ avec $\det(c_{jk}) =: c \neq 0$, telles que :

$$\omega_j = \sum_{k=1}^g c_{jk} \tilde{\omega}_k \quad (j=1 \dots g),$$

d'où l'on déduit que :

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) = c W_z(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_g).$$

Par conséquent, la définition énoncée ci-dessous ne dépend ni du choix d'une coordonnée holomorphe locale, ni du choix d'une base pour $\Omega_X(X)$.

Définition. Sur une surface de Riemann compacte X de genre $g \geq 1$, un point $p \in X$ est dit un *point de Weierstrass* si, pour une (et donc toute) base :

$$\omega_1, \dots, \omega_g \in \Omega_X(X),$$

et si pour une (donc toute) coordonnée holomorphe locale (U, z) en p , le déterminant wronskien s'annule en p :

$$0 = W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)(p).$$

L'ordre de ce zéro est alors appelé le *poids* du point de Weierstrass.

Bien entendu, la seule surface de Riemann de genre 0, à savoir \mathbb{P}^1 , n'a pas de point de Weierstrass.

Théorème. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et soit p un point de X . Alors il existe une fonction méromorphe non constante $f \in \mathcal{M}_X(X)$ qui possède un pôle d'ordre $\leq g$ en p et qui est holomorphe sur $X \setminus \{p\}$ si et seulement si p est un point de Weierstrass.

DÉMONSTRATION. Nous allons appliquer le critère $0 = \text{Res}(\mu\omega)$ énoncé au début de ce chapitre. Soient $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de $\Omega_X(X)$ et soit (U, z) un voisinage de coordonnée de p avec $z(p) = 0$. Les formes ω_k peuvent être développées en séries entières :

$$\omega_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k\nu} z^\nu dz \quad (k=1 \dots g)$$

au voisinage de $z(p) = 0$. La fonction f recherchée a comme partie principale en p :

$$h := \sum_{\nu=0}^{g-1} \frac{c_\nu}{z^{1+\nu}},$$

où les constantes c_0, \dots, c_{g-1} ne sont pas toutes nulles. En introduisant le recouvrement de X à deux ouverts :

$$\mathfrak{U} := (U, X \setminus \{p\}),$$

on produit donc une distribution de Mittag-Leffler :

$$\mu := (h, 0) \in C^0(\mathfrak{L}, \mathcal{M}_X).$$

Le critère mentionné nous assure alors l'existence d'une fonction méromorphe globale réalisant cette distribution si et seulement si :

$$0 = \text{Res}(\mu \omega_k) = \text{Res}_p(h \omega_k) = \sum_{\nu=0}^{g-1} a_{k\nu} c_\nu,$$

pour tout $k = 1, \dots, g$. Mais alors les équations $0 = \text{Res}(h \omega_k)$ ont une solution non triviale (c_0, \dots, c_{g-1}) si et seulement si l'on a :

$$\det(a_{k\nu}) = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)(p) = 0,$$

fin de la démonstration. □

Théorème. *Sur une surface de Riemann compacte X de genre g , le nombre de points de Weierstrass, comptés en tenant compte de leurs poids, est exactement égal à l'entier :*

$$(g-1)g(g+1).$$

DÉMONSTRATION. Soient (U_i, z_i) , $i \in I$, un recouvrement de X par des ouverts de coordonnées. Sur $U_i \cap U_j$, les fonctions :

$$\psi_{ij} := \frac{dz_j}{dz_i}$$

sont holomorphes sans zéro. Relativement à une base fixée $\omega_1, \dots, \omega_g$ de $\Omega_X(X)$, soient les wronskiens :

$$W_i := W_{z_i}(\omega_1, \dots, \omega_g) \in \mathcal{O}_X(U_i).$$

D'après un théorème qui précède, on sait que :

$$W_i = \psi_{ji}^{\frac{g(g+1)}{2}} W_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

La fonction qui à $x \in U_i$ associe :

$$D(x) := \text{ord}_x(W_i)$$

définit un diviseur D sur X dont le support est constitué des points de Weierstrass, affectés de leurs poids. Ainsi, $\deg D$ est le nombre à calculer.

Soit D_1 le diviseur de ω_1 . On sait, d'après un des théorèmes du chapitre sur la dualité de Brill-Noether-Serre, que $\deg D_1 = 2g - 2$. Si nous posons $\omega_1 = f_{1i} dz_i$ sur U_i , clairement, $D_1(x) = \text{ord}_x(f_{1i})$ pour tout $x \in U_i$. De plus :

$$f_{1i} = \psi_{ij} f_{1j} \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

Donc grâce à ces deux relations, on obtient :

$$W_i f_{1i}^{-\frac{g(g+1)}{2}} = W_j f_{1j}^{-\frac{g(g+1)}{2}} \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

Par recollement, il existe une fonction méromorphe globale $f \in \mathcal{M}_X(X)$ avec $f|_{U_i} = W_i f_{1i}^{-\frac{g(g+1)}{2}}$. Le diviseur de f est alors égal à :

$$\text{div}(f) = D - \frac{g(g+1)}{2} D_1.$$

Or puisque $\deg(f) = 0$, il en découle que :

$$\deg D = \frac{g(g+1)}{2} \deg D_1 = \frac{g(g+1)}{2} (2g - 2) = (g - 1) g (g + 1),$$

ce qui conclut. □

Corollaire. *Toute surface de Riemann compacte X de genre $g \geq 2$ admet un revêtement holomorphe $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ ayant au plus g feuilletts. En particulier, toute surface de Riemann compacte de genre 2 est hyperelliptique.*

DÉMONSTRATION. Exercice. □

Formes différentielles à parties principales prescrites. Soit X une surface de Riemann (pas forcément compacte), soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit :

$$\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$$

une distribution de Mittag-Leffler de 1-formes méromorphes sur X .

Définition. Une *solution* de μ est une 1-forme méromorphe globale :

$$\omega \in \mathcal{M}T_X^*(X)$$

qui possède les mêmes parties principales que μ , à savoir :

$$\omega|_{U_i} - \omega_i \in \Omega_X(U_i), \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Théorème. *Une distribution $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$ admet une solution si et seulement si la classe de cohomologie $[\delta\mu] \in H^1(X, \Omega_X)$ s'annule.*

DÉMONSTRATION. Exercice de compréhension laissé au lecteur assidu à qui l'on demande d'être un étudiant très consciencieux. □

Théorème. *Sur une surface de Riemann compacte X , une distribution de Mittag-Leffler :*

$$\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}T_X^*)$$

de 1-formes différentielles méromorphes admet une solution si et seulement si :

$$\text{Res}(\mu) = 0.$$

DÉMONSTRATION. On sait que le résidu intégral coïncide avec le résidu classique :

$$\text{Res}([\delta\mu]) = \text{Res}(\mu).$$

On a démontré dans le chapitre qui précède que l'application :

$$\text{Res}: H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un isomorphisme. Donc la condition $[\delta\mu] = 0$ équivaut à $\text{Res}(\mu) = 0$, ce qui fournit le résultat. □

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann compacte.*

(a) *Pour tout point $p \in X$ et pour tout nombre entier $n \geq 2$, il existe une 1-forme méromorphe sur X qui a un pôle d'ordre n en p et qui est holomorphe ailleurs, une « forme différentielle élémentaire de deuxième espèce ».*

(b) *Pour toute paire de points distincts $p_1, p_2 \in X$, il existe une forme différentielle méromorphe sur X qui a des pôles d'ordre 1 en p_1 et en p_2 avec des résidus égaux à $+1$ et*

à -1 , respectivement, et qui est holomorphe ailleurs, une « forme différentielle élémentaire de troisième espèce ». \square

Exercices

Exercice 19.1. Soit $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, avec $r > 0$, et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $f(0) \neq 0$.

(a) On définit $f_j(z) := z^{j-1} f(z)$ pour $j = 1, \dots, g$. Montrer que le déterminant wronskien $W(f_1, \dots, f_g)$ ne s'annule pas à l'origine.

(b) On définit $\varphi_j(z) := z^{2j-2} f(z)$ pour $j = 1, \dots, g$. Montrer que le déterminant wronskien $W(\varphi_1, \dots, \varphi_g)$ a un zéro d'ordre $\frac{g(g-1)}{2}$ à l'origine.

Exercice 19.2. Soit $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une surface de Riemann hyperelliptique de genre $g \geq 2$.

(a) Montrer que les points de ramification $p_1, \dots, p_{2g+2} \in X$ de π sont des points de Weierstrass de X .

(b) Montrer qu'il n'existe pas d'autres points de Weierstrass et que tout point de Weierstrass a un poids égal à $\frac{g(g-1)}{2}$ (utiliser l'Exercice précédent).

Exercice 19.3. Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de $\Omega_X(X)$. Soit $D \geq 0$ un diviseur positif sur X . On note M_D l'ensemble de toutes les distributions de Mittag-Leffler $\mu \geq -D$ sur X , i.e. l'ensemble de toutes les distributions de Mittag-Leffler appartenant à $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ pour un certain recouvrement \mathfrak{U} de X . On définit une application linéaire :

$$R: M_D \longrightarrow \mathbb{C}^g$$

par :

$$R(\mu) := \left(\text{Res}(\mu \omega_1), \dots, \text{Res}(\mu \omega_g) \right).$$

Montrer que l'on a :

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = g - \dim R(M_D).$$

20. Formes différentielles harmoniques

Avec l'aide des résultats obtenus jusqu'à ce point, il est maintenant aisé de dériver des résultats au sujet des formes différentielles harmoniques sur des surfaces de Riemann compactes X . En particulier, toute forme différentielle fermée sur X peut être écrite de manière unique comme la somme d'une forme harmonique et d'une forme exacte. Ceci implique que le 1^{er} groupe de cohomologie de de Rham de X est isomorphe à l'espace vectoriel des formes harmoniques sur X . En utilisant cela, on peut établir que le genre est un invariant topologique.

Conjugaison complexe. Pour toute 1-forme $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ sur une surface de Riemann X , la conjugaison complexe induit une 1-forme différentielle conjuguée :

$$\bar{\omega} \in \Gamma(X, T_X^*),$$

puisque localement, on peut écrire $\omega = \sum_j f_j dg_j$, où les fonctions f_j et g_j sont \mathcal{C}^∞ , et il est naturel de poser :

$$\bar{\omega} := \sum_j \bar{f}_j d\bar{g}_j.$$

Définition. Une 1-forme $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ est dite *réelle* si $\omega = \bar{\omega}$. En général, la partie réelle d'une 1-forme est définie par :

$$\operatorname{Re} \omega := \frac{1}{2} (\omega + \bar{\omega}).$$

Clairement, ω est réelle lorsque $\omega = \operatorname{Re} \omega$.

Si c est une courbe \mathcal{C}^1 ou rectifiable¹ sur X , on a :

$$\overline{\int_c \omega} = \int_c \bar{\omega} \quad \text{et donc :} \quad \operatorname{Re} \int_c \omega = \int_c \operatorname{Re} \omega.$$

Définition. Si $\omega \in \Omega_X(X)$ est une 1-forme holomorphe, sa conjuguée $\bar{\omega}$ est dite *antiholomorphe*. L'espace des 1-formes antiholomorphes sur X sera noté $\bar{\Omega}_X(X)$.

L'opérateur * de Hodge. Toute 1-forme lisse $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ peut être décomposée de manière unique comme :

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{où : } \omega_1 \in \Gamma(X, T_X^{*(1,0)}) \quad \text{et où : } \omega_2 \in \Gamma(X, T_X^{*(0,1)}).$$

Définition. On pose :

$$\boxed{* \omega := i (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}.$$

Alors l'application :

$$* : \Gamma(X, T_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, T_X^*)$$

¹ Rappelons que nous avons pu définir $\int_c \omega$ pour toute courbe *fermée* qui n'est que continue (\mathcal{C}^0), et dans ce cas, les relations écrites restent aussi valables.

est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire qui envoie $\Gamma(X, T_X^{*(1,0)})$ sur $\Gamma(X, T_X^{*(0,1)})$ et vice versa.

Lemme élémentaire. Pour $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$, pour $\omega_1 \in \Gamma(X, T_X^{*(1,0)})$, pour $\omega_2 \in \Gamma(X, T_X^{*(0,1)})$ et pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, on a les relations suivantes :

- (a) $**\omega = -\omega$,
- (b) $\overline{*\omega} = *\bar{\omega}$,
- (c) $d(*(\omega_1 + \omega_2)) = i\partial\bar{\omega}_1 - i\bar{\partial}\omega_2$,
- (d) $*\partial f = i\bar{\partial}(\bar{f})$,
- (e) $*\bar{\partial} f = -i\partial\bar{f}$,
- (f) $d(*df) = 2i\partial\bar{\partial}(\bar{f})$. □

Définition (Formes différentielles harmoniques). Une 1-forme $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ sur une surface de Riemann est dite *harmonique* si :

$$0 = d\omega = d(*\omega).$$

Théorème. Soit $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) ω est harmonique ;
- (ii) $\partial\omega = \bar{\partial}\bar{\omega} = 0$;
- (iii) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, où $\omega_1 \in \Omega_X(X)$ et où $\omega_2 \in \bar{\Omega}_X(X)$;
- (iv) étant donné un point arbitraire $a \in X$, il existe un voisinage U de a et une fonction harmonique f sur U tels que $\omega = df$.

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre (i), (ii), (iii) est laissée au lecteur.

(i) \Rightarrow (iv). Sachant qu'une forme différentielle harmonique est en particulier fermée, on a localement $\omega = df$, où f est une fonction \mathcal{C}^∞ . Puisque $0 = d(*\omega) = d(*df) = 2i\partial\bar{\partial}f$, la fonction f est harmonique.

(i) \Rightarrow (iv). Si $\omega = df$ avec f harmonique, alors $d\omega = ddf = 0$ et aussi $d(*\omega) = d(*df) = 0$. □

Notation. L'espace vectoriel des 1-formes harmoniques sur la surface de Riemann X sera noté $\text{Harm}^1(X)$. Ainsi :

$$\text{Harm}^1(X) = \Omega_X(X) \oplus \bar{\Omega}_X(X).$$

Donc si X est une surface de Riemann compacte de genre g , on a :

$$\dim \text{Harm}^1(X) = 2g.$$

Théorème. Toute 1-forme harmonique réelle $\sigma \in \text{Harm}^1(X)$ est la partie réelle d'une, et d'une seule 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega_X(X)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma = \omega_1 + \bar{\omega}_2$ avec $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_X(X)$. Puisque :

$$\sigma = \omega_1 + \omega_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \bar{\sigma},$$

on déduit $\omega_1 = \omega_2$, donc $\sigma = \text{Re}(2\omega_1)$.

Pour l'unicité, supposons que $\omega \in \Omega_X(X)$ et que $\text{Re}\omega = 0$. Puisque $\omega = df$ localement, où f est une fonction holomorphe, f a une partie réelle constante. Donc f elle-même est constante, d'où $\omega = 0$. □

Produits scalaires dans $\Gamma(X, T_X^*)$. On suppose dorénavant que X est une surface de Riemann compacte. Pour $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(X, T_X^*)$, on pose :

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle := \iint_X \omega_1 \wedge * \omega_2.$$

Visiblement, l'application $(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ est linéaire par rapport au premier argument, et anti-linéaire par rapport au second. De plus :

$$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle = \overline{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}.$$

Lemme. *Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.*

DÉMONSTRATION. En effet, soit $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$. Dans une carte locale (U, z) , avec $z = x + iy$, on écrit :

$$\omega = f dz + g d\bar{z}.$$

Alors :

$$* \omega = i(\bar{f} d\bar{z} - \bar{g} dz),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \omega \wedge * \omega &= i(|f|^2 + |g|^2) dz \wedge d\bar{z} \\ &= 2(|f|^2 + |g|^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ et que $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ si et seulement si $\omega = 0$. □

Ainsi avec ce produit scalaire, $\Gamma(X, T_X^*)$ est un espace hermitien unitaire, mais ce n'est pas un espace de Hilbert, car il n'est pas complet.

Lemme. *Soit X une surface de Riemann compacte.*

- (a) $\partial \mathcal{C}^\infty(X)$, $\bar{\partial} \mathcal{C}^\infty(X)$, $\Omega_X(X)$ et $\bar{\Omega}_X(X)$ sont quatre sous-espaces vectoriels de $\Gamma(X, T_X^*)$ qui sont orthogonaux deux à deux ;
- (b) $d \mathcal{C}^\infty(X)$ et $*d \mathcal{C}^\infty(X)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\Gamma(X, T_X^*)$ et l'on a :

$$d \mathcal{C}^\infty(X) \oplus *d \mathcal{C}^\infty(X) = \partial \mathcal{C}^\infty(X) \oplus \bar{\partial} \mathcal{C}^\infty(X).$$

DÉMONSTRATION. (a) Puisque $\Gamma(X, T_X^{*(1,0)})$ et $\Gamma(X, T_X^{*(0,1)})$ sont orthogonaux (exercice), il suffit de démontrer les deux relations suivantes d'orthogonalité :

$$\partial \mathcal{C}^\infty(X) \perp \Omega_X(X) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} \mathcal{C}^\infty(X) \perp \bar{\Omega}_X(X).$$

Soient donc $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ et $\omega \in \Omega_X(X)$. Alors :

$$\omega \wedge * \partial f = i \omega \wedge \bar{\partial} \bar{f} = i \omega \wedge d \bar{f} = -i d(\bar{f} \omega).$$

Ainsi :

$$\langle \omega, \partial f \rangle = -i \iint_X d(\bar{f} \omega) = 0,$$

grâce au théorème de Stokes. De manière similaire, on démontre que :

$$\langle \bar{\omega}, \bar{\partial} f \rangle = 0.$$

(a) Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Alors :

$$df \wedge *(dg) = -df \wedge dg = -d(f dg).$$

Ainsi :

$$\langle df, *dg \rangle = - \iint_X d(fdg) = 0.$$

L'égalité :

$$d\mathcal{C}^\infty(X) \oplus *d\mathcal{C}^\infty(X) = \partial\mathcal{C}^\infty(X) \oplus \bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X)$$

découle alors du lemme élémentaire. \square

Corollaire. *Sur une surface de Riemann compacte X , toute forme différentielle exacte $\sigma \in \text{Harm}^1(X)$ s'annule et toute fonction harmonique $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ est constante.*

DÉMONSTRATION. Ceci découle du fait que $d\mathcal{C}^\infty(X)$ est orthogonal à $\text{Harm}^1(X) = \Omega_X(X) \oplus \bar{\Omega}_X(X)$. \square

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann compacte et soient $\sigma \in \text{Harm}^1(X)$, resp. $\omega \in \Omega_X(X)$. Si, pour toute courbe fermée γ dans X , on a :*

$$\int_\gamma \sigma = 0, \quad \text{resp. } \text{Re} \int_\gamma \omega = 0,$$

alors $\sigma = 0$, resp. $\omega = 0$.

DÉMONSTRATION. Puisque σ , resp. $\text{Re} \omega$, est alors exacte grâce à un théorème vu dans un des chapitres qui précèdent, le résultat découle du corollaire vu à l'instant. \square

Théorème. *Sur toute surface de Riemann compacte X , il existe une décomposition orthogonale :*

$$\Gamma(X, T_X^{*(0,1)}) = \bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \perp \bar{\Omega}_X(X).$$

DÉMONSTRATION. Soit g le genre de X . Puisque :

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(X, T_X^{*(0,1)}) / \bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X)$$

d'après le théorème de Dolbeault, on voit que :

$$\dim \Gamma(X, T_X^{*(0,1)}) / \bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) = g.$$

D'un autre côté, on a $\dim \bar{\Omega}_X = g$. Le résultat découle donc du lemme d'orthogonalité qui précède. \square

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann compacte et soit $\sigma \in \Gamma(X, T_X^{*(0,1)})$. L'équation $\bar{\partial}f = \sigma$ possède une solution $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ si et seulement si :*

$$\iint_X \sigma \wedge \omega = 0,$$

pour toute $\omega \in \Omega_X(X)$.

DÉMONSTRATION. En effet, cette condition est équivalente à l'orthogonalité $\sigma \perp \bar{\Omega}_X(X)$. \square

Théorème. *Sur toute surface de Riemann compacte X , il y a une décomposition orthogonale :*

$$\Gamma(X, T_X^*) = *d\mathcal{C}^\infty(X) \perp d\mathcal{C}^\infty(X) \perp \text{Harm}^1(X).$$

DÉMONSTRATION. En conjuguant la relation de somme directe orthogonale obtenue dans le théorème qui précède, on obtient :

$$\Gamma(X, T_X^{*(1,0)}) = \partial\mathcal{C}^\infty(X) \oplus^\perp \Omega_X(X).$$

Ainsi :

$$\Gamma(X, T_X^*) = \partial\mathcal{C}^\infty(X) \oplus \bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \oplus \Omega_X(X) \oplus \bar{\Omega}_X(X).$$

Le lemme d'orthogonalité donne le résultat. \square

Théorème. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors :*

$$\text{Ker}\left(\Gamma(X, T_X^*) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)\right) = d\mathcal{C}^\infty(X) \oplus^\perp \text{Harm}^1(X).$$

DÉMONSTRATION. Puisque ce noyau contient visiblement :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(X) &:= \text{Ker}\left(\Gamma(X, T_X^*) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)\right) \\ &\supset d\mathcal{C}^\infty(X) \oplus^\perp \text{Harm}^1(X), \end{aligned}$$

il suffit grâce au théorème vu à l'instant de montrer l'orthogonalité :

$$\mathcal{Z}(X) \perp *d\mathcal{C}^\infty(X).$$

Soient donc $\omega \in \mathcal{Z}(X)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Alors :

$$\omega \wedge *(df) = -\omega \wedge df = d(f\omega).$$

Donc :

$$\langle \omega, *df \rangle = \iint_X d(f\omega) = 0,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors une forme différentielle $\sigma \in \Gamma(X, T_X^*)$ est exacte si et seulement si, pour toute 1-forme fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$, on a :*

$$0 = \iint_X \sigma \wedge \omega.$$

DÉMONSTRATION. En effet, cette condition est équivalente à $\langle \omega, *\sigma \rangle = 0$ pour toute 1-forme fermée ω . Mais grâce au théorème pénultième, ceci signifie que $*\sigma \in *d\mathcal{C}^\infty(X)$, c'est-à-dire que $\sigma \in d\mathcal{C}^\infty(X)$. \square

Théorème de Hodge-de Rham en dimension 1. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors :*

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \text{Rham}^1(X) \cong \text{Harm}^1(X)}.$$

DÉMONSTRATION. Le premier isomorphisme a été vu dans un des chapitres qui précèdent, et le second est maintenant évident. \square

Remarquons que le faisceau \mathbb{C}_X des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans \mathbb{C} dépend seulement de la structure topologique de X . Par conséquent, l'entier :

$$b_1(X) := \dim H^1(X, \mathbb{C}_X),$$

appelé *premier nombre de Betti* de X , est un invariant topologique. Or a démontré il y a quelques instants que :

$$b_1(X) = 2 \text{ genre}(X),$$

donc le genre est un invariant topologique !

Mentionnons qu'en tout genre ≥ 1 , il existe des surfaces de Riemann qui sont homéomorphes mais qui ne sont pas biholomorphes. La théorie de Teichmüller montre que la classification holomorphe des surfaces de Riemann de genre g dépend d'un seul paramètre complexe, lorsque $g = 1$, et de $3g - 3$ paramètres complexes, lorsque $g \geq 2$.

Exercices

Exercice 20.1. Soit X une surface de Riemann compacte.

(a) Montrer que $d\Gamma(X, T_X^{*(0,1)}) = \partial\bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \subset \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$.

(b) Soit \mathcal{H}_X le faisceau des fonctions harmoniques sur X . Montrer que :

$$H^1(X, \mathcal{H}_X) \cong \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*) / \partial\bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \cong \mathbb{C}.$$

(c) Soit $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que :

$$\partial\bar{\partial}f = \omega,$$

si et seulement si :

$$0 = \iint_X \omega.$$

Exercice 20.2. Soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe. Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, on définit sa valeur moyenne par :

$$M(f) := \left(\iint_X f dz \wedge d\bar{z} \right) \left(\iint_X dz \wedge d\bar{z} \right)^{-1}.$$

Pour $\omega = f dz + g d\bar{z} \in \Gamma(X, T_X^*)$, on définit :

$$M(\omega) := M(f) dz + M(g) d\bar{z}.$$

(a) Si $\omega \in \mathcal{Z}(X) := \text{Ker}\left(\Gamma(X, T_X^*) \xrightarrow{d} \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)\right)$, montrer que ω et $M(\omega)$ sont cohomologues.

(b) Montrer que l'application :

$$M: \mathcal{Z}(X) \longrightarrow \text{Harm}^1(X)$$

induit un isomorphisme :

$$\text{Rham}^1(X) \xrightarrow{\sim} \text{Harm}^1(X).$$

21. Théorème d'Abel

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte ayant des zéros et des pôles prescrits. Bien entendu, il est nécessaire que le nombre total de zéros soit égal au nombre total de pôles. Cependant, sur les surfaces de genre $g \geq 1$, cette condition n'est pas suffisante. Le théorème d'Abel fournit alors la condition nécessaire et suffisante recherchée.

Fonctions méromorphes à diviseur prescrit. Soit X une surface de Riemann et soit D un diviseur sur X .

Définition. Une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ est dite une *solution* de D si $\operatorname{div}(f) = D$.

Autrement dit, la fonction f possède précisément les zéros et les pôles qui sont prescrits par le diviseur D . Lorsque X est compacte, une solution n'est possible que si $\deg(D) = 0$.

Définition. Si l'on pose :

$$X_D := \{x \in X : D(x) \geq 0\},$$

une *solution faible* de D est une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X_D)$ telle que tout point $a \in X$, possède un voisinage de coordonnée (U, z) avec $z(a) = 0$ dans lequel il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ avec $\psi(a) \neq 0$ satisfaisant :

$$f = \psi z^k \quad \text{sur } U \cap X_D, \quad \text{où } k = D(a).$$

Clairement, une solution faible et une vraie solution, *i.e.* est une solution méromorphe, précisément lorsque f est holomorphe sur X_D . Deux solutions faibles f et g de D diffèrent par un facteur $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ qui ne s'annule jamais.

Si f_1 , resp. f_2 , est une solution faible de D_1 , resp. de D_2 , alors $f := f_1 f_2$ est une solution faible de $D := D_1 + D_2$. Aux points $a \in X$ où :

$$D(a) \geq 0, \quad \text{tandis que : } D_1(a) < 0 \quad \text{ou } D_2(a) < 0,$$

le produit $f_1 f_2$ n'est pas défini, mais en utilisant la continuité, il peut être prolongé en ces points. De manière similaire, f_1/f_2 est une solution faible de $D_1 - D_2$.

Différentiation logarithmique. Soit f une solution faible de D . Alors la dérivée logarithmique $\frac{df}{f}$ est une 1-forme \mathcal{C}^∞ sur le complémentaire de :

$$\operatorname{Supp}(D) = \{x \in X : D(x) \neq 0\}.$$

Si $a \in \operatorname{Supp}(D)$ et si $k = D(a)$, alors en utilisant la représentation $f = \psi z^k$, on calcule :

$$\frac{df}{f} = k \frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}.$$

Maintenant, comme $\frac{d\psi}{\psi}$ est \mathcal{C}^∞ dans un voisinage de a , *i.e.* n'a pas de singularités, et comme la singularité $\frac{1}{z}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle

sur $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, on voit que pour toute 1-forme $\sigma \in \Gamma(X, T_X^*)$ à support compact, l'intégrale double :

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge \sigma$$

existe et est finie. Pour un usage ultérieur, on notera aussi que la 1-forme $\frac{\bar{\partial}f}{f}$ est \mathcal{C}^∞ sur X tout entier, puisque la représentation locale $f = \psi z^k$ implique de manière similaire que $\frac{\bar{\partial}f}{f} = \frac{\bar{\partial}\psi}{\psi}$.

Lemme. Soient a_1, \dots, a_n des points distincts deux à deux sur une surface de Riemann X , soient $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ des entiers, et soit $D \in \text{Div}(X)$ le diviseur sur X défini par $D(a_j) = k_j$ pour $j = 1, \dots, n$ et par $D(x) = 0$ ailleurs. Si f est une solution faible de D , alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^n k_j g(a_j).$$

DÉMONSTRATION. Choisissons des voisinages de coordonnées disjoints (U_j, z_j) des a_j avec $z_j(a_j) = 0$ tels que, sur U_j , on peut écrire f comme :

$$f = \psi_j z_j^{k_j} \quad \text{avec } \psi_j \in \mathcal{C}^\infty(U_j), \quad \text{et avec } \psi_j(x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in U_j.$$

On peut supposer de plus que $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ est le disque unité, pour $j = 1, \dots, n$.

Soient $0 < r_1 < r_2 < 1$. Il existe des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(X)$ satisfaisant :

$$\text{Supp}(\varphi_j) \subset \{|z_j| < r_2\} \quad \text{et } \varphi_j|_{\{|z_j| \leq r_1\}} = 1.$$

Soit $g_j := \varphi_j g$ pour $j = 1, \dots, n$ et posons :

$$g_0 := g - g_1 - \dots - g_n.$$

Puisque $\text{Supp}(g_0)$ est compact dans :

$$X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\},$$

il découle du théorème de Stokes et du fait que le bord de X est vide que :

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg_0 = - \iint_X d\left(g_0 \frac{df}{f}\right) = 0.$$

Donc :

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^n \iint_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^n k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j.$$

Maintenant, le théorème de Stokes permet de calculer :

$$\begin{aligned} \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\varepsilon \leq |z_j| \leq r_2} d\left(g_j \frac{dz_j}{z_j}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z_j|=\varepsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} \\ &= 2i\pi g_j(a_j) \\ &= 2i\pi g(a_j), \end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion désirée. □

Chaînes, cycles et homologie.

Définition. Une 1-chaîne sur une surface de Riemann X est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers :

$$c = \sum_{j=1}^k n_j c_j, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

de courbes continues $c_j: [0, 1] \rightarrow X$. L'intégrale sur c d'une forme différentielle fermée¹ $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ est alors naturellement définie par linéarité :

$$\int_c \omega := \sum_{j=1}^k n_j \int_{c_j} \omega.$$

L'ensemble des 1-chaînes, qui est un groupe abélien pour l'addition, sera noté $C_1(X)$.

Définition (Opérateur bord). Un opérateur bord :

$$\partial: C_1(X) \longrightarrow \text{Div}(X)$$

est défini comme suit. Soit $c: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue. On pose $\partial c = 0$ lorsque $c(0) = c(1)$. Sinon, soit ∂c le diviseur ayant la valeur $+1$ au point $c(1)$, la valeur -1 au point $c(0)$ et qui est nul ailleurs. Enfin, pour une 1-chaîne arbitraire $c = \sum_j n_j c_j$, on définit :

$$\partial c := \sum_j n_j \partial c_j.$$

Clairement, on a :

$$\deg(\partial c) = 0, \quad \text{pour toute 1-chaîne } c \in C_1(X).$$

Réciproquement, sur une surface de Riemann compacte, étant donné un diviseur D de degré nul : $0 = \deg D$, il existe toujours une 1-chaîne c telle que $\partial c = D$. En effet, un diviseur D de degré nul quelconque peut toujours être écrit comme une somme :

$$D = D_1 + \cdots + D_k,$$

dans laquelle chaque D_j prend la valeur $+1$ en un certain point b_j et la valeur -1 en un certain autre point a_j , tandis que D est nul ailleurs. Il suffit alors de prendre des courbes continues c_j de a_j à b_j , de sommer $c := c_1 + \cdots + c_k$ pour obtenir $\partial c = D$.

Définition. Le noyau de cette application ∂ :

$$Z_1(X) := \text{Ker}\left(C_1(X) \xrightarrow{\partial} \text{Div}(X)\right),$$

est appelé le groupe des 1-cycles sur X .

En particulier, toute courbe fermée est un 1-cycle.

Définition. Deux cycles $c, c' \in Z_1(X)$ sont dits homologues si, pour toute forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$, on a :

$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega.$$

¹ Rappelons que l'existence d'une primitive de $p^*\omega$ sur le revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$ a permis de définir $\int_c \omega$ sur des courbes fermées qui ne sont que continues, sans hypothèse de rectifiabilité.

L'ensemble de toutes les classes d'homologie de 1-cycles forme un groupe additif, le 1^{er} groupe d'homologie de X , noté $H_1(X)$.

Ainsi, pour toute classe $\gamma \in H_1(X)$ et toute forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ a une valeur bien définie.

Deux courbes fermées qui sont homotopes sont aussi homologues. Par conséquent, on a un homomorphisme de groupe :

$$\pi_1(X) \longrightarrow H_1(X).$$

On peut vérifier (exercice) que cette application est surjective. Toutefois, elle n'est pas en général injective, car le groupe fondamental n'est presque jamais abélien.

Lemme. Soit X une surface de Riemann, soit $c: [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue et soit U un voisinage ouvert de $c([0, 1])$ relativement compact dans X . Alors il existe une solution faible f du diviseur ∂c avec $f|_{X \setminus U} = 1$ telle que pour toute forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$, on a² :

$$\int_c \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

DÉMONSTRATION. (a) On considère d'abord le cas où (U, z) est un voisinage de coordonnées sur X , où $z(U) \subset \mathbb{C}$ est un disque et où la courbe c se trouve entièrement dans U .

Soit $a := c(0)$ et soit $b := c(1)$. Il existe $r < 1$ tel que $c([0, 1]) \subset \{|z| < r\}$. La fonction :

$$\log \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

a une branche bien définie sur $\{r < |z| < 1\}$. Choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ satisfaisant $\psi|_{\{|z| \leq r\}} = 1$ et $\psi|_{\{|z| \geq r'\}} = 0$ pour $r < r' < 1$ et définissons la fonction $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus \{a\})$ par :

$$f_0(z) := \begin{cases} \exp \left(\psi(z) \log \frac{z - b}{z - a} \right) & \text{si } r < |z| < 1, \\ \frac{z - b}{z - a} & \text{si } |z| \leq r. \end{cases}$$

Puisque $f_0|_{\{r' < |z| < 1\}} = 1$, on peut prolonger continûment f_0 en une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X \setminus \{a\})$ en la déclarant égale à 1 sur $X \setminus U$. Par construction, f est une solution faible du diviseur ∂c .

Maintenant, supposons que $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ est une forme différentielle fermée. Puisque ω possède une primitive dans U , il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ dont le support est compact telle que $\omega = dg$ sur $\{|z| \leq r'\}$. Donc en appliquant le premier lemme :

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = g(b) - g(a) = \int_c \omega.$$

(b) Dans le cas général, il existe une partition :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

² Puisque $\frac{df}{f} = 0$ sur $X \setminus U$, l'intégrale sur X existe.

de l'intervalle $[0, 1]$ et des voisinages de coordonnée (U_j, z_j) , $j = 1, \dots, n$, dans X tels que :

(i) $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \subset U$;

(ii) $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ est un disque.

Soit c_j la courbe $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$. En appliquant (a), on peut construire une solution faible f_j du diviseur ∂c_j avec $f_j|_{X \setminus U_j} = 1$ telle que l'on a :

$$\iint_{c_j} \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega,$$

pour toute forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$. Le produit $f := f_1 \cdots f_n$ remplit alors les conditions du lemme. □

Corollaire. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors pour toute courbe continue fermée α sur X , il existe une unique forme différentielle harmonique :*

$$\sigma_\alpha \in \text{Harm}^1(X)$$

satisfaisant :

$$\int_\alpha \omega = \iint_X \sigma_\alpha \wedge \omega,$$

pour toute forme différentielle fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$.

DÉMONSTRATION. Soit f une solution faible du diviseur $\partial\alpha = 0$ qui satisfait les conditions du lemme précédent. Puisque cette fonction f ne s'annule pas, $\frac{df}{f}$ est une 1-forme \mathcal{C}^∞ sur X , fermée. Grâce au théorème de Hodge-de Rham du chapitre qui précède, il existe une forme différentielle fermée $\sigma_\alpha \in \text{Harm}^1(X)$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telles que :

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{df}{f} = \sigma_\alpha + dg.$$

Si $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$ est fermée, alors $dg \wedge \omega = d(g\omega)$, et donc le théorème de Stokes ($\partial X = \emptyset$) donne :

$$\int_\alpha \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \iint_X \sigma_\alpha \wedge \omega.$$

Pour ce qui est de l'unicité, soit $\sigma' \in \text{Harm}^1(X)$ une deuxième solution du problème. Alors avec la différence $\tau := \sigma_\alpha - \sigma'$, on a :

$$\iint_X \tau \wedge \omega = 0,$$

pour toute forme fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$. En particulier, on peut choisir $\omega = *\tau$, et donc $\langle \tau, \tau \rangle = 0$, d'où $0 = \tau = \sigma_\alpha - \sigma'$. □

Théorème d'Abel. *Soit D un diviseur sur une surface de Riemann compacte X de degré $\deg D = 0$. Alors D a une solution méromorphe si et seulement si il existe une 1-chaîne $c \in C_1(X)$ avec $\partial c = D$ telle que :*

$$\int_c \omega = 0,$$

pour toute $\omega \in \Omega_X(X)$.

Clairement, la condition $\int_c \omega = 0$ doit seulement être vérifiée pour une base de $\Omega_X(X)$. Si $\gamma \in C_1(X)$ est une 1-chaîne arbitraire avec $\partial\gamma = D$, la condition peut être reformulée comme suit : *il existe un cycle $\alpha \in Z_1(X)$ — à savoir $\alpha = \gamma - c$ — tel que :*

$$\int_\gamma \omega_j = \int_\alpha \omega_j,$$

pour tout $j = 1, \dots, g$, où $\omega_1, \dots, \omega_g$ est une base de $\Omega_X(X)$.

DÉMONSTRATION. (a) Premièrement, montrons que la condition est suffisante. Soit $c \in C_1(X)$ une 1-chaîne avec $\partial c = D$ telle que $\int_c \omega = 0$ pour toute $\omega \in \Omega_X(X)$. Grâce au lemme qui précède, il existe une solution faible f du diviseur D satisfaisant :

$$\int_c \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega,$$

pour toute 1-forme fermée $\omega \in \Gamma(X, T_X^*)$. Si donc $\omega \in \Omega_X(X)$ est holomorphe, on a ainsi par hypothèse :

$$0 = \int_c \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2i\pi} \iint_X \frac{\bar{\partial}f}{f} \wedge \omega.$$

Mais puisque $\frac{\bar{\partial}f}{f} = \frac{d\psi}{\psi}$ au voisinage d'un point $a \in \text{Supp}(D)$ où $f = \psi z^k$, on a $\frac{\bar{\partial}f}{f} = \frac{\bar{\partial}\psi}{\psi} \in \Gamma(X, T_X^{*(0,1)})$ sans singularités. Grâce à un corollaire du chapitre qui précède, $0 = \iint_X \sigma \wedge \omega$ pour toute $\omega \in \Omega_X(X)$ donne l'existence d'une solution g de l'équation :

$$\bar{\partial}g = \frac{\bar{\partial}f}{f}.$$

Introduisons alors la correction :

$$F := e^{-g} f.$$

Comme f , cette nouvelle fonction F est une solution faible de D et l'on a, sur $X \setminus D$:

$$\bar{\partial}F = (\bar{\partial}e^{-g}) f + e^{-g} \bar{\partial}f = -e^{-g} f \bar{\partial}g + e^{-g} \bar{\partial}f = 0,$$

ce qui montre que F est même une vraie solution méromorphe de D .

(b) Deuxièmement, montrons que la condition $0 = \int_c \omega$ pour tout $\omega \in \Omega_X(X)$ est nécessaire. On peut supposer que $D \neq 0$. Soit donc f une fonction méromorphe sur X avec $\text{div}(f) = D$. La fonction f définit un revêtement ramifié à n feuillets $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, pour un certain entier $n \geq 1$. Soient $a_1, \dots, a_r \in X$ les points de branchement de f , et posons :

$$Y := \mathbb{P}^1 \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_r)\}.$$

Pour toute forme $\omega \in \Omega_X(X)$, construisons une forme différentielle holomorphe :

$$\sigma := \text{Trace}(\omega)$$

sur \mathbb{P}^1 comme suit. Chaque point $y \in Y$ a un voisinage ouvert V tel que $f^{-1}(V)$ est la réunion disjointe d'ouverts $U_1, \dots, U_n \subset X$ tels que les applications $f|_{U_\nu} \rightarrow V$ sont des biholomorphismes. Soit $\varphi_\nu: V \rightarrow U_\nu$ l'inverse de $f|_{U_\nu} \rightarrow V$. Posons alors :

$$\text{Trace}(\omega)|_V := \varphi_1^*(\omega) + \dots + \varphi_n^*(\omega).$$

Lorsque nous effectuons la même construction sur un voisinage ouvert V' d'un autre point de Y , alors sur l'intersection $V \cap V'$, on obtient la même forme différentielle. Donc on

peut prolonger holomorphiquement $\text{Trace}(\omega)$ à $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$, puis à \mathbb{P}^1 tout entier en raisonnant comme au début du chapitre sur les fonctions algébriques. Puisque $\Omega_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = 0$, on a :

$$\text{Trace}(\omega) = 0.$$

Maintenant, soit γ une courbe continue sur \mathbb{P}^1 allant de ∞ à 0 qui, à l'exception peut-être de ses extrémités, se situe entièrement dans Y . La préimage de γ par f consiste en n courbes c_1, \dots, c_n qui joignent les pôles de f aux zéros de f . Alors en posant $c := c_1 + \dots + c_n$, on a $\partial c = D$ et pour toute $\omega \in \Omega_X(X)$:

$$\int_c \omega = \int_\gamma \text{Trace}(\omega) = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

Application aux fonctions doublement périodiques. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ deux nombre complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} et soit :

$$P := \{t_1 \gamma_1 + t_2 \gamma_2 : 0 \leq t_1 < 1, 0 \leq t_2 < 1\}.$$

On suppose que des zéros $a_1, \dots, a_n \in P$ et des pôles $b_1, \dots, b_n \in P$ sont prescrits, où chaque point apparaît autant de fois que sa multiplicité l'exige.

Proposition. *Il existe une fonction méromorphe qui est doublement périodique par rapport à $\Gamma = \mathbb{Z} \gamma_1 + \mathbb{Z} \gamma_2$ et qui a pour zéros a_1, \dots, a_n et pour pôles b_1, \dots, b_n , si et seulement si :*

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \in \Gamma.$$

DÉMONSTRATION. Soit D le diviseur sur \mathbb{C}/Γ qui est déterminé par les zéros et pôles prescrits. Choisissons des courbes c_k de b_k à a_k dans \mathbb{C} , par exemple des segments de droite. Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la projection canonique et soit :

$$c := \pi \circ c_1 + \dots + \pi \circ c_n \in C_1(\mathbb{C}/\Gamma).$$

Alors $\partial c = D$. Soit ω la forme différentielle sur \mathbb{C}/Γ holomorphe induite par la forme dz sur \mathbb{C} . Alors on a :

$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^n \int_{c_k} dz = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k).$$

Donc le résultat découle du Théorème d'Abel. □

Exercices

Exercice 21.1. Soit X une surface de Riemann compacte, soient α et β deux courbes fermées dans X , et soient σ_α et σ_β les 1-formes harmoniques associées à α et β , d'après un corollaire du chapitre. Montre que :

$$\iint_X \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta$$

est un entier (on l'appelle *nombre d'intersection* de α et β). *Indication :* Montrer, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ et pour α une courbe continue fermée, que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\alpha \frac{df}{f}$$

est un entier.

Exercice 21.2. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ un réseau, soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ et soit :

$$\alpha_j : [0, 1] \longrightarrow X \quad (j=1, 2),$$

les courbes fermées définies par :

$$\alpha_j(t) := \pi(t\gamma_j) \quad (j=1, 2),$$

où $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ est la projection canonique. Trouver les formes harmoniques σ_{α_j} .

Exercice 21.3. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Montrer qu'il existe des courbes continues fermées $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$ sur X telles que :

$$\text{Harm}^1(X) = \sum_{j=1}^{2g} \mathbb{C} \sigma_{\alpha_j}.$$

Exercice 21.4. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau. Une *fonction thêta* relative à Γ est une fonction holomorphe :

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisfaisant :

$$F(z + \gamma) = e^{a_\gamma z + b_\gamma} F(z),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\gamma \in \Gamma$, avec des constantes $a_\gamma, b_\gamma \in \mathbb{C}$ qui dépendent de γ .

(a) Soit la fonction σ de Weierstrass $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\sigma(z) := z \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) \exp\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma^2}\right).$$

Montrer que σ est une fonction thêta dont les zéros sont du premier ordre et se trouvent précisément aux points de Γ .

(b) Montrer que toute fonction méromorphe doublement périodique par rapport à Γ est le quotient de deux fonctions thêtas.

Examen du cours « Surfaces de Riemann »

Jeudi 26 janvier 2012, 09h30 – 12h30

Compréhension du cours (1,5 point et $5 \leq \text{lignes} \leq 15$ par question)

- A.** Que fait l'application qui lie le groupe fondamental au groupe d'automorphismes du revêtement universel (expliquer le sens géométrique) ?
- B.** Étant donné un revêtement ramifié entre surfaces de Riemann compactes, entre quelles sous-surfaces de Riemann le revêtement devient-il non-ramifié (argumenter) ?
- C.** Pourquoi a-t-on $H^1(X, \mathbb{C}_X) = 0$ sur une surface de Riemann simplement connexe (donner les arguments principaux) ?
- D.** À quoi sert le théorème de Dolbeault ? Donner trois applications dans des théorèmes importants du cours.
- E.** Détailler, en rappelant l'énoncé du théorème utilisé, la démonstration de l'identité de la page 3 du chapitre 15 :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D}_r(a))}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} |c_n|^2.$$

- F.** Montrer que le diagramme page 8 du chapitre 18 (Dualité) est bel et bien commutatif.
- G.** Pourquoi l'homomorphisme de connection δ^* a-t-il cette définition ?

Exercice tirés du photocopié (barème total supérieur à 20 points)

Exercice 2.4. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante et soit l'homomorphisme d'anneaux :

$$f^*: \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

induit par composition. Montrer qu'il est injectif.

Exercice 3.1. Soit X une variété et soient $U_1, U_2 \subset X$ deux sous-ensembles ouverts connexes et simplement connexes tels que $U_1 \cap U_2$ est connexe. Montrer que la réunion $U_1 \cup U_2$ est elle aussi simplement connexe.

Exercice 4.3. Soit $d \geq 1$ un entier et soit $\mathbb{C}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes qui sont de degré $\leq d$. Soit aussi $\mathcal{X}_d \subset \mathbb{C}_d[X]$ le sous-ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}_d[X]$ de degré exactement égal à d dont les d racines complexes sont distinctes deux à deux. On munit \mathcal{X}_d de la topologie induite.

Montrer que le sous-espace de $\mathcal{X}_d \times \mathbb{C}$ défini par :

$$\mathcal{Y}_d := \{(P, z) \in \mathcal{X}_d \times \mathbb{C} : P(z) = 0\}$$

et muni de la projection $p: (P, z) \mapsto P$ produit un revêtement de degré d de \mathcal{Y}_d sur \mathcal{X}_d .

Exercice 5.4. Soit $X := \mathbb{C}/\{\pm 2, -2\}$, soit $Y := \mathbb{C}/\{\pm 1, \pm 2\}$, et soit $p: Y \rightarrow X$ l'application :

$$p(z) := z^3 - 3z.$$

Montrer que p est un revêtement holomorphe non ramifié à trois feuillets. Calculer le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(Y \xrightarrow{p} X)$ et en déduire que le revêtement $p: Y \rightarrow X$ n'est pas galoisien. *Indication* : utiliser le fait que toute application biholomorphe $f: Y \rightarrow Y$ se prolonge comme un automorphisme de la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 .

Exercice 6.3. Soit \mathcal{F} un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X . Montrer que le faisceau $\Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F}))$ associé à \mathcal{F} qui est constitué des sections continues de $\text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ au-dessus d'ouverts $U \subset X$ et qui vient accompagné d'un morphisme de préfaisceaux naturel :

$$\gamma: \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F}))$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur X :

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

dont l'espace image \mathcal{G} est un *vrai* faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux (en pointillés) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \gamma \downarrow & \searrow \text{---} & \uparrow \\ \Gamma(\text{Germes}(\mathcal{F})) & & \end{array} .$$

Exercice 15.1. Soit l'anneau $\mathbb{A}_{r,R} = \{z \in \mathbb{C}: r < |z| < R\}$ avec $0 < r < R < \infty$. Déterminer une base orthonormale de $L^2(X, \mathcal{O}_X)$ consistant en des fonctions monômiales de la forme :

$$\varphi_n(z) = c_n z^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 17.2. Soit $X = \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe, soit $x_0 \in X$ et soit P le diviseur :

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{si } x \neq x_0. \end{cases}$$

En utilisant la fonction \wp de Weierstrass, montrer :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0, \\ n & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 19.1. Soit $U := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$, avec $r > 0$, et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $f(0) \neq 0$.

(a) On définit $f_j(z) := z^{j-1} f(z)$ pour $j = 1, \dots, g$. Montrer que le déterminant wronskien $W(f_1, \dots, f_g)$ ne s'annule pas à l'origine.

(b) On définit $\varphi_j(z) := z^{2j-2} f(z)$ pour $j = 1, \dots, g$. Montrer que le déterminant wronskien $W(\varphi_1, \dots, \varphi_g)$ a un zéro d'ordre $\frac{g(g-1)}{2}$ à l'origine.

Exercice 19.2. Soit $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une surface de Riemann hyperelliptique de genre $g \geq 2$.

(a) Montrer que les points de ramification $p_1, \dots, p_{2g+2} \in X$ de π sont des points de Weierstrass de X .

(b) Montrer qu'il n'existe pas d'autres points de Weierstrass et que tout point de Weierstrass a un poids égal à $\frac{g(g-1)}{2}$ (utiliser l'Exercice précédent).

Exercice 20.1. Soit X une surface de Riemann compacte.

(a) Montrer que $d\Gamma(X, T_X^{*(0,1)}) = \partial\bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \subset \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$.

(b) Soit \mathcal{H}_X le faisceau des fonctions harmoniques sur X . Montrer que :

$$H^1(X, \mathcal{H}_X) \cong \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*) / \partial\bar{\partial}\mathcal{C}^\infty(X) \cong \mathbb{C}.$$

(c) Soit $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^*)$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que :

$$\partial\bar{\partial}f = \omega,$$

si et seulement si :

$$0 = \iint_X \omega.$$