Mathématiques

Analyse de Fourier
D'après des notes rédigées par B. Helffer et T. Ramond

Année 2007

Table des matières

Première partie

Suites, Intégrales et Séries

Chapitre 1

Suites de nombres réels ou complexes

Les suites de nombres apparaissent dès que l'on veut modéliser un problème à **temps discret**, c'est-à-dire lorsque l'on s'intéresse à un phénomène qui évolue de temps en temps et non pas continûment. Elles apparaissent aussi, et c'est peut-être encore plus fréquent, lorsque l'on discrétise phénomènes **continus** pour en simplifier l'étude.

Nous supposons que le lecteur a déjà rencontré ces notions : il s'agit donc de faire des rappels et de l'encourager à faire des exercices.

1.1 Généralités

Une **suite numérique** est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie infinie I de $\mathbb{N}$, typiquement $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$, où n_0 est un entier positif) dans l'ensemble des nombres réels ou complexes. Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une suite, on notera plutôt u_n le nombre $u(n)$ image de n par u. Dans le même ordre d'idée on notera souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou même simplement (u_n), la suite u. Attention aux notations : u_n est un *nombre*, le **terme général** de la *suite* (u_n).

Disons tout de suite que l'on peut se contenter d'étudier les suites réelles : en effet la donnée d'une suite (u_n) de nombres complexes revient en fait à celle des deux suites réelles $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$. On verra cependant que l'on peut décrire la convergence d'une suite complexe directement.

1.1.1 Suites définies explicitement-Suites récurrentes

Nous rencontrerons différentes manières de définir une suite, qu'il importe de reconnaître. La conduite de l'étude d'une suite diffère en effet sensiblement suivant que leur définition est d'un type ou de l'autre :

- Une suite peut-être définie de manière **explicite**, le terme général u_n de la suite étant donné comme une fonction de n : $u_n = f(n)$, où f est une fonction, disons de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par exemple $u : n \mapsto 2n$ est la suite des nombres pairs.
- Une suite peut également être définie par une expression **récurrente**. Le terme général u_n est alors donné comme une fonction du ou de plusieurs des termes qui le précédent :
  $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots)$.
  Par exemple on peut définir la suite (v_n) des nombres impairs par récurrence : $v_n = v_{n-1} + 2$.

Il est alors indispensable de fixer les **conditions initiales** : il faut préciser ici $v_0 = 1$. Si l'on avait pris $v_0 = 0$, on aurait obtenu la suite des nombres pairs.

On peut souvent passer d'un type de définition à un autre. Cela peut même être très simple, mais une **démonstration par récurrence** est presque toujours nécessaire :
On pourra montrer par exemple que la suite (v_n) des nombres impairs peut être définie explicitement par : $v_n = 2n + 1$.
Par contre, il sera certainement plus difficile de trouver une définition explicite de la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

Soulignons enfin qu'il ne faut pas confondre la donnée de la suite (u_n) et l'image dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de l'application u, c'est à dire l'ensemble $\{u(n), n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, cette image est le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$, mais il y a beaucoup de suites distinctes ayant cet ensemble comme image.

1.1.2 Etude globale des suites réelles.

• La **représentation graphique** d'une suite réelle définie explicitement $u_n = f(n)$ est très simple. Il suffit de tracer la courbe représentative de la fonction f, et d'indiquer l'image des entiers. Par contre celle d'une suite définie par récurrence est un peu plus délicate. Il est parfois utile d'avoir, en s'aidant du graphe de la fonction $y = 1 + \frac{2}{x}$, la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par :

$$u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

• On dit qu'une suite numérique **réelle** (u_n) est **croissante** ou **décroissante** lorsque la fonction u l'est, c'est à dire

$$n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m.$$

Il est très simple (par récurrence : c'est un excellent **exercice**) d'obtenir le critère suivant, que l'on prendra comme définition :

Définition 1.1.1
Une suite numérique (u_n) est croissante si et seulement si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$. Elle est décroissante si et seulement si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n.

Exemple 1.1.2
La suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ est croissante, alors que la suite (v_n) de terme général $v_n = 1/n$ est décroissante.

Il existe bien sûr des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes : c'est le cas par exemple de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = (-1)^n$. L'étude du sens de variation d'une suite est très différente suivant son mode de définition :

– Pour une suite définie explicitement, du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction donnée, le sens de variation s'obtient facilement à partir du sens de variation de la fonction f. En général, f

est définie sur un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$ (typiquement $\mathbb{R}^+$), et on vérifie la propriété plus forte de monotonie sur cet ensemble. Par exemple, si on sait de plus que f est dérivable, on peut regarder le signe de f'.

– Dans le cas des suites récurrentes, on s'intéressera directement au signe de la différence $u_{n+1}-u_n$. Pour une suite dont les termes sont tous strictement positifs, on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. L'exemple de la suite (u_n) étudiée précédemment montre que le sens de variation d'une suite définie par une relation récurrente du type $u_n = f(u_{n-1})$ n'a qu'un rapport lointain avec le sens de variation de la fonction f.

Exemple 1.1.3
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 2^n - n$ est croissante, car

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n - 1 \geq 1 - 1 \geq 0 \; .$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_{n+1} = \sqrt{w_n}$ avec $w_0 = 4$ est décroissante car $w_n > 1$ et

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{\sqrt{w_n}} < 1 \; .$$

• Suites majorées ou minorées.

Définition 1.1.4
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

Lorsqu'une suite est majorée **et** minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

On notera qu'une suite n'est pas majorée (resp. pas minorée), lorsque, pour tout réel A, il existe au moins un terme de la suite plus grand (resp. plus petit) que A.

Exemple 1.1.5
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$ est minorée (par 0) mais n'est pas majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée.

1.2 Deux suites récurrentes de référence

Nous examinons rapidement deux types particuliers de suites définies par récurrence, pour lesquelles il est assez simple d'obtenir une expression explicite.

1.2.1 Suites arithmétiques

Définition 1.2.1
On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$. Ce réel r est alors appelé **raison** de la suite (u_n).

Par exemple la suite des nombres pairs est une suite arithmétique de raison 2, de même d'ailleurs que la suite des nombres impairs.

De la définition précédente, on déduit immédiatement que les suites arithmétiques sont croissantes lorsque leur raison est positive, décroissante lorsqu'elle est négative.

On vérifie facilement **par récurrence** la proposition suivante.

Proposition 1.2.2 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exercice 1.2.3
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)(\frac{u_0 + u_n}{2}).$$

Exercice 1.2.4
Quelle est la somme des n premiers nombres entiers ? Quelle est celle des n premiers nombres entiers pairs ?

1.2.2 Suites géométriques

Définition 1.2.5
On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q.u_n$. Ce réel q est alors appelé la **raison** de la suite (u_n).

Par exemple la suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2 ; la suite constante est une suite géométrique de raison 1.

L'expression explicite d'une suite géométrique est donnée ci-dessous. Le lecteur prouvera par récurrence la :

Proposition 1.2.6
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 q^n$$

Le sens de variation d'une suite géométrique s'obtient également à partir de la proposition précédente. Pour ce qui concerne la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, on prouve par récurrence la

Proposition 1.2.7
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\cdot$$

1.3 Limite d'une suite

1.3.1 Suites convergentes

Définition 1.3.1
On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels, a pour limite un réel ℓ donné, ou **tend vers** ℓ, ou encore **converge vers** ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \widehat{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geq \widehat{N}_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell\ .$$

Cette définition peut se lire de la manière suivante : "En dehors de n'importe quel intervalle centré en ℓ, disons de taille $\varepsilon > 0$, il n'y a pas plus d'un nombre fini, disons N_ε, de termes de la suite."

De cette manière, on comprend d'ailleurs assez facilement la

Proposition 1.3.2
Une suite ne peut avoir deux limites distinctes.

Preuve: Supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ et ℓ'. On peut choisir un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les intervalles $I = [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ et $I' = [\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon]$ soient disjoints ($\epsilon = |\ell-\ell'|/3$ convient). Or d'après la définition de la limite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite en dehors de I, donc à fortiori qu'un nombre fini de termes de la suite dans I', ce qui est absurde. □

On notera que la modification d'un nombre **fini** de termes d'une suite ne change rien pour ce qui est de sa limite éventuelle.

On notera aussi que, dans la vérification de l'existence de la limite, on peut se contenter d'une suite de ϵ_k ($k \in \mathbb{N}^\star$) tendant vers 0, par exemple $\epsilon_k = \frac{1}{k}$.

Lorsqu'une suite (u_n) tend vers un certain réel ℓ, on dit que cette suite est **convergente**. Dans le cas contraire on dit qu'elle est **divergente**.

Exercice 1.3.3
Montrer que toute suite convergente est bornée. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est-elle bornée ? Est-elle convergente ?

Revenons un instant sur le cas des suites de nombres complexes.

Définition 1.3.4
On dit qu'une suite (z_n) de nombres complexes, a pour limite un nombre complexe z donné, ou **tend vers** z, ou encore **converge vers** z, lorsque les suites réelles $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n)$ tendent respectivement vers $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$.

Nous terminons par une remarque concernant le passage à la limite dans les inégalités, que l'on peut démontrer sans trop de difficulté en utilisant la définition.

Proposition 1.3.5
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, ℓ et ℓ' deux nombres réels. Supposons que (u_n) tend vers ℓ et que (v_n) tend vers ℓ'. Si, pour tout n assez grand, on a $u_n < v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention !
Les inégalités *strictes* ne sont pas conservées par passage à la limite. On a par exemple $1/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais la suite $(1/n)$ tend vers 0 .

1.3.2 Suites qui tendent vers l'infini

Définition 1.3.6
On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels tend vers $+\infty$, lorsque :

$$\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A\ .$$

De même, on dira qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$, lorsque

$$\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_A \Rightarrow u_n \leq A\ .$$

Autrement dit, une suite tend vers $+\infty$ lorsque quelque soit le réel A fixé, le nombre de termes de la suite inférieur à A est fini.

Exemple 1.3.7
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.

1.3.3 Critères de convergence

Les définitions ci-dessus sont assez difficiles à manipuler. Nous regroupons ici quelques théorèmes qui permettent de déterminer la nature d'une suite (convergence ou divergence) et parfois de calculer sa limite quand elle existe.

• Comparaison.

Proposition 1.3.8
Soit (u_n) une suite numérique. S'il existe une suite (v_n) positive qui tend vers 0 telle que, pour tout n (ou même à partir d'un certain rang) :

$$|u_n - \ell| \leq v_n$$

alors (u_n) tend vers ℓ.

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$, $|v_n| < \varepsilon$. Donc pour tout $n > N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Exercice 1.3.9
Montrer que la suite de nombres complexes (z_n) converge vers z, si et seulement si la suite réelle $(|z_n - z|)$ tend vers 0. On a noté $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ le module du nombre complexe $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Autrement dit pour montrer qu'une suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ il suffit de majorer **sa distance à** ℓ par une suite positive dont on sait qu'elle tend vers 0. Pour pouvoir utiliser ce résultat, il est nécessaire de disposer de **suites de références**. Le lecteur courageux utilisera les définitions pour montrer la

Proposition 1.3.10
Soient k et a deux réels.

1. La suite $(n^k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si $k < 0$ et vers $+\infty$ si $k > 0$.
2. La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si $|a| < 1$.
3. La suite $(n^k a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si $|a| < 1$ pour n'importe quel k.
4. Pour tout $\ell > 0$, la suite $(n^{-\ell}(\ln n)^k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Exemples 1.3.11
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 1/(3n^2 + n + 1)$ tend vers 0, puisque $u_n \leq \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = 1/n^2$ a pour limite 0. On en déduit par comparaison que les suites de terme général $v_n = 1/(n^2+1)$ et $w_n = 1/n^3$ tendent aussi vers 0.
De même la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+5)/(n+2)$ a pour limite 1 .

Pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$, on utilise surtout le critère suivant :

Proposition 1.3.12
Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe une suite (v_n) qui tend vers $+\infty$ et telle que, pour tout n, (ou même tout n assez grand) :

$$v_n \leq u_n \ ,$$

alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exemple 1.3.13
Montrer l'inégalité $n < n^2 - 10n$, pour tout $n > 11$, et que la suite (u_n) de terme général : $u_n = n^2 - 10n$ tend vers $+\infty$.

• Opérations sur les limites.

Nous résumons dans le tableau qui suit les principaux résultats concernant la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites. Ils permettent de déterminer assez facilement la limite éventuelle de certaines suites, mais ne sont en général utilisables que pour les suites définies explicitement. Les preuves sont laissées au lecteur qui pourra s'inspirer de la démonstration du Lemme suivant.

Lemme 1.3.14
Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques et soit (c_n) la somme de (a_n) et (b_n) : $c_n = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$. Si (a_n) tend vers le réel ℓ et (b_n) tend vers le réel ℓ', alors (c_n) tend vers $\ell + \ell'$.

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier $M_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n > M_{\varepsilon/2}$, on ait $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$. De même, il existe un entier $M'_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n > M'_{\varepsilon/2}$, on ait $|b_n - \ell'| < \varepsilon/2$. Soit alors $N_\varepsilon = \max\{M_{\varepsilon/2}, M'_{\varepsilon/2}\}$. Pour tout $n > N_\varepsilon$ on a :

$$|c_n - (\ell + \ell')| \leq |a_n - \ell| + |b_n - \ell'| < \varepsilon$$

Le lemme est donc démontré. □

Soient donc (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et soient
- (w_n) la somme de (u_n) et (v_n) : $w_n = u_n + v_n, n \in \mathbb{N}$,
- (y_n) le produit de (u_n) et (v_n) : $y_n = u_n \times v_n, n \in \mathbb{N}$,
- (z_n) le quotient de (u_n) par (v_n) : $z_n = u_n/v_n, n \in \mathbb{N}$,
  (on supposera dans ce cas que $v_n \neq 0$ pour tout n).

Soient ℓ et ℓ' deux nombres réels non-nuls.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n)$	$\lim_{n\to+\infty}(v_n)$	$\lim_{n\to+\infty}(w_n)$	$\lim_{n\to+\infty}(y_n)$	$\lim_{n\to+\infty}(z_n)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	ℓ/ℓ'
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\ell < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	?	0
0	$-\infty$	$-\infty$	?	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Tab. 1.1 – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Dans ce tableau, les points d'interrogation signifient qu'aucun théorème ne permet de conclure et qu'il faut étudier chaque cas particulier en utilisant d'autres méthodes. Par exemple si $u_n = -n^2$ et $v_n = n^3$, on voit que : $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$, et que $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$.
Le tableau précédent ne permet donc pas directement de connaître la limite éventuelle de la suite (w_n), dont le terme général est donné par $w_n = u_n + v_n$. Pourtant il suffit de remarquer que $w_n = n^2(n-1)$ et de conclure grâce à la huitième ligne[1].

On donne maintenant un résultat plus général, souvent utile pour déterminer la limite éventuelle d'une suite définie par récurrence.

Proposition 1.3.15
Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers un réel ℓ. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

[1]On dit que l'on a **levé l'indétermination**.

De manière un peu rapide, on écrit souvent cette proposition sous la forme

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n).$$

Exemple 1.3.16
Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ doit vérifier

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$

• Suites croissantes et majorées.

La proposition qui suit donne un critère très pratique pour montrer qu'une suite est convergente, en particulier dans le cas des suites récurrentes. Cette propriété est liée à la nature de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, comme l'est par exemple la propriété qui fonde le raisonnement par récurrence à la nature de $\mathbb{N}$. Ce cours ne contenant aucune construction de $\mathbb{R}$, nous admettrons la :

Propriété 1.3.17
Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée converge. De même, toute suite décroissante et minorée converge.

Le lecteur remarquera que cette proposition ne donne pas un moyen pratique de calculer la limite lorsqu'elle existe.

Exemple 1.3.18
Soit : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$. On montre par récurrence que $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et on en déduit (voir la Proposition 1.2.7) que la suite (u_n) est majorée par 3. Cette suite est croissante, et on conclut donc qu'elle est convergente. Attention ! rien ne dit que sa limite est 3. On sait seulement (cf l'exercice 1.3.5) qu'elle est inférieure à 3.

Exemple 1.3.19
Considérons la suite (u_n) de rationnels, où u_n est le plus grand nombre décimal avec n-chiffres après la virgule dont le carré est inférieur à 2 : $u_0 = 1$, $u_1 = 1,4$, $u_2 = 1,41$, etc... Alors il est facile de voir que (u_n) est une suite croissante majorée convergent vers $\sqrt{2}$.

• Critère de Cauchy pour les suites.

Ce dernier critère est très important : il constitue lui aussi une propriété **fondamentale** de l'ensemble des nombres réels. Il permet de reconnaître la nature d'une suite sans nécessiter aucune information sur la limite éventuelle.

Définition 1.3.20
On dit qu'une suite (u_n) vérifie le **critère de Cauchy** ou que (u_n) est une **suite de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon \ .$$

Autrement dit (u_n) est une suite de Cauchy lorsque la distance entre deux termes quelconques est aussi petite que l'on veut, quitte à ne considérer que les termes de rang suffisamment grand.

L'intérêt de cette définition réside dans la

Proposition 1.3.21
Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

La preuve est très simple et laissée au lecteur à titre d'**exercice**.

Réciproquement, mais uniquement parce que c'est $\mathbb{R}$, on a la propriété :

Propriété 1.3.22
Toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

Répétons que c'est une propriété particulière de $\mathbb{R}$. Nous nous contenterons donc de donner un exemple d'une suite de nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy, mais dont la limite (qui existe dans $\mathbb{R}$ d'après la proposition précédente !) n'est pas un nombre rationnel. Autrement dit, dans $\mathbb{Q}$, il y a des suites de nombres rationnels qui vérifient le critère de Cauchy mais qui ne sont pas convergentes.

Exemple 1.3.23
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$.

1. On vérifie (par récurrence) que tous les termes de cette suite sont rationnels. Ensuite, en étudiant les variations de la fonction $]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ sur $\mathbb{R}^+$, on vérifie que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$.

2. En remarquant que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n},$$

on démontre ensuite que cette suite est décroissante, et, par conséquent, converge (dans $\mathbb{R}$!). Elle vérifie donc le critère de Cauchy.

3. On montre ensuite que sa limite est $\sqrt{2}$. On sait déjà que cette limite existe et qu'elle est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$. Mieux, on obtient par passage à la limite :

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}),$$

et donc $\ell = \sqrt{2}$. La limite de la suite (u_n) n'est donc pas un rationnel.

Exemple 1.3.24
Soit (u_n) la suite donnée par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ .$$

On vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Cette inégalité montre que l'on n'a pas la propriété de Cauchy, et que, par conséquent, cette suite est divergente.

Chapitre 2

Rappels sur les primitives et Intégrales Généralisées

2.1 Intégrale d'une fonction continue et primitive.

On rappelle brièvement les définitions et propriétés qui ont déjà été vues.

2.1.1 Retour sur une définition

Définition 2.1.1
Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. On appelle intégrale définie de f entre a et b le nombre

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \ .$$

Ici $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Bien sûr cette notion n'a de sens que parce que la limite existe. On l'admettra ! On note alors

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

On dit que I est l'intégrale de a à b de f. On rappelle que, pour une fonction f positive, I est l'aire de la portion de plan $\{(x, y) \ , \ x \in [a, b] \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Exercice 2.1.2
Calculer $\int_0^1 x^2\, dx$ en utilisant la définition précédente.

Remarque 2.1.3
Comme transition avec les suites, on peut considérer l'exercice suivant, qui peut conduire à une définition de l'intégrale. On suppose que f est continue, positive et croissante sur $[a, b]$. On pose :

$$\begin{aligned} u_0 &= (b-a) \inf_{t \in [a,b]} f(t) \ , \\ u_1 &= \tfrac{(b-a)}{2} \inf_{t \in [a, a+\frac{(b-a)}{2}]} f(t) + \tfrac{(b-a)}{2} \inf_{t \in [a+\frac{(b-a)}{2}, b]} f(t) \ , \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Plus précisément, à l'étape n, on découpe l'intervalle $[a,b]$ *en* 2^n *intervalles égaux* I_j^n $(j = 1, \cdots, 2^n)$ *et on pose :*

$$u_n := 2^{-n}(b-a)\sum_{j=1}^{2^n} \inf_{t\in I_j^n} f(t) \; .$$

On laisse le lecteur vérifier que la suite (u_n) *est une suite croissante. Elle est majorée. On a en effet :*

$$0 \le u_n \le (b-a) \sup_{t\in[a,b]} f(t) \; , \; \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

On sait donc que cette suite est convergente et on pourrait choisir de prendre sa limite comme définition de l'intégrale de f *sur* $[a,b]$*. Notons que cela ne nous dispensera pas de nous poser la question de savoir si cette définition est indépendante du découpage choisi. Là aussi, on admettra ce résultat.*
On peut aussi définir une autre intégrale en remplaçant les "inf" apparaissant dans la définition de u_n *par des "sup".*

Notons aussi qu'il est facile d'étendre la définition aux **fonctions en escalier** (la surface délimitée par la courbe représentative d'une telle fonction est une réunion de rectangles). On peut aussi l'étendre aux **fonctions continues par morceaux** à l'aide de la relation de Chasles ci-dessous.

2.1.2 Quelques propriétés

Les propriétés que nous énonçons maintenant découlent de la définition de l'intégrale - et ont d'ailleurs une interprétation simple en termes d'aire. Nous dispensons le lecteur de toute démonstration.

• Relation de Chasles.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,c]$ et b un point de cet intervalle. A partir de la définition, on obtient facilement que

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt \; . \tag{2.1.1}$$

Cette dernière égalité porte le nom de **relation de Chasles** pour les intégrales. Elle permet au passage de définir $\int_b^a f(t)dt$ pour $a < b$. Avec cette relation, on doit en effet avoir :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \int_a^a f(t)dt = 0 \; ,$$

et donc

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)\,dt \; , \tag{2.1.2}$$

identité que l'on pourra considérer comme une définition.

• Linéarité de l'intégrale.

Proposition 2.1.4
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors on a :

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \ ;$$
$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ est une application linéaire de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles (qui sera le plus souvent noté par $C^0([a, b]; \mathbb{R})$) dans $\mathbb{R}$.

• Intégrales et inégalités.

Proposition 2.1.5
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $f(x) \leq g(x)$. Alors on a

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \ .$$

Attention ! Il est essentiel ici que $a \geq b$!

En particulier, **l'intégrale d'une fonction positive est positive**. Comme autre application, on obtient immédiatement que, si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a) \ . \tag{2.1.3}$$

Une autre application, basée sur l'inégalité :

$$-|f| \leq f \leq |f| \ ,$$

est l'inégalité :

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \ . \tag{2.1.4}$$

En combinant (2.1.3) et (2.1.4), on déduit aussi :

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq (\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|)\ (b-a) \ . \tag{2.1.5}$$

Terminons enfin par la **Formule de la Moyenne**.

Proposition 2.1.6
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c).$$

Preuve:
Les inégalités (2.1.3) disent que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \in [m, M],$$

où

$$m = \inf_{t\in[a,b]} f(t), \qquad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Le résultat est donc une conséquence directe du **Théorème des valeurs intermédiaires** appliqué à la fonction continue f et à la valeur intermédiaire $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$. $\square$

Attention ! Cette formule de la moyenne n'est pas vraie dans le cas où f est à valeurs complexes alors que l'estimation (2.1.5) restera vraie (voir ci-dessous).

2.1.3 Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Si f est une fonction continue à valeurs complexes sur $[a, b]$, on peut bien sûr écrire :

$$f = u + iv\ ,$$

où u et v sont des fonctions continues à valeurs réelles. On utilise les notations :

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f\ ,$$

avec

$$u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

où la fonction $\bar{f}$ est définie par :

$$\bar{f}(x) := \overline{f(x)}\ ,\ \forall x \in [a, b]\ .$$

Définition 2.1.7
Soit $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) à valeurs complexes. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt) + i(\int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt)\ .$$

Il est facile de voir que la propriété de linéarité (Proposition 2.1.4) reste vraie dans le cas complexe. L'inégalité (2.1.4) reste vraie (c'est un **Exercice** plus délicat. Une première démonstration peut vous conduire plus facilement à une version plus faible avec une perte multiplicative de $\sqrt{2}$ dans le second membre).

2.1.4 Primitives et intégrales

Nous rappelons maintenant les liens entre primitive et intégrale d'une fonction continue.

Définition 2.1.8
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction dérivable F est une primitive de f sur I si , pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

Si l'intervalle est fermé ($I = [a, b]$), il faudra parler de dérivée à droite ou à gauche pour les points a et b.

La notion de primitive est un peu délicate principalement parce qu'elle ne définit pas un objet unique.
La proposition suivante montre cependant que ces primitives diffèrent simplement entre elles d'une constante.

Proposition 2.1.9
Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I alors il existe un réel C tel que, pour tout x de I, on ait $F(x) = G(x) + C$.

Preuve:
Si $F'(x) = G'(x) = f(x)$ on a $(F - G)'(x) = 0$ pour tout x de I. La fonction $F - G$ est donc constante sur cet intervalle. □

Par exemple la fonction $x \mapsto \ln x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$, de même que la fonction $x \mapsto \ln(3x)$ puisque $\ln(3x) = \ln x + \ln 3$. Par contre $x \mapsto \ln x$ est la seule primitive de $x \mapsto 1/x$ définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$.

En pratique, nous conseillons au lecteur de choisir effectivement une primitive pour éviter de jouer avec des objets définis à une constante près. Nous n'utiliserons pas l'écriture $\int^x f(t)\,dt$ qui apparaît dans certains ouvrages.

On se pose maintenant naturellement la question de l'existence d'une primitive d'une fonction donnée. Le résultat fondamental de la théorie de l'intégration des fonctions continues s'énonce :

Theorème 2.1.10
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Soit aussi $A\ :\ I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $A\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Cette fonction A est continue, dérivable sur I et c'est une primitive de f sur cet intervalle ; c'est la seule qui s'annule en a.

Preuve:
Montrons d'abord le deuxième point. Si B est une autre primitive de f sur l'intervalle I, on sait qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in I$ on a $B(x) = A(x) + C$. Si l'on veut que $B(a) = 0$, on doit donc nécessairement avoir $C = 0$, ce qui montre l'unicité. On va montrer maintenant que la fonction A est dérivable sur I et que $A' = f$. Soit $h > 0$ un réel. On a, en supposant que x et $x + h$ sont dans $[a, b]$,

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt\ .$$

On réécrit le terme de droite sous la forme :

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(x) + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\ ,$$

et on observe l'inégalité (cf (2.1.5)) :

$$|\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt| \leq |h| \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)|\ .$$

La preuve est achevée si on remarque que la continuité de f au point x implique que :

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)| = 0\ .$$

Le cas où $x = b$ et donc $h < 0$ se traite de la même manière. □

Remarque 2.1.11
Dans la mesure où on lui a déjà demandé d'admettre que la définition de l'intégrale avait un sens, le lecteur pourra sans dommage admettre le théorème, et se contenter de revoir la liste de primitives des fonctions standards rencontrées dans ses études antérieures. Mais regarder une démonstration mathématique un peu élaborée est aussi instructif, alors...

Le théorème précédent fournit également un moyen très simple de calcul de l'intégrale d'une fonction lorsqu'on en connaît une primitive. On a en effet la

Proposition 2.1.12
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

Preuve:
La fonction $G\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$; les fonctions F et G diffèrent donc d'une constante C. Or $G(a) = F(a) + C = 0$ donc $C = -F(a)$ et $G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$. □

2.1.5 Techniques de calcul

• Intégration par parties.

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. On se rappelle alors que, pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \ . \tag{2.1.6}$$

De plus, si on ajoute l'hypothèse que u' et v' sont continues, $(uv)'$ est continue. En intégrant entre a et b l'équation (2.1.6), on en déduit la formule d'intégration par parties :

> **Proposition 2.1.13**
> Soient u et v deux fonctions continument dérivables par morceaux sur $[a, b]$. On a
>
> $$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \ .$$

Cette formule est évidement très utile lorsque l'une des deux intégrales est beaucoup plus simple à calculer que l'autre. Soit par exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x\,dx \ .$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = \sin x$ (un autre choix de primitive est tout à fait possible et ne change pas bien sûr le résultat du calcul). On obtient donc

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

• Changement de variable.

La proposition qui suit est connue sous le nom de formule du changement de variable. Le lecteur doit noter que l'égalité ci-dessous (2.1.7) peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

> **Proposition 2.1.14**
> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit aussi ϕ une fonction continument dérivable de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ avec $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$. On a
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \ . \tag{2.1.7}$$

Preuve: □

Si F est une primitive de f, il suffit de vérifer que la fonction $t \mapsto \psi(t) = F(\phi(t))$ est dérivable, de dérivée $f(\phi(t))\phi'(t)$. Il suffit alors d'intégrer ψ' entre α et β.

Voici des exemples où l'on applique la formule du changement de variable dans chacun des deux sens.

De la gauche vers la droite.

On veut d'abord calculer

$$I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ .$$

On veut appliquer l'équation (2.1.7) avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et l'intervalle $[a, b] = [0, \sqrt{2}/2]$.
On va simplifier grandement le calcul en posant $\phi(t) = \sin t$. On a $\phi'(t) = \cos t$ et $\phi(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$, $\phi(\beta) = \sqrt{2}/2$ pour $\beta = \frac{\pi}{4}$. La formule (2.1.7) lue de gauche à droite donne en effet alors

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}}\, dt = \frac{\pi}{4}\ .$$

(Noter que $\sqrt{1 - \sin^2 t}$ est bien égal à $\cos t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.)
Remarquons que l'on aurait a priori pu prendre $\beta = 3\pi/4$, mais qu'il n'est alors pas clair du tout que l'intégrale correspondante,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}}\, dt\ ,$$

est bien définie, puisque la fonction à intégrer n'est pas continue en $\pi/2 \in [0, 3\pi/4]$. Elle est cependant continue par morceaux (le vérifier en remarquant que $\sqrt{1 - \sin^2(t)} = |\cos t|$) et l'on obtient le même résultat que précédemment. Le lecteur retiendra qu'il doit choisir l'intervalle $[\alpha, \beta]$ avec circonspection (en pratique le plus petit possible).

De la droite vers la gauche.
Calculons maintenant l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}\, dt\ .$$

On reconnait facilement dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(\phi(t))\ \phi'(t)$ avec $\phi(t) = \ln t$ (et donc $\phi'(t) = 1/t$) et $f(x) = x^2$. On a $\phi(1) = 0$, $\phi(e) = 1$ et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,

$$J = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}\ .$$

2.2 Intégrales généralisées

2.2.1 Exemples et définitions

Commençons par quelques exemples. Soit d'abord $f_1 \ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$. Pour tout $x > 1$, la fonction f_1 est intégrable sur $[1, x]$, puisque continue sur cet intervalle, et l'on a

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\, dt = 1 - \frac{1}{x}\ .$$

La question que nous nous posons maintenant est de savoir si l'on peut donner un sens à une expression du type

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\, dt\ .$$

Dans le cas où $f(t) = f_1(t)$, la réponse est positive et l'on notera

$$\int_1^{+\infty} f_1(t) dt = \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1\ ,$$

bien que l'intégrale ci-dessus ne soit pas définie au sens du paragraphe précédent, et l'on parlera *d'intégrale généralisée.*

Par contre, si l'on considère la fonction $f_2 \; : \; t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est elle aussi intégrable sur tout intervalle de la forme $[1, x]$, on a

$$I_2(x) = \int_1^x f_2(t)dt = \ln(x) \; ,$$

ce qui montre que la fonction $I_2(x)$ n'a cette fois pas de limite quand $x \to +\infty$.

On dira que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(t)dt$ est divergente.

Voyons maintenant deux autres exemples d'une situation un peu différente. Dans les cas précédents, il s'agissait de donner un sens à une intégrale sur *un intervalle non-borné* d'une fonction continue. Nous allons voir que l'on peut parfois donner un sens à une intégrale sur un intervalle borné d'une fonction *non-bornée sur cet intervalle.* Soit par exemple $f_3 \; : \; t \mapsto 1/\sqrt{t}$. Cette fonction est intégrable sur tout intervalle de la forme $[x, 1]$ où x est un réel strictement positif, et l'on a

$$I_3(x) = \int_x^1 f_3(t)\, dt = 2(1 - \sqrt{x}) \; .$$

Bien que f_3 ne soit pas bornée au voisinage de 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} I_3(x) = 2$. On notera là encore

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \; ,$$

l'intégrale du membre de gauche étant aussi appelée intégrale généralisée.

Enfin dans le cas de la fonction $f_4 \; : \; t \mapsto 1/t$, intégrable sur tout intervalle de la forme $[x, 1]$, on a :

$$I_4(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \; ,$$

et la fonction $I_4(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

Nous donnons maintenant des définitions précises pour les notions que nous venons de rencontrer dans les quatres exemples précédents. Les deux premiers exemples que nous avons vus relèvent de la

Définition 2.2.1
Soient a un réel fixé et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, définie pour tout $x \geq a$, admet une limite ℓ quand $x \to +\infty$. On pose alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \ell \; .$$

On rappelle que l'on dit que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x > A$, on ait :

$$|F(x) - \ell| \leq \epsilon \; .$$

Le lecteur pourra définir de la même manière les intégrales généralisées du type $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$. Par addition on obtient alors la

Définition 2.2.2
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, s'il existe un réel a, tel que chacune des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ et $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. On pose alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt\ .$$

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ n'est pas convergente, on dira qu'elle est divergente.

Dans la pratique, on cherchera a_1 tel que $\int_{a_1}^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente et a_2 tel que $\int_{-\infty}^{a_2} f(t)\,dt$ soit convergente et on se convainquera que cela suffit.

Exemple 2.2.3
L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ *est convergente.*

L'exercice ci-dessous souhaite faire réfléchir sur le danger qu'il pourrait y avoir à mal utiliser la définition ci-dessus.

Exercice 2.2.4
Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ *est divergente, alors que*

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} t\,dt = 0\ .$$

Nous avons aussi rencontré dans notre présentation initiale deux intégrales généralisées du type suivant :

Définition 2.2.5
Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur $]a,b]$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{a}^{b} f(t)dt$ est convergente, si la fonction $F(x) = \int_{x}^{b} f(t)dt$, définie pour tout $x > a$, admet une limite ℓ quand $x \to a$. On pose alors :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \ell\ .$$

On laisse au lecteur le soin d'énoncer une définition pour les intégrales généralisées du type $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ dans le cas où f n'est pas bornée au voisinage du point a.

2.2.2 Règles de calcul

Le lecteur montrera sans difficultés la proposition suivante portant sur les possibilités d'ajouter des intégrales généralisées ou de multiplier une telle intégrale par un réel. Nous nous contenterons d'énoncer ces théorèmes dans le cas d'intégrales de la forme $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$, les définitions et théorèmes correspondants à l'autre type d'intégrales généralisées étant strictement identiques.

Proposition 2.2.6
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Si deux des trois intégrales ci-dessous convergent, alors la troisième converge également et l'on a

$$\int_a^{+\infty} (\mu \cdot f + \nu \cdot g)(t)dt = \mu \int_a^{+\infty} f(t)dt + \nu \int_a^{+\infty} g(t)\, dt\ .$$

De même la règle d'intégration par parties pour les intégrales définies devient

Proposition 2.2.7
Soient u et v deux fonctions continument dérivables sur $[a, +\infty[$. Si l'une des intégrales ci-dessous converge et si $(u \cdot v)(x)$ a une limite quand $x \to +\infty$, alors l'autre intégrale converge et l'on a

$$\int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\, dt = [u(x)v(x)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(t)v'(t)\, dt\ ,$$

où l'on a noté $[u(x)v(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Le lecteur prendra garde au théorème de changement de variable dans les intégrales généralisées, qui demande une hypothèse supplémentaire par rapport au théorème correspondant dans les intégrales définies.

Proposition 2.2.8
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Soit aussi ϕ une fonction continument dérivable et *strictement croissante* de $[\alpha, \beta[$ dans $[a, +\infty[$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature. De plus, si elles sont convergentes, elles sont égales.

2.2.3 Critères de convergence

Il est souvent utile de savoir si une intégrale généralisée est convergente ou non avant d'essayer de calculer sa valeur. Ce paragraphe est consacré à l'énoncé de quelques règles permettant de répondre à cette question. Là encore, seul le cas des fonctions positives est relativement simple.

Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives

Lorsque f est une fonction à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante, et il suffit alors pour étudier la convergence ou la divergence de montrer que cette fonction est ou n'est pas bornée. On peut même se contenter de regarder la convergence ou non de la suite :

$$u_n = \int_a^{a+n} f(t)dt\ .$$

Le principe de comparaison peut prendre ici la forme suivante :

Proposition 2.2.9
Soient f et g deux fonctions continues à valeurs positives sur $[a, +\infty[$. Si, pour tout t assez grand, on a $0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors
– La convergence de $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ entraine la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$
– La divergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ entraine la divergence de $\int_a^{+\infty} g(t)dt$.

Il est immédiat de voir (et très utile de savoir) que :
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt$ est convergente, si et seulement si $p > 1$.

De même, il est immédiat de voir (et très utile de savoir) que :
L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^p}\, dt$ est convergente, si et seulement si $p < 1$.

Exercice 2.2.10
Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente. En déduire la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Voilà une autre variante utile du principe de comparaison.

> **Proposition 2.2.11**
> Soient f et g deux fonctions continues à valeurs positives sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel ℓ non-nul tel que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \ell$, alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

Exercice 2.2.12
Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2-t)}\, dt$ sont convergentes.

Convergence absolue

Pour traiter le cas de fonctions ne gardant pas un signe constant nous devrons souvent nous contenter de la notion de convergence absolue.

Définition 2.2.13
Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.

L'intérêt de cette définition réside dans la proposition suivante, que nous admettrons :

> **Proposition 2.2.14**
> Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Preuve:
On donne seulement l'idée de la preuve pour ceux qui ont lu la partie concernant les suites de Cauchy au chapitre précédent.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_n = \int_a^{a+n} f(t)dt, \quad \text{et} \quad v_n = \int_a^{a+n} |f(t)|dt.$$

La suite v_n est croissante et majorée, donc converge. Comme elle est convergente, c'est donc encore une suite de Cauchy. Puisque

$$|u_{n+p} - u_n| \leq v_{n+p} - v_n \ ,$$

on voit, en revenant à la définition, que la suite (u_n) est aussi de Cauchy, et qu'elle converge donc dans $\mathbb{R}$, vers une limite, notée

$$I = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \ .$$

Il reste à montrer que $\int_a^x f(t)dt$ tend vers I. □

Par exemple l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ est absolument convergente, et donc convergente. Bien entendu de nombreuses intégrales généralisées sont convergentes mais pas absolument convergentes comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 2.2.15
Soit $f \ : \ t \mapsto \frac{\sin t}{t}$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ n'est pas absolument convergente (on pourra minorer la fonction $t \mapsto \sin t$ sur $[0, \pi]$ par la fonction g, nulle sur $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]$ et égale à $\sqrt{2}/2$ sur $[\pi/4, 3\pi/4]$). En effectuant une intégration par parties, montrer que cette intégrale est néanmoins convergente.

Chapitre 3

Séries Numériques

Nous nous intéressons ici à certaines suites numériques particulières, que l'on obtient en considérant la suite obtenue en calculant la somme des premiers termes d'une suite donnée jusqu'à un nombre n de plus en plus grand. Les outils permettant l'étude de ce type de suites sont relativement simples, et serviront dans les chapitres suivants.

3.1 Généralités

3.1.1 Convergence d'une série numérique

Définition 3.1.1
Soit (u_n) une suite numérique. On appelle série numérique de terme général u_n la suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \, .$$

Le nombre S_n est appelé n-ième somme partielle de la série.
Lorsque la suite (S_n) est convergente, on dit que la série de terme général u_n est convergente, et la limite de la suite (S_n) est appelée la somme de la série. On note alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n \, .$$

On dira que la série de terme général (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 3.1.2
Dans d'autres ouvrages, les auteurs utilisent une autre terminologie que nous expliquons maintenant. Ils disent en effet que la série $\sum_n u_n$ *est convergente pour dire que la série de terme général* (u_n) *est convergente. Pour nous* $\sum_n u_n$ *désigne plutôt la somme, quand elle existe, de la série.*

Exemple 3.1.3
Les sommes partielles de la série des inverses des puissances de 2*, plus précisément de la série de*

terme général (2^{-n}), *sont données par*

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) \ .$$

Cette série converge, et a pour somme 2.

Par contre la série des puissances de 2 *est divergente, puisque l'on a*

$$\sum_{n=0}^{p} 2^n = 2^{n+1} - 1 \ .$$

A une série convergente, disons de terme général u_n, on associe la suite (R_n) de ses restes, définis par

$$R_n = \sum_{p>n} u_p \ .$$

Si l'on note S la somme de cette série on voit imédiatement que $R_p = S - S_p$, et que l'on a bien défini une suite numérique.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une série ne soit pas convergente.

Proposition 3.1.4
Si la série de terme général (u_n) est convergente, alors $u_n \to 0$.

Preuve:
Soit S la somme de cette série. Puisque la suite des sommes partielles (S_p) converge vers S, $S_p - S$ tends vers 0 quand $p \to \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier $N > 0$ tel que, si $p > N$, on a $|S_p - S| < \varepsilon/2$. Or $u_p = S_p - S_{p-1} = (S_p - S) - (S_{p-1} - S)$; donc, si $p - 1 > N$, on obtient :

$$|u_p| \leq |S_p - S| + |S_{p-1} - S| \leq \varepsilon \ ,$$

ce qui montre que (u_p) tend vers 0. □

Exemple 3.1.5
La série de terme général $(\sin(n))$ *ne peut pas converger puisque la suite de terme général* $(\sin n)$ *n'a pas de limite quand* n *tend vers l'infini (ceci se démontre ! mais le lecteur pourra faire quelques expériences numériques avec une calculette).*

On termine ce paragraphe par un exemple important.

Définition 3.1.6
On appelle série géométrique toute série dont le terme général est de la forme q^n.

On voit facilement qu'une série géométrique est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et que sa somme est alors $1/(1-q)$. On a en effet l'identité, pour tout N,

$$\sum_{p=0}^{N} q^p = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \ .$$

Dans ce cas, l'étude de la série peut être menée à son terme en n'utilisant que des techniques générales d'étude de suites. C'est également le cas des séries dites séries télescopiques, comme par exemple la série de terme général $u_n = \ln(1 + 1/n)$, $n \geq 1$. On a en fait $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la n-ième somme partielle est donc $S_n = \ln(n+1)$, ce qui prouve que la série en question diverge.

Exercice 3.1.7
Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. *On remarquera que* $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3.2 Séries à termes positifs

Nous étudions dans cette partie le cas des séries dont le terme général est toujours positif. C'est de loin le plus simple à traiter. Pour les séries à termes positifs, la suite des sommes partielles est en effet croissante. Il suffit donc de regarder si cette suite est majorée ou non pour obtenir la nature de la série.

3.2.1 Le théorème de comparaison

Proposition 3.2.1
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. Si, pour tout n, on a $u_n \leq v_n$, alors :

1. La convergence de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraine la convergence de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La divergence de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraine la divergence de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve:
(1) Supposons que la série de terme général v_n converge. Notons V sa somme et W_n la suite de ses sommes partielles. Si (T_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, on a

$$T_n \leq W_n \leq V \ .$$

La suite (T_n) est donc croissante et majorée par V. Par conséquent elle converge.
L'assertion (2) est la contraposée de (1). □

Exemple 3.2.2
La série de terme général $1/n^2$ *est convergente.*
En effet, pour $n \geq 2$ *:*

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \ ,$$

et la série de terme général $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ *est convergente (c'est une série télescopique).*

Comme pour les intégrales généralisées, cette proposition n'est utile que si l'on dispose d'un stock de séries de référence. On utilisera souvent les séries de Riemann, c'est-à dire les séries dont le terme général s'écrit $\frac{1}{n^\alpha}$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour établir la nature de ces séries, nous utiliserons d'ailleurs une certaine analogie entre intégrale généralisée et série numérique.

Proposition 3.2.3
Soit f une fonction positive et continue sur $[a, +\infty[$. Si f est décroissante, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et la série de terme général $f(n)$ $(n \geq a)$ sont de même nature.

Preuve:
Pour simplifier les notations on supposera que $a = 1$. Puisque f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [n, n+1]$, $f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)$. En intégrant on obtient

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt \geq f(n+1)$$

Notant alors (S_p) la suite des sommes partielles de la série de terme général $f(n)$ on obtient par récurrence

$$S_p \geq \int_1^{p+1} f(t)dt \geq S_{p+1} - f(1) \ .$$

On obtient le résultat en passant à la limite $p \to +\infty$ dans ces inégalités. □

Pour la série de Riemann, dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

pour $n \geq 1$, on obtient, en appliquant la proposition, qu'elle converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. En effet la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ dès que $\alpha > 0$, et l'on a vu que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\, dt$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3.2.4
Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{4+\sin(n)}{5^{n+1}}$ *est convergente.*

Bien entendu la nature convergente d'une série de terme général u_n n'est pas modifiée si l'on change les premiers termes de la suite (u_n). Le critère ci-dessus est donc également vrai si la majoration $u_n < v_n$ n'a lieu qu'à partir d'un certain rang. Le critère suivant est utile.

Proposition 3.2.5
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. S'il existe un réel *strictement positif* ℓ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \ ,$$

alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature (elles convergent toutes les deux ou bien divergent toutes les deux).

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé tel que $(\ell - \varepsilon) > 0$ et $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |\frac{u_n}{v_n} - \ell| < \varepsilon$$

On a immédiatement, pour tout $n > N_\varepsilon$,

$$(\ell - \varepsilon)v_n < u_n < (\ell + \varepsilon)v_n \ ,$$

et l'on applique la proposition précédente. □

Exercice 3.2.6
Montrer que la série de terme général $u_n = (e^n + 2^n)/(\pi^n + 3^n)$ *est convergente.*

3.2.2 Critères de Cauchy et de D'Alembert

Nous avons vu un peu plus haut que les séries géométriques de terme général q^n $(n \geq 0)$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans les deux critères de convergence qui suivent, on compare la série que l'on veut étudier et à une série géométrique.

Proposition 3.2.7 Critère de Cauchy

Supposons qu'il existe un réel ℓ tel que la suite (u_n) vérifie

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \ell$$

Alors la série de terme général u_n diverge si $\ell > 1$ et converge si $\ell < 1$. On ne peut conclure dans le cas où $\ell = 1$.

Preuve:
Pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour tout n assez grand $|u_n^{1/n} - \ell| < \varepsilon$, c'est à dire

$$\ell - \varepsilon < u_n^{\frac{1}{n}} < \ell + \varepsilon\ .$$

Supposons que $\ell > 1$. On peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. L'inégalité précédente implique :

$$1 \leq (\ell - \varepsilon)^n < u_n\ ,$$

et montre que u_n tend pas vers 0 et donc que la série diverge.
Dans le cas où $\ell < 1$, on choisit un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$ et on applique le théorème de comparaison à la série de terme général u_n et à celle de terme général $(\ell + \varepsilon)^n$. □

Exercice 3.2.8
Soient $u_n = \frac{1}{n^2}$ *et* $v_n = \frac{1}{n}$. *Montrer que* $u_n^{1/n}$ *et* $v_n^{1/n}$ *tendent vers 1 et que la série de terme général* u_n *converge alors que celle de terme général* v_n *diverge.*

Exercice 3.2.9
Etudier la nature de la série de terme général $(a + \frac{1}{n})^n$.

Proposition 3.2.10 Critère de D'Alembert

Supposons qu'il existe un réel ℓ tel que la suite (u_n) vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

Alors la série de terme général u_n diverge si $\ell > 1$ et converge si $\ell < 1$. On ne peut conclure dans le cas où $\ell = 1$.

Preuve:
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell| < \varepsilon$, c'est à dire $(\ell - \varepsilon)u_n < u_{n+1} < (\ell + \varepsilon)u_n$. Par récurrence on obtient alors facilement l'inégalité

$$(\ell - \varepsilon)^{n-N_\varepsilon} u_{N_\varepsilon} < u_n < (\ell + \varepsilon)^{n-N_\varepsilon} u_{N_\varepsilon} \ ,$$

l'inégalité de gauche n'étant vraie que pour $\ell - \epsilon > 0$.
Supposons que $\ell > 1$. On peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$, et donc tel que $(\ell - \varepsilon)^n$ ne tende pas vers 0. L'inégalité précédente montre que u_n non plus ne tend pas vers 0 et donc que la série diverge.
Dans le cas où $\ell < 1$, on choisit un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$ et l'on applique le théorème de comparaison à la série de terme général u_n et à celle de terme général $(\ell + \varepsilon)^{n-N_\varepsilon}$. □

Exercice 3.2.11
Soient $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tendent vers 1 et que la série de terme général u_n converge alors que celle de terme général v_n diverge.

Exercice 3.2.12
Montrer que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente.

3.3 D'autres séries

Nous étudions maintenant le cas des séries dont le terme général ne garde pas un signe constant. Disons tout de suite qu'il n'existe pas de "recette" permettant d'étudier ces séries. Nous nous contenterons d'évoquer la notion de convergence absolue qui permet parfois d'établir la convergence en utilisant les techniques concernant les séries à termes positifs. Nous terminerons par l'étude du cas particulier des séries dont le terme général change de signe à chaque fois et appelées séries alternées.

3.3.1 Convergence absolue

Définition 3.3.1
On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente lorsque la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{3n}}{n^2}$ $(n \geq 1)$ est absolument convergente, alors que la série harmonique alternée dont le terme général est, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ne l'est pas. L'intérêt de cette définition (et aussi la justification de la terminologie) réside dans la

Proposition 3.3.2
Toute série absolument convergente est convergente.

La démonstration est admise. Pour ceux qui se sont intéressés aux suites de Cauchy, voir la preuve ci-dessous.

Preuve:
On va montrer que la suite de terme général S_n est une suite de Cauchy. Soit ε un réel positif. Puisque la série de terme général $|u_n|$ est convergente, la suite des sommes partielles associées T_n est de Cauchy. Soit ε un réel positif. Il existe un entier N_ε tel que pour tout $n > N_\varepsilon$ et tout $p \geq 1$, on ait

$$|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon \ .$$

La série de terme général u_n est donc convergente. □

Bien entendu il existe de nombreuses séries qui convergent mais qui ne sont pas absolument convergentes. Le dernier paragraphe concerne un cas particulier de telles séries.

3.3.2 Séries alternées

Définition 3.3.3 On dit que la série de terme général u_n est une série alternée lorsque, pour tout n, on a $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$.

On pose alors $a_n = (-1)^n u_n$ ou $a_n = (-1)^{n+1} u_n$ de sorte que l'on ait $a_n \geq 0$ pour tout n et l'on écrit la (somme de la) série sous la forme

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad -\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n \ ,$$

suivant le cas. Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ est une série alternée puisque $u_n = (-1)^n / n^2$.

Proposition 3.3.4
Supposons que la suite positive (a_n) soit décroissante et ait pour limite 0. Alors la série alternée de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ est convergente. De plus le n-ième reste R_n de cette série vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Preuve:
Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$. Puisque la suite (a_n) est décroissante, on a

$$S_{2n-1} \leq S_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} + a_{2n} \leq$$
$$\leq S_{2n} \leq S_{2n-2} + a_{2n} - a_{2n-2} \leq S_{2n-2} \ .$$

On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \ .$$

La suite (S_{2n}) est décroissante et minorée par S_1. Elle converge donc vers un réel ℓ. De même la suite (S_{2n+1}) est croissante et majorée par S_0. Elle converge donc vers un réel ℓ'. Or $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ et donc tend vers 0 comme a_n. Ceci montre que $\ell = \ell'$. La suite (S_n) est donc convergente. Notant S la somme de la série, on a $|R_{2n}| = |S - S_{2n}|$ et $|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}|$. Il suffit alors de remarquer que

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

pour obtenir la majoration du reste. □

Par exemple les séries de Riemann alternées de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$ et seulement convergentes pour $\alpha > 0$. On notera que le critère ci-dessus n'est qu'une condition suffisante de convergence. Par exemple il ne s'applique pas à la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ qui est pourtant convergente (Exercice !). Plus généralement, on pourra :

Exercice 3.3.5
Discuter en fonction de $\alpha > 0$ la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{((-1)^n+n^\alpha)}$ ($n \geq 2$).

3.4 Séries complexes

Nous aurons en fait beaucoup de séries à considérer dont le terme général est à valeur complexe.

Définition 3.4.1
On dira que la série $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $c_n = a_n + ib_n$, a_n et b_n réels) converge si les deux séries réelles de terme général a_n et b_n sont convergentes.

La somme de la série est alors par définition :

$$(\sum_n c_n) := (\sum_n a_n) + i(\sum_n b_n) \ .$$

Le cas le plus simple à étudier est le cas des séries absolument convergentes, c'est à dire le cas des séries de terme général c_n telles que la série de terme général $|c_n|$ est convergente.

Les inégalités :

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |c_n| \ , \\ |b_n| &\leq |c_n| \ , \\ |c_n| &\leq (|a_n| + |b_n|) \ , \end{aligned}$$

montrent que la série (c_n) est absolument convergente, si et seulement si les séries (a_n) et (b_n) sont absolument convergentes.

En particulier, les séries complexes absolument convergentes sont convergentes.

Exemple 3.4.2
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Exemple 3.4.3
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série de terme général z^n est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$. On notera qu'elle n'est pas convergente lorsque $|z| \geq 1$, car son terme général ne tend pas vers 0.

Chapitre 4

Séries entières

4.1 Suites et séries de fonctions

Nous nous intéressons maintenant à des séries dont le terme général n'est plus un nombre mais une fonction numérique. Pour aider le lecteur à comprendre ce dont il s'agit nous commençons par traiter un exemple assez simple.

4.1.1 La suite de fonctions $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction $f_n \; : \; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, et l'on va s'intéresser à la *fonction limite* de la suite de fonctions (f_n). La première idée est de regarder la limite de chacune des suites $(f_n(x))_n$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé. On notera qu'il s'agit alors d'étudier la limite d'une suite numérique, qui n'est autre ici que la suite géométrique de raison x. Cette suite est donc divergente si $x > 1$; elle converge vers 0 si $x < 1$ et vers 1 si $x = 1$. Soit alors f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

Un phénomène qu'il est intéressant ici d'observer est que la fonction limite f n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que toutes les fonctions f_n le sont.

4.1.2 Notions de convergence

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions que l'on supposera toutes définies sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur un intervalle fixe de $\mathbb{R}$).

Définition 4.1.1
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement au point x_0 de $\mathbb{R}$ si la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur un intervalle I si elle converge simplement en tout point x de I. La fonction f définie sur I par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

est appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4.1.2
Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur l'intervalle I. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si la suite numérique $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$d_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

tend vers 0 quand $\to +\infty$.

Exercice 4.1.3
Montrer que la suite de fonction (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle du type $[0, a]$ avec $0 < a < 1$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.1.4
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$, avec $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que cette suite converge simplement en chaque point de $\mathbb{R}^+$, et qu'elle diverge ailleurs. Pour quelles valeurs de a cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction limite d'une suite de fonctions. Le lecteur retiendra, de façon un peu rapide, que la convergence simple ne suffit pas à assurer la transmission à la fonction limite des propriétés des termes de la suite, et qu'il faut pour cela avoir convergence uniforme de la suite de fonctions.

Proposition 4.1.5
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est continue sur I.
Preuve:
Soient x_0 dans I et ε un réel strictement positif. On doit trouver un $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, .$$

On écrit alors, pour un certain entier n,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \, . \end{aligned}$$

Puisque la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

De plus puisque f_n est continue, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

On obtient alors l'inégalité voulue en prenant $n > N$ et $\eta = \alpha$. □

Nous donnons maintenant sans démonstration des critères permettant d'assurer l'intégrabilité et la dérivabilité des fonctions limites de suites de fonctions.

Proposition 4.1.6
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Si cette suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors f est continue sur $[a, b]$ et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)\, dt \, .$$

Proposition 4.1.7
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle fermé I. Si la suite converge simplement en tout point de I vers une fonction f, et si la suite (f'_n) des dérivées converge uniformément vers une fonction g, alors f est de classe C^1 sur I et l'on a $f' = g$.

4.1.3 Cas des séries de fonctions

On étudie ici des objets comme

$$\sum_{n\geq 0} x^n \, ,$$

où x est une variable. Il s'agit de la somme des termes d'une suite de fonctions et on parle donc de *série de fonctions*. Comme dans le cas des séries numériques on associe aux séries de fonctions la suite de leur sommes partielles. Dans le cas de l'exemple précédent on regarde donc la suite de fonctions $(S_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ dont le terme g{en{eral est défini par

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p \ ,$$

et l'on s'intéresse à la limite de la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Il est alors bien clair que le paragraphe précédent peut être réécrit pour traiter la convergence des séries de fonctions.

Définition 4.1.8
On dit que la série de fonctions de terme général f_n $(n \in \mathbb{N})$ converge simplement (resp. uniformément) sur un intervalle I lorsque la suite (S_p) de ses sommes partielles converge simplement (resp. uniformément) sur I.

Exemple 4.1.9
La série de terme général $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ converge simplement vers $1/(1-x)$ en tout point x_0 tel que $|x_0| < 1$, et elle diverge partout ailleurs.

Remarque 4.1.10
Dans ce qui précède on peut remplacer f_n par $|f_n|$. On obtient alors pour les séries de fonctions les notions de convergence simple absolue (CSA). On peut d'ailleurs montrer (comme dans le cas des séries numériques) que la CSA entraine la convergence simple.

Il est difficile d'établir directement la convergence uniforme d'une série de fonctions : il est en effet la plupart du temps desespéré de vouloir calculer sa somme. On utilise plutôt la notion de convergence normale. Notons qu'il s'agit d'une notion spécifique aux séries de fonctions et qu'il n' y a pas de notion similaire pour les suites de fonctions.

Définition 4.1.11
On dit que la série de fonctions de terme général f_n $(n \in \mathbb{N})$ converge normalement sur un intervalle I, s'il existe une série numérique de terme général positif a_n qui converge et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout x de I et tout entier $n \geq n_0$,

$$|f_n(x)| \leq a_n \ .$$

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 4.1.12
Si la série de fonctions de terme général f_n $(n \in \mathbb{N})$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

Exercice 4.1.13
Montrer que la série de terme général $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ (on pourra montrer que $f_n(x) \leq e^{-n}$ sur $\mathbb{R}^+$).

4.1.4 Quelques propriétés des sommes de séries de fonctions

On recopie pour mémoire les résultats déjà vus sur la limite d'une suite de fonctions.

Proposition 4.1.14
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I. Si la série de terme général f_n $(n \in \mathbb{N})$ converge normalement, alors sa somme S est continue sur I.

Proposition 4.1.15
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Si la série de terme général f_n converge normalement dans $[a, b]$, alors sa somme S est continue sur $[a, b]$ et l'on a

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{p} f_n(t)\, dt = \int_a^b S(t)\, dt\ .$$

Autrement dit, on peut intervenir limite et intégrale.

On a également la proposition

Proposition 4.1.16
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que :

1. Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série numérique de terme général $f_n(x_0)$ soit convergente.
2. La série de terme général f'_n converge normalement sur $[a, b]$ (on désigne par g sa somme).

Alors la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $[a, b]$ et sa somme est une fonction f dérivable dont la dérivée est g.

En d'autres termes, on a

$$\frac{d}{dx}\big(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n\leq N} f_n\big) = \lim_{N\to+\infty}\big(\sum_{n\leq N} f'_n\big)\ ,$$

dans $[a, b]$, c'est à dire que l'on peut intervertir limite et dérivation.

On notera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)\ + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\ .$$

4.2 Séries Entières

On appelle **série entière** une série de fonctions dont le terme général est de la forme $a_n x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, où les a_n forment une suite de nombres, réels ou complexes. On s'intéresse à la question de déterminer l'ensemble des x tels que la série $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Cet ensemble, qui est appelé **domaine de convergence** contient toujours 0 mais on va voir qu'il est loin d'être quelconque.

4.2.1 Rayon de convergence

On a d'abord la

Proposition 4.2.1 (Lemme d'Abel)
On considère la série entière de terme général $a_n x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Si pour un x_0 avec $|x_0| \neq 0$, il existe $M > 0$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_n x_0^n| \leq M ,$$

alors la série de terme général $a_n x^n$ est normalement convergente dans tout intervalle fermé $[-r, r]$ inclus dans $]-|x_0|, +|x_0|[$.

Preuve: Soit $r > 0$ tel que $r < |x_0|$. Posons $\alpha = r/|x_0| < 1$. Pour tout $x \in]-r, r[$, on a

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| (\frac{|x|}{|x_0|})^n \leq M \alpha^n .$$

La série $|a_n x^n|$ est donc normalement convergente. □

Remarque 4.2.2
En particulier le lemme d'Abel s'applique lorsque l'on trouve un $x_0 \neq 0$ tel que la série $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On déduit du lemme d'Abel que l'ensemble $\mathcal{D}$ des $r > 0$ tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n < +\infty$ est ou bien vide ou bien un intervalle de la forme $]0, R)$ avec R fini ou infini, la borne de l'intervalle pouvant être comprise ou non.

Définition 4.2.3
Le rayon de convergence R d'une série entière est la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{D}$.

4.2.2 Calcul du rayon de convergence

Les critères suivants, lorsqu'ils s'appliquent, donnent des moyens simples de calcul du rayon de convergence.

Proposition 4.2.4 (Règle de d'Alembert)
Supposons que $a_n \neq 0$ pour $n \geq N_0$ et supposons que la suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_{n \geq N_0}$ soit convergente et de limite égale à ℓ. Alors, le rayon de convergence de la série entière est donné par :

$$R = \frac{1}{\ell} .$$

Notez que si $\ell = 0$, le rayon de convergence est $+\infty$. Ceci implique que la série de terme général $a_n x^n$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La preuve consiste à appliquer le critère de d'Alembert à la série de terme général $|a_n x^n|$.

Proposition 4.2.5 (Règle de Cauchy)
Supposons que $a_n \neq 0$ pour $n \geq N_0$ et supposons que la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \geq N_0}$ soit convergente et de limite égale à ℓ. Alors, le rayon de convergence de la série entière est donné par :

$$R = \frac{1}{\ell} .$$

Cette fois la preuve consiste à appliquer le critère de Cauchy à la série de terme général $|a_n x^n|$.

4.2.3 Somme et produit de séries entières

La somme de deux séries entières de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ est la série entière de terme général $(a_n + b_n)x^n$. Leur produit est la série entière de terme général $c_n x^n$ donné par

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \ .$$

Bien sûr se pose la question du rayon de convergence de ces nouvelles séries entières :

> **Proposition 4.2.6**
> Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence A, et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence B. Le rayon de convergence R_1 de la somme, et le rayon de convergence R_2 du produit de ces deux séries entières vérifient
>
> $$R_1 \geq \min(A, B), \quad R_2 \geq \min(A, B) \ .$$

4.2.4 Séries entières et formule de Taylor

La formule de Taylor-Young conduit naturellement à associer à une fonction f de classe C^∞, définie dans un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ la série entière de terme général $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

On peut alors se poser plusieurs questions :
- Cette série entière est-elle convergente pour $x \neq x_0$? Si c'est le cas, quel est son rayon de convergence R.
- Comparer r et R.
- Pour $|x - x_0| < \inf\{r, R\}$, la somme de la série est-elle égale à la fonction f ?

Si $\inf\{r, R\} > 0$ et si la réponse à la troisième question est positive, alors on dit que la fonction f est développable en série entière autour du point x_0.

L'exemple suivant doit nous faire méditer. Considèrons sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \exp -\frac{1}{x^2}$ (pour $x \neq 0$) et prolongée par 0 en zéro. On peut vérifier que cette fonction est C^∞ et a toutes ses dérivées nulles en 0. Sa série de Taylor est identiquement nulle et donc de rayon de convergence $R = +\infty$. Cette fonction n'est pas égale à la somme de sa série de Taylor ! !

Voici un critère simple pour montrer qu'une fonction est développable en série entière en un point x_0 :

> **Proposition 4.2.7**
> Soit f une fonction définie dans $]x_0 - r, x_0 + r[$. S'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
>
> $$|f^{(k)}(x)| \leq M \ . \tag{4.2.1}$$
>
> Alors f est développable en série entière dans $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Preuve:
La formule de Taylor-Mac Laurin donne, que, pour tout x dans $]x_0 - r, x_0 + r[$, il existe $\theta \in [0,1]$ (qui peut dépendre de x) tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{(N+1)} .$$

On observe alors que :

$$|f(x) - S_N(x)| \leq M|x-x_0|^{(N+1)} \frac{1}{(N+1)!} ,$$

où

$$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n ,$$

et que par conséquent :

$$\lim_{N\to+\infty} |f(x) - S_N(x)| = 0 , \tag{4.2.2}$$

pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. □

Exercice 4.2.8
Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto e^x$ sont développables en séries entières à l'origine.

Malheureusement ce critère n'est pas très utile, dans le sens où de nombreuses fonctions développables en séries entières ne le vérifient pas. C'est le cas par exemple de la fonction $f(x) = 1/(1-x)$.

Exercice 4.2.9
Montrer que, quitte à diminuer r dans la conclusion (4.2.2), on peut faire au lieu de (4.2.1) l'hypothèse plus faible :

$$\frac{1}{k!}|f^{(k)}(x)| \leq M_1 M_2^k .$$

4.2.5 Dérivée et primitive d'une série entière dans $]-R, +R[$

Proposition 4.2.10
Si une fonction f est, pour $|x-x_0| < R$, la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ (où R est le rayon de convergence de la série qui est supposé strictement positif),

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n ,$$

alors la fonction f est dérivable et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^{n-1} .$$

Le rayon de convergence de la série des dérivées est le même.

Ce résultat est une conséquence de la proposition 4.1.16.

En répétant l'argument, on peut voir que la fonction est indéfiniment dérivable. En fait elle a beaucoup plus de propriétés : par exemple si elle s'annule à l'ordre infini en un point, elle est identiquement nulle.

On notera aussi que

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \ .$$

Exemple 4.2.11
La fonction $f : x \mapsto 1/(1-x)$ est développable en série entière en 0 (dans]-1,1[), et on a vu que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n \ .$$

On peut donc affirmer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} \ .$$

En itérant, on trouvera

$$\frac{2}{(1-x)^3} = f''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} \ .$$

> **Proposition 4.2.12**
> Si une fonction f est, pour $|x - x_0| < R$, la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x-x_0)^n$ (où R est le rayon de convergence de la série),
>
> $$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x-x_0)^n \ ,$$
>
> alors, f admet comme primitive la fonction F définie par
>
> $$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n (x-x_0)^{n+1} \ .$$
>
> et obtenue en prenant une primitive terme à terme (celle qui s'annule en x_0). Cette série entière a le même rayon de convergence.

Exemple 4.2.13
La fonction $f \ : \ x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière en 0. En effet f est, dans $]-1,1[$ la primitive de la fonction $g \ : \ x \mapsto -1/(1-x)$, et g est développable en série entière :

$$g(x) = -\sum_{n \geq 0} x^n \ .$$

En intégrant ce développement terme à terme entre 0 et x, on trouve que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \ .$$

Notons que cela donne immédiatement par changement de variables

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n} \ .$$

Séries entières et équations différentielles

On se contente de traiter un exemple sous la forme de l'exercice suivant dont on donne une solution abrégée :

Exercice
On cherche le développement en série entière à l'origine de la fonction $f \ : \ x \mapsto (\arcsin x)^2$.

0. Discuter le domaine de définition de la fonction f.
On choisit $\arcsin x$ *comme la fonction réciproque de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni \theta \mapsto \sin\theta \in]-1, +1[$.

1. Calculer f' et f''. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad (1-x^2)y'' - xy' = 2 \ .$$

On dérive par rapport à x, *l'identité* $\sin(\arcsin x) = x$ *et on remarque qu'avec notre choix de* $\arcsin x$ *on a* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Trouver toutes les séries entières solutions de (*).
Si on pose $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et si* R *désigne le rayon de convergence (encore inconnu) de cette série entière, on peut dériver terme à terme et identifier les coefficients d'une puissance particulière de* x x^p. *On fera attention pour les premiers termes !! On trouve, pour* $p = 0$, $a_2 = 1$, *et pour* $p > 0$

$$(p+2)(p+1)a_{p+2} - p(p-1)a_p - pa_p = 0 \ .$$

Ceci conduit à

$$a_{p+2} = \frac{p^2}{(p+1)(p+2)} a_p \ .$$

3. En remarquant que f est paire et que $f(0) = 0$, chercher les fonctions y développables en série entière solutions de l'équation qui vérifient ces deux conditions supplémentaires. Montrer que la solution est unique et calculer le rayon de convergence de la série obtenue ?
On s'intéresse aux séries entières paires, ce qui conduit à $a_p = 0$ *pour* p *impair et on souhaite aussi avoir* $y(0) = 0$, *ce qui conduit à* $a_0 = 0$. *Avec ces deux conditions, il n'y a qu'une seule série entière satisfaisant cette équation (*). Il est facile de voir que la série entière de terme général* $a_{2q} y^q$ *a comme rayon de convergence* 1 *(critère de d'Alembert). On en déduit facilement que la série entière de terme général* $a_p x^p$ *a comme rayon de convergence* 1.

4. Montrer que f est égale à la somme de sa série entière sur $]-1, +1[$.
Il est plus facile de passer par la vérification que f' *est égale à* y'. *Ce sont en effet deux solutions d'une même équation différentielle du premier ordre vérifiant la même condition en* 0.

4.2.6 Un aperçu du cas complexe

Nous avons traité pour simplifier le cas où la variable x était réelle. On peut également considérer le cas d'une variable complexe z.

Définition 4.2.14
Soit une série entière de terme général $a_n z^n$. On définit son domaine de convergence comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que la série $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Il est intéressant de considérer la série entière $(\frac{1}{n!}z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme est $\exp z$ et dont le rayon de convergence est $+\infty$. Dans le cas complexe, la série entière est convergente dans le disque ouvert de rayon R et divergente en dehors du disque fermé de rayon R. On ne peut rien dire sur ce qui se passe sur le cercle de rayon R.

En utilisant la notion de domaine de convergence introduite ci-dessus, on observe que le domaine de convergence $\mathcal{D}$ satisfait :

$$D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,R)}\ .$$

L'étude de la série entière de terme général $\frac{1}{n}z^n$ est à ce titre éclairante : le rayon de convergence est 1 et la série converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$. L'étude des autres points sur le cercle unité est plus délicate.

Remarque 4.2.15
Les fonctions de la variable $z = x + iy$ qui s'écrivent comme la somme de séries entières dans des ensembles qui sont des réunions de disques ouverts héritent de beaucoup de propriétés. Par exemple, si ces fonctions sont non identiquement nulles elles ont des zéros isolés. Elles sont appelées holomorphes.

Deuxième partie

Analyse de Fourier

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Séries trigonométriques

5.1.1 Applications périodiques

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ (on dit aussi T-périodique) si, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{P}(T)$ des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques ; la fonction $x \mapsto e^{ix/T}$ est $(2\pi/T)$-périodique. Une fonction définie sur un intervalle de longueur T peut bien sûr être identifiée à une fonction T-périodique.

On utilisera constamment la propriété élémentaire suivante.

Proposition 5.1.1
Soit f une application T-périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et l'on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \;.$$

5.1.2 Séries trigonométriques

Définition 5.1.2
Une série de fonctions de terme général f_n est appelée série trigonométrique, lorsqu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels, telles que $f_0(t) = a_0$ pour tout t et, pour tout $n \geq 1$ et tout t, on ait

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \;.$$

Nous utiliserons souvent la notation exponentielle pour les séries trigonométriques. Posant en effet $c_0 = a_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad \text{et} \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \;.$$

On obtient la relation

$$f_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} \,,$$

qui conduit, au moins formellement, à l'écriture :

$$\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} \,.$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = c_0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation dont l'interprétation précise fait l'objet de la définition suivante.

Définition 5.1.3
On appelle, pour $p \in \mathbb{N}$, p-ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$S_p = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n\, e^{int}$$

On dira que la série est convergente (simplement, uniformément) lorsque la suite de fonctions (S_p) converge (simplement, uniformément). On dira que la série converge normalement si la série de fonctions $\left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right)$ converge normalement.

Lorsque les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, i.e. lorsque les séries $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont absolument convergentes, on voit immédiatement que la série trigonométrique correspondante converge normalement. La fonction somme est alors (d'après le résultat général sur les séries de fonctions) une fonction continue et 2π-périodique.

Proposition 5.1.4
L'ensemble $\mathcal{D}$ des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation $t \mapsto t+2\pi$, et la fonction somme S est 2π-périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle I de $\mathcal{D}$, la fonction S est continue sur I. C'est notamment le cas lorsque les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes.

Exercice 5.1.5
Soit (b_n) une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On note $R_n(x)$ le n-ième reste de la série pour laquelle on n'a gardé que les termes en sinus :

$$\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx).$$

Calculer $2\, R_n(x) \sin(x/2)$, et en déduire la convergence simple de cette série sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de $2\pi\mathbb{Z}$. En déduire la nature de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Lorsque la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ (donc sur $\mathbb{R}$), il existe une relation simple entre les coefficients c_n et la fonction somme de cette série.

Proposition 5.1.6
Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \; e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$ et S sa fonction somme. Alors la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-int}\,dt\ .$$

Si de plus la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n e^{int}$ des dérivées est normalement convergente, de somme S_1, la fonction S est dérivable avec $S' = S_1$.

Preuve:
La fonction somme S est continue par la théorie générale et 2π-périodique. De plus on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ipt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}\,dt\ .$$

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est un **Exercice** facile.

Lemme 5.1.7
Soit k un entier relatif et $I(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt$. On a

$$I(k) = \begin{cases} 0 & si\ k \neq 0 \\ 2\pi & si\ k = 0 \end{cases}\ .$$

La dérivabilité de S est directement donnée par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions. □

5.2 Séries de Fourier

Pour alléger les notations, nous travaillerons avec des fonctions 2π-périodiques, c'est-à-dire que nous prenons $T = 2\pi$. L'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique cependant aux fonctions T-périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions 2π-périodiques $t \mapsto \cos(nt)$, $t \mapsto \sin(nt)$ et $t \mapsto e^{int}$ respectivement par les fonctions $t \mapsto \cos(2\pi nt/T)$, $t \mapsto \sin(2\pi nt/T)$ et $t \mapsto e^{2i\pi nt/T}$ qui sont T-périodiques. On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur chaque période. On notera que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$ si on se limite aux fonctions à valeurs réelles).

5.2.1 Coefficients de Fourier

Définition 5.2.1
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes c_n définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \ .$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont les nombres définis par

$$\begin{array}{ll} a_0(f) & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt \\ a_n(f) & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \ , \ \text{pour } n > 0 \ , \\ b_n(f) & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \ , \ \text{pour } n > 0 \ . \end{array}$$

On convient parfois aussi que $b_0(f) = 0$, pour faciliter l'écriture de certaines formules.

Exercice 5.2.2
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 5.2.3
Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ et g la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $g(t) = f(t + a)$ où a est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.

Remarque 5.2.4
Si S est la somme d'une série trigonométrique $\sum c_n e^{int}$ normalement convergente, les coefficients de Fourier trigonométriques de S sont les c_n (cf. la Proposition 5.1.6).

Voici d'abord quelques propriétés très simples de ces coefficients de Fourier.

1. La valeur moyenne de f sur une période est égale à a_0.
2. Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacé par n'importe quel intervalle de longueur 2π.
3. Si f est une fonction à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels et $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n.
4. Si f est une fonction paire, tous les b_n sont nuls. De même si f est impaire, tous les a_n sont nuls.
5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$.
6. L'application $\mathcal{E} \ni f \mapsto c_n(f) \in \mathbb{C}$ est linéaire :

$$c_n(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot c_n(f) + \mu \cdot c_n(g) \ .$$

7. On a l'estimation :

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|dt \ .$$

La propriété suivante porte le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

> **Proposition 5.2.5**
> Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. Les suites $(a_n(f))$, $(b_n(f))$, $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ $(n \in \mathbb{N})$ des coefficients de Fourier de f sont convergentes et ont pour limite 0.

Preuve:
Compte tenu du point (5) précédent, il est clair qu'il suffit de prouver la proposition pour les suites (c_n) et (c_{-n}) $(n \in \mathbb{N})$. De plus puisque $\overline{c}_n(f) = c_{-n}(\bar{f})$, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour la suite (c_{-n}). Pour les fonctions $f = \sum_{j=0}^{N} K_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}$ en escaliers, on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K_j e^{int} dt = \frac{1}{2in\pi} \sum_{j=0}^{N} K_j (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}) \ ,$$

et donc la majoration

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^{N} |K_j| \ .$$

Pour une fonction continue par morceaux f sur $[-\pi, +\pi]$ quelconque, la proposition découle alors du fait qu'il existe (exercice) une suite (ϕ_k) de fonctions en escaliers telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_k(x)| dx \to 0$ quand $n \to +\infty$. On utilisera ici que :

$$|c_n(f - \phi_k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t) - \phi_k(t)| dt \ .$$

□

Deux fonctions distinctes peuvent-elles avoir les mêmes coefficients de Fourier ? En appliquant le résultat suivant à leur différence, on voit qu'il n'en est rien si ces fonctions diffèrent en un point où elles sont toutes deux continues :

> **Proposition 5.2.6**
> Soit f une fonction continue par morceaux périodique. S'il existe un point $c \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(c) \neq 0$ et f soit continue en c, alors les coefficients de Fourier de f ne sont pas identiquement nuls.

Remarque 5.2.7
En particulier, l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui associe à une fonction continue $(2\pi)-$périodique la suite de ses coefficients de Fourier est injective.

L'étudiant pourra admettre ces résultats. Nous donnons la preuve pour le lecteur curieux.

Preuve:
On suppose que $f(c) = a > 0$. Puisque f est continue au point c, il existe un réel $\alpha > 0$ assez petit tel que pour tout $x \in]c-\alpha, c+\alpha[$, on ait $f(x) \geq a/2$. Supposons que tous les coefficients de Fourier de f soient nuls. Alors pour tout polynôme trigonométrique $P(t)$, positif sur $[c-\alpha, c+\alpha]$, on a

$$0 = \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)P(t)dt \geq \frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P(t)dt + \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P(t)dt$$

Considérons alors le polynôme trigonométrique :

$$P(t) := P_n(t) := (1 + \cos(t-c) - \cos(\alpha))^n \ .$$

Sur $]c-\alpha, c+\alpha[$, on a $\cos(t-c) > \cos(\alpha)$, donc $P_n(t) \geq 1$, et, pour tout n,

$$\frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P_n(t)dt \geq a\alpha \ .$$

Pour $t \in [c-\pi, c+\pi] \backslash [c-\alpha, c+\alpha]$, on a par contre

$$(1 + \cos(t-c) - \cos(\alpha)) < 1 \ ,$$

et donc $P_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Si la suite $(P_n)_n$ convergeait uniformément vers 0 sur cet intervalle, on pourrait passer à la limite et écrire

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt\right)\\ &= \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt = 0 \ .\end{aligned}$$

On aboutirait à l'inégalité : $0 \geq a\alpha$, ce qui est absurde. Malheureusement la suite (P_n) ne converge pas uniformément sur $[c-\pi, c+\pi]\backslash[c-\alpha, c+\alpha]$. Mais c'est le cas sur $[c+\alpha+\delta, c+\pi]$, où $\delta > 0$ est aussi petit que l'on veut, ce qui conduit à la preuve suivante. On remarque que, pour tout n, on a :

$$\begin{aligned}|\int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt| &\leq \delta\sup|f| + |\int_{c+\alpha+\delta}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt|\\ &\leq \delta\sup|f| + \pi\sup|f|\sup_{t\in[c+\alpha+\delta,c+\pi]}|P_n(t)|\\ &\leq \delta\sup|f| + \pi\left(\max(\cos\alpha, 1-\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)\right)^n \ .\end{aligned}$$

Pour montrer que la limite est zéro, on choisit successivement, $\epsilon > 0$ étant donné, $\delta > 0$, de sorte que $\delta\sup|f| < \frac{\epsilon}{2}$, puis $N \in \mathbb{N}$, tel que $\pi\left(\max(\cos\alpha, 1-\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)\right)^n < \frac{\epsilon}{2}$, pour $n \geq N$. □

5.2.2 Séries de Fourier. Cas des fonctions régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique f dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. Nous nous intéressons maintenant à la série trigonométrique dont les coefficients sont précisément les $c_n(f)$ et que l'on appelle *série de Fourier de f*. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est f. La réponse est très délicate dans le cas où l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction f. Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. L'ensemble des résultats qui suivent repose sur la

Proposition 5.2.8
Soit k un entier strictement positif, f une fonction 2π-périodique, $(c_n(f))$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f. Si f est k fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $M > 0$ tel que pour, tout $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, on ait

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k} .$$

Preuve:
Supposons que f est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque $f(2\pi) = f(0)$, on obtient :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int}\, dt ,$$

et donc :

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} \sup\{|f'(t)|, t \in [0, 2\pi]\} .$$

Dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, il suffit de montrer par récurrence de la même manière que :

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) e^{-int}\, dt ,$$

de sorte que

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|^k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|\, dt .$$

On peut donc prendre plus précisément $M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|\, dt$ ou $M = \sup_t |f^{(k)}(t)|$. $\square$

Proposition 5.2.9
Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier de f est normalement convergente et sa somme est f.

Preuve:
Puisque l'on a $|c_n(f)| \leq M/n^2$, la série trigonométrique $\sum c_n(f) e^{int}$ est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme S sont alors égaux à ceux de la fonction f. Puisque f et S sont continues, la proposition 5.2.6 entraine l'égalité $f = S$. $\square$

Arrivés à ce point, nous pouvons expliquer certains termes constamment utilisés en analyse du signal comme en physique. La Proposition 5.2.9 dit que toute fonction $f(t)$ 2π-périodique suffisamment régulière peut s'écrire (à une constante près) comme superposition d'*harmoniques*, c'est à dire de fonctions de la forme $a_k \cos(kx)$ et $b_k \sin(kx)$. Ces fonctions ont $T = 2\pi/k$ pour période, et pour fréquence $\nu = 1/T = k/2\pi$. Le *spectre* du signal $f(t)$ est alors l'ensemble des entiers k pour lesquels $c_k \neq 0$, et *l'énergie* du signal à la fréquence $k/2\pi$ est par définition le nombre réel positif

$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

Exercice 5.2.10
Soit f la fonction paire et 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques et montrer l'égalité

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \, .$$

5.2.3 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Nous abordons maintenant le problème difficile de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières. Dans ce cas la convergence uniforme n'a pas toujours lieu et nous devrons nous contenter d'un théorème de convergence simple dû à G. Dirichlet.

On dira qu'une fonction f continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continument dérivable par morceaux (on dit aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi[$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a_j, b_j[$ tels que f est dans chacun de ces intervalles $]a_j, b_j[$ la restriction à $]a_j, b_j[$ d'une fonction de classe C^1 sur $[a_j, b_j]$.

Proposition 5.2.11 (Théorème de Dirichlet)
Soit f une fonction $(2\pi)-$périodique, continûment dérivable par morceaux et $x_0 \in [0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement en x_0 et sa somme est

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

où $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x_0.
Si de plus f est continue en x_0, sa série de Fourier converge simplement en x_0 vers $f(x_0)$.

Preuve: Admise. □

Remarque 5.2.12
On donnera dans le prochain chapitre des théorèmes plus généraux en introduisant une notion plus faible de convergence.

Chapitre 6

Notions Hilbertiennes

6.1 Espace vectoriel normé

Définition 6.1.1
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application $x \mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $||x|| \geq 0$, $\forall x$;
2. $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
3. $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Définition 6.1.2
Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 6.1.3
On peut définir différentes normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$: pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'application :

$$x \mapsto |x|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme. Le lecteur pourra facilement le vérifier pour $p = 1$ et verra plus tard une démonstration du cas $p = 2$. C'est aussi le cas de l'application

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto |x|_\infty = \sup_i |x_i| \, .$$

Exemple 6.1.4
Sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ $C^0([a, b])$, les applications $f \mapsto \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ et $f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$ définissent une norme.

Dans tout sous-ensemble Ω d'un espace vectoriel normé E on peut mesurer la “distance” entre deux éléments de Ω en posant

$$d(x,y) = ||x-y||_E \,. \tag{6.1.1}$$

De manière générale :

Définition 6.1.5
On appelle distance sur un ensemble Ω toute application qui vérifie :

1. $d(x,y) > 0$ pour tout x, y tels que $x \neq y$;
2. $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$;
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Lorsque l'on dispose d'une distance sur un ensemble Ω, on peut définir la notion de limite d'une suite dans Ω :

Définition 6.1.6
On dit qu'une suite (x_n) de points de Ω converge vers une limite $\ell \in \Omega$, si la suite $(d(x_n,\ell))_n$ tend vers 0.

Exemple 6.1.7
La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$. La distance associée est $d(x,y) = |x-y|$. La notion de suite convergente est celle que nous avons vu au Chapitre 1 de ce cours.

6.2 Espaces préhilbertiens

6.2.1 Produit scalaire.

Définition 6.2.1
Un produit scalaire sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ est défini par une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$: $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ telle que

1. $x \mapsto \langle x,y \rangle$ est une application linéaire, pour tout $y \in E$ fixé.
2. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$;
3. $\langle x,x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$.

Définition 6.2.2
Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple 6.2.3
Sur $E = \mathbb{C}^m$, $(z,z') \mapsto \sum_j z_j \cdot \overline{z'_j}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^m$. On parle d'espace hermitien.
Sur $E = \mathbb{R}^m$, $(x,x') \mapsto \sum_j x_j \cdot x'_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$. On parle d'espace euclidien.

Exemple 6.2.4
Sur $E = \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$, l'application $(f,g) \mapsto (\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt)$ définit un produit scalaire.

Notons que, si on remplace $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$, par l'espace des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{C}$, ce n'est plus un produit scalaire. Si, en effet, une fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points où elle est non-nulle. Le produit scalaire $\langle f, f\rangle$ est nul sans que la fonction soit identiquement nulle.

Le plus sage sera, pour beaucoup de problèmes, de considérer que ces fonctions telles que $\langle f, f\rangle$ sont "nulles" (comme on l'a vu dans le cas des séries de Fourier) mais c'est une autre histoire que l'on racontera (un peu et) plus tard.

6.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, joue un rôle très important dans l'analyse hilbertienne.

Proposition 6.2.5
Dans un espace préhilbertien on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}\;.$$

Preuve:
On part de la propriété :

$$\langle x+\lambda y\,,\, x+\lambda y\rangle \geq 0\;,\;\forall \lambda \in \mathbb{K}\;.$$

Si $y \neq 0$, on peut réécrire cette inégalité sous la forme :

$$\langle x\,,\,x\rangle - \frac{\langle x\,,\,y\rangle\cdot\langle y\,,\,x\rangle}{\langle y\,,\,y\rangle} + \langle y\,,\,y\rangle\left(\lambda + \frac{\langle x\,,\,y\rangle}{\langle y\,,\,y\rangle}\right)\left(\overline{\lambda} + \frac{\overline{\langle x\,,\,y\rangle}}{\langle y\,,\,y\rangle}\right) \geq 0\;.$$

On prend alors :

$$\lambda = -\frac{\langle x\,,\,y\rangle}{\langle y\,,\,y\rangle}\;.$$

Lorsque $y = 0$, la vérification de l'inégalité est directe. □

6.2.3 Norme préhilbertienne

Un espace préhilbertien est automatiquement muni d'une norme définie par :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\;.$$

La vérification que c'est une norme est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On vérifie en effet que :

$$\sqrt{\langle (x+y),(x+y)\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\;,$$

en élevant au carré.

Remarque 6.2.6
On peut retrouver, dans le cas d'une norme associée à un produit scalaire, le produit scalaire à partir de la norme. Dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, il suffit en effet de remarquer l'identité :

$$\sqrt{\langle (x+y),(x+y)\rangle} - \sqrt{\langle (x-y),(x-y)\rangle} = 4\langle x, y\rangle\;,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut jouer avec $x+y$, $x-y$, $x+iy$ et $x-iy$.

Exemple 6.2.7
L'application $f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)$ définit une norme sur $C^0([a,b];\mathbb{C})$. On parle de norme L^2.

6.3 Orthogonalité

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien.

Définition 6.3.1
On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $\langle x, y\rangle = 0$. Plus généralement, deux sous-espaces vectoriels M et N de E sont orthogonaux si pour tout $x \in M$ et $y \in N$, on a $\langle x, y\rangle = 0$.

On dit qu'une famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ d'éléments de E est orthonormée lorsque $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$, où le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En d'autres termes, une famille orthonormée est une famille de vecteurs de norme 1, deux à deux orthogonaux.

Proposition 6.3.2 *Procédé de Gram-Schmidt.*
Dans un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ de dimension finie, on peut toujours construire une base orthonormée.

Preuve:
Soient $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ m vecteurs linéairement indépendants constituant une base de $\mathcal{H}$. On pose $x_1 = \frac{1}{||y_1||} y_1$. On cherche ensuite x_2 orthonormé, orthogonal à y_1 dans l'espace de dimension 2 engendré par y_1 et y_2, soit encore, compte-tenu de la première étape :

$$x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}y_2 \ .$$

L'orthogonalité de x_2 et x_1, donne l'équation :

$$0 = a_{12} + a_{22}\langle y_2, x_1 \rangle \ .$$

On en déduit :

$$x_2 = a_{22}(-\langle y_2, x_1 \rangle x_1 + y_2) \ .$$

Il est ensuite facile de trouver a_{22} tel que $||x_2|| = 1$, en observant que le vecteur $(-\langle y_2, x_1 \rangle x_1 + y_2$ est non nul (car y_1 et y_2 sont linéairement indépendants).
Le cas général se traite par récurrence. Mais introduisons quelques notations. Pour tout $k \geq 1$, on désigne par $E^{(k)}$ l'espace engendré par $(y_1, \cdots, y_k)$. L'idée géométrique est que, si on a trouvé une base orthonormée $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ de $E^{(n-1)}$, on remarque que $(E^{(n-1)})^\perp \cap E^{(n)}$ est un espace vectoriel de dimension 1 et on choisit comme vecteur x_n un générateur de cet espace tel que $||x_n|| = 1$.
De manière plus calculatoire, on cherche d'abord z_n dans $E^{(n)}$ sous la forme :

$$z_n = y_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j \ ,$$

et on exprime d'abord l'orthogonalité de z_n à $E^{(n-1)}$ par

$$0 = \langle z_n \ , \ x_k \rangle = \langle y_n \ , \ x_k \rangle + a_{nk} \ ,$$

pour $k = 1, \cdots, n-1$. On obtient :

$$z_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n \ , \ x_k \rangle x_k .$$

On choisit ensuite $x_n = a_{nn} z_n$, où la constante a_{nn} est déterminée en imposant $\|x_n\| = 1$.
□

Dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime simplement à partir des coordonnées des vecteurs. On peut facilement prouver la

Proposition 6.3.3
Soit E un espace préhilbertien de dimension finie et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, si $x \in E$ et $y \in E$, avec $x = \sum x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$, on a :

$$\sum_i x_i \cdot \overline{y_i} = \langle x, y \rangle$$

6.4 Théorème de la projection orthogonale

Définition 6.4.1
Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel. On dit que $x_0 \in F$ est une meilleure approximation de x dans F si :

$$\forall y \in F,\ ||x - x_0|| \leq ||x - y|| \ . \tag{6.4.1}$$

L'exemple type est, dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien, le cas où F est une droite passant par l'origine.

Proposition 6.4.2

1. Le vecteur x_0 est une meilleure approximation de x dans F si et seulement si $(x - x_0)$ est orthogonal à F.
2. S'il existe une meilleure approximation, elle est unique.
3. Enfin si F est de dimension finie m, la meilleure approximation x_0 existe. Si (e_i) est une base orthonormée de F $(i = 1, \cdots, m)$, x_0 est donné par :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \, , \, e_i \rangle e_i \ .$$

Preuve:
On se limite au cas réel. Pour le premier point on observe que si x_0 est la meilleure approximation, l'inegalité (6.4.1) (ou plutôt sa version $||x - x_0||^2 \leq ||x - y||^2$) implique, en développant le terme de droite :

$$||x - x_0||^2 \leq ||x - x_0||^2 + ||x_0 - y||^2 + 2\langle x - x_0, x_0 - y\rangle \ , \ \forall y \in F \ .$$

On en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout u dans F :

$$0 \leq t^2||u||^2 + 2t\langle x - x_0, u\rangle \ .$$

On suppose d'abord $t > 0$. On divise par t, puis on prend dans l'inégalité obtenue la limite $t \to 0$ ($t > 0$). On a alors :

$$0 \leq \langle x - x_0, u\rangle \ , \ \forall u \in F \ .$$

Changeant u en $-u$, on obtient l'inégalité inverse et donc :

$$\langle x - x_0, u\rangle = 0 \ , \ \forall u \in F \ .$$

Inversement, si $x - x_0$ est orthogonal à F, on a pour tout $y \in F$:

$$||x - y||^2 = ||x - x_0||^2 + ||x_0 - y||^2 \geq ||x - x_0||^2 \ .$$

Pour le deuxième point, on observe que si x_0 et x_0' sont deux meilleures approximations distinctes de x, alors $x_0 - x_0'$ est dans F et on montre qu'il est aussi dans $F^\perp$ en écrivant : $x_0 - x_0' = (x_0 - x) - (x_0' - x)$. Ceci conduit à une contradiction.
Pour le troisième point, il suffit d'écrire l'orthogonalité de $(x - x_0)$ à e_i (pour $i = 1, \cdots, m$).
□

L'unicité permet donc de parler de **la** meilleure approximation.

Le point x_0 est aussi appelé la **projection orthogonale** de x sur F. On peut montrer que l'application qui associe à x sa projection orthogonale x_0 est linéaire. Elle est souvent notée Π_F.

On notera que :

$$||x||^2 = ||\Pi_F x||^2 + ||x - \Pi_F x||^2 \ . \tag{6.4.2}$$

Comme corollaire, nous obtenons l'inégalité de Bessel.

Proposition 6.4.3
Si (e_i) est un système orthonormé, alors

$$\sum_i |x_i|^2 \leq ||x||^2 \ ,$$

avec $x_i = \langle x \, , \, e_i\rangle$.

Le cas où le système est infini ($i \in \mathbb{N}^*$) peut aussi être traité en montrant d'abord, pour tout N, l'inégalité pour $i = 1, \cdots, N$.

Remarque 6.4.4
Notons que l'on peut considérer plus généralement ce problème de la meilleure approximation dans

le cas où, à la place de F, on considère des ensembles plus généraux Ω convexes, complets[1].

Exercice 6.4.5
On peut reprendre la démonstration du procédé de Gram-Schmidt en utilisant la notion de projecteur orthogonal. On considère (avec les notations de la preuve) la projection de y_n sur l'espace $E^{(n-1)}$:

$$\Pi_{E^{(n-1)}} y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n \ , \ x_k \rangle x_k \ .$$

On observe que le vecteur $y_n - \Pi_{E^{(n-1)}} y_n$ est orthogonal à $E^{(n-1)}$ d'après le théorème de la projection orthogonale. Multipliant par un scalaire a_{nn}, on obtient x_n.

Exercice 6.4.6
On considère l'espace préhilbertien $C^0([0,1];\mathbb{C})$ muni de la norme $f \mapsto \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}$. On peut prendre comme $F^{(m)}$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à m. Dans un premier temps, on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base : $(1, t, t^2, \cdots, t^m)$ et construire ainsi une base orthonormale de $F^{(m)}$. Etudier le projecteur $\Pi_{F^{(m)}}$.

6.5 Convergence en moyenne quadratique

Nous nous intéressons maintenant à l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. Le résultat principal dans ce domaine est que pour une notion naturelle de distance entre les fonctions de $\mathcal{E}$, le polynôme trigonométrique de degré n fixé le plus proche d'une fonction f est précisément la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

Nous introduisons donc d'abord une notion adéquate de "distance" entre les fonctions de $\mathcal{E}$ périodique et continues par morceaux sur une période, qui a l'avantage par rapport à la distance habituelle

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x) - g(x)|$$

(associée à la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$) de n'être pas sensible à d'éventuelles discontinuités isolées. On pose en effet, pour deux fonctions f et g de $\mathcal{E}$,

$$d_2(f,g) = (\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt)^{1/2}$$

et on appelle ce nombre écart quadratique moyen entre f et g. Il s'agit de la "distance" associée à la "norme" préhilbertienne introduite comme exemple dans un paragraphe précédent. L'introduction des guillemets est due au fait que l'écart quadratique moyen entre deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points est nul alors que les fonctions sont distinctes.

Proposition 6.5.1
Si une suite de fonction (f_n) de $\mathcal{E}$ converge vers une fonction f de $\mathcal{E}$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$, alors cette suite converge vers f en écart quadratique moyen, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f, f_n) = 0$$

[1]Cette définition sera donnée plus loin. On veut que toute suite de Cauchy de Ω converge dans Ω

Preuve :
L'hypothèse de convergence de la suite (f_n) s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Or on a

$$d_2(f, f_n) \le \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| (\int_0^{2\pi} dt)^{1/2}$$

ce qui montre la proposition. □

Exercice 6.5.2

Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie, même si on travaille dans l'espace des fonctions continues. Indication : considérer la suite de fonctions f_n définie par :

$$f_n(x) = \sqrt{(1-nx)_+}\ ,$$

où $y_+ = \sup(y, 0)$ et comparer $d_2(f_n, 0)$ et $d_\infty(f_n, 0)$.

> **Proposition 6.5.3**
> Soit f une fonction périodique de période 2π, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q(x)$ de degré inférieur à n, le polynôme de Fourier de degré n est le seul pour lequel l'écart quadratique moyen $d_2(f, Q)$ atteint sa plus petite valeur, et l'on a
>
> $$d_2(f, P_n)^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

Preuve :
C'est juste (dans le cas où f est continue) une application du théorème de la projection orthogonale. On prend comme espace préhilbertien $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions continues périodiques et comme espace F l'espace P_n de dimension $m = 2n+1$ des polynômes trigonométriques d'ordre inférieur ou égal à n.

On remarque aussi que les fonctions $t \mapsto \sqrt{2\pi}\exp ikt$ $(k = -n, -n+1, \dots, n-1, n)$ constituent une base orthonormale de P_n.

Dans le cas général, il y a une petite difficulté liée au fait que la distance d_2 n'est pas tout à fait une distance. On s'abstiendra de l'analyser en détail.

L'**Inégalité de Bessel** prend la forme suivante :

> **Proposition 6.5.4**
> Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est convergente et l'on a
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Voici enfin la célèbre formule de Parseval qui exprime en termes physiques que l'énergie d'un signal est égal à la somme des énergies des harmoniques qui le composent.

Proposition 6.5.5
Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^2. On a l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve:
On a vu que la série de Fourier des fonctions 2π-périodique de classe C^2 était normalement convergente. Ceci implique que $d_\infty(f, P_n)$ tend vers 0 où P_n désigne le n-ième polynôme de Fourier de f. Avec la proposition 6.5.1 on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f, P_n) = 0\ .$$

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité $(*)$ de la proposition précédente. □

La preuve de ce corollaire montre que la formule de Parseval est vraie dès que la série de Fourier de f converge normalement, par exemple pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui sont continues. On peut aussi montrer (mais c'est beaucoup plus difficile !) que :
La formule de Parseval est vraie même pour les fonctions qui sont seulement continues par morceaux.

Chapitre 7

Transformation de Fourier : un parfum

7.1 Un point de vue formel

Ce chapitre a un statut particulier. Dans les cursus universitaires usuels, ceci est présenté en licence voir en maîtrise. En particulier, l'étudiant n'a vu (dans les trois premiers semestres de l'université) qu'une théorie très élémentaire de l'intégration (intégrales sur un intervalle). Nous avons expliqué dans ce cours comment généraliser "un peu" cette notion intégrale (voir le chapitre sur les intégrales généralisées). Cette généralisation reste insuffisante mais nous permettra toput de même d'expliquer comment les choses se passent. La théorie de l'intégrale de Lebesgue est difficilement contournable pour définir proprement la transformation de Fourier. L'idée de présenter cette transformation de Fourier aussi tôt est bien sûr motivée par les connexions avec la théorie du signal et les applications à la physique.

7.1.1 Définition et objectifs

Notre objectif est de donner un sens à la définition qui suit.

Définition 7.1.1
On appelle transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction$\hat{f}$ définie par :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ikt}\, dt,\ \ k \in \mathbb{R}. \tag{7.1.1}$$

On note $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, c'est-à-dire l'application qui à f associe $\hat{f}$: $\mathcal{F}f(k) = \hat{f}(k)$.

Il est clair que cette intégrale généralisée n'est pas toujours convergente, et l'un des principaux objectifs de ce chapitre est de décrire des ensembles de fonctions pour lesquelles cette définition a un sens. L'autre objectif est d'obtenir comme pour les fonctions périodiques, une représentation de la fonction f en terme des valeurs de sa transformée de Fourier. Plus précisément, on veut donner un sens à la formule suivante, dite formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk \tag{7.1.2}$$

Pensant à la formule de Parseval pour les séries de Fourier, et à la notion physique d'énergie d'un signal, on veut aussi montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk\ . \tag{7.1.3}$$

Cette égalité porte le nom de formule de Plancherel.

Pour commencer, on peut définir la transformée de Fourier de fonctions qui sont à support compact, c'est-à-dire de fonctions qui sont nulles en dehors d'un intervalle $[a,b]$: l'intégrale ci-dessus n'est alors plus une intégrale généralisée, et il suffit que la fonction f soit continue (ou même continue par morceaux), pour que la définition 7.1.1 ait un sens. Cependant, si f est à support compact, on peut montrer que la fonction $\hat{f}$ ne peut pas l'être, et l'on comprend tout de suite que si l'on veut une formule d'inversion, on ne peut pas se contenter de considérer de telles fonctions.

7.1.2 Quelques propriétés de la Transformation de Fourier.

On énonce ici quelques propriétés des transformées de Fourier de fonctions qui sont $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. On note $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions. On considérera plus loin d'autres types de fonctions, et l'on précisera lesquelles des propriétés ci-dessous restent vraies.

1. Transformée de Fourier et translation.

   On désigne par T_a l'opérateur de translation par a qui est défini par :

   $$(T_a f)(x) = f(x-a)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{7.1.4}$$

   On remarque d'abord que

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |T_a f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

   On dit que T_a est une isométrie pour la norme $\|\ \|_2$, où,

   $$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

   De plus, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

   $$\mathcal{F}T_a f(k) = e^{-iak}\mathcal{F}f(k)\ . \tag{7.1.5}$$

2. Transformée de Fourier et dérivation.

   En intégrant par parties, on vérifie que $\mathcal{F}(f')(k) = ik\hat{f}(k)$, ce que l'on écrit un peu rapidement :

   $$\mathcal{F} \circ \frac{d}{dx} = ik \circ \mathcal{F}. \tag{7.1.6}$$

3. Transformée de Fourier et multiplication.

   En admettant que l'on peut dériver sous le signe somme d'une intégrale, on a aussi, notant g la fonction définie par $g(x) = xf(x)$, $\hat{g}(k) = i\hat{f}'(k)$, ce que l'on écrit, là encore un peu abusivement :

   $$\mathcal{F} \circ x = i\frac{d}{dk} \circ \mathcal{F} \tag{7.1.7}$$

   Par conséquent, la transformée de Fourier échange multiplication et dérivation (attention aux signes et au "i").
4. Transformée de Fourier et convolution.

   On définit la convolée de deux fonctions f et g par :

   $$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy\ .$$

   On note alors que :

   $$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f \times \mathcal{F}g\ . \tag{7.1.8}$$

Voici enfin une propriété très utile dans la pratique, qui restera vraie dans tous les espaces de fonctions que l'on décrira par la suite.

Proposition 7.1.2
Si f et g sont dans $\mathcal{C}_0^\infty$ alors on a :

$$\int f(t)\hat{g}(t)\ dt = \int \hat{f}(s)g(s)\ ds\ .$$

Preuve:
C'est une conséquence du théorème de Fubini qui permet de changer l'ordre dans lequel on fait les intégrations. On a en effet :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)(\int \exp -its\, g(s)\, ds)\ dt &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int\ f(t) \exp -its\, g(s)\, dsdt \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\int f(t)\ \exp -its\, dt)\, g(s)\ ds\ . \end{aligned}$$

□

7.2 Espace des fonctions à décroissance rapide

7.2.1 Transformée de Fourier d'une Gaussienne.

Voici maintenant un exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui n'est pas à support compact, mais dont la transformée de Fourier est bien définie. Pour cette fonction, on peut d'ailleurs montrer directement la formule d'Inversion de Fourier, ainsi que la formule de Parseval.

On appelle **gaussienne** la fonction définie par :

$$\text{Gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}, \tag{7.2.1}$$

Proposition 7.2.1
La fonction $Gauss$ (ou gaussienne) est sa propre transformée de Fourier, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}\ \mathsf{Gauss}(k) = \mathsf{Gauss}(k) \tag{7.2.2}$$

Preuve:
D'abord la convergence de l'intégrale généralisée ne pose pas de problème. Pour le calcul, on peut utiliser l'astuce suivante

$$\begin{aligned}
(\int \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx)^2 &= \int\int \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\ rdrd\theta \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} r\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\ dr \\
&= 2\pi\ .
\end{aligned}$$

Ceci nous permet aussi de calculer la transformée de Fourier en $k = 0$.
Nous remarquons maintenant que par simple dérivation on a :

$$\frac{d}{dx}(\text{ Gauss })(x) = -x \text{ Gauss } (x).$$

On montre aussi (via une intégration par parties) que :

$$\frac{d}{dk}(\mathcal{F}\text{ Gauss })(k) = -k(\mathcal{F}\text{ Gauss })(k),$$

et la théorie des équations différentielles nous dit qu'il existe une constante C telle que :

$$\mathcal{F}\text{ Gauss } (k) = C\text{ Gauss } (k)\ .$$

On calcule alors la constante en prenant $k = 0$. □

Exercice 7.2.2 *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*
Montrer que :

$$\int |f(x)|^2\,dx \leq 2(\int x^2|f(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}(\int k^2|\hat{f}(k)|^2\,dk)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{7.2.3}$$

Il suffit en effet d'utiliser l'identité, pour f dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int |f(x)|^2\,dx = 2\Re\int xf(x)\bar{f}'(x)\,dx\ ,$$

qui s'obtient par intégration par partie, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci conduit à

$$\int |f(x)|^2dx \leq 2(\int x^2|f(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int |f'(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

puis à utiliser la formule de Plancherel (voir plus loin).

7.2.2 Transformée d'une fonction dans $\mathcal{S}$

Nous sommes à la recherche d'un espace $\mathcal{S}$, contenant $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, et qui a la propriété d'être stable par la transformée de Fourier : $\mathcal{F}f$ doit être dans $\mathcal{S}$ lorsque f est dans $\mathcal{S}$. Le mathématicien Laurent Schwartz a proposé (vers 1945) l'espace suivant :

Définition 7.2.3
On dira que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si pour tout couple d'entiers (k, ℓ), la fonction $x \mapsto x^k f^{(\ell)}(x)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7.2.4
La fonction Gauss est dans $\mathcal{S}$, de même que n'importe quelle fonction de la forme $P(x)Gauss(x)$ où P est un polynôme.

Proposition 7.2.5
La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}$ sur lui-même. L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est linéaire. (Elle est de plus continue en un sens que nous ne préciserons pas.).

Enfin, toutes les propriétés vues au paragraphe précédent dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact restent vraies pour la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.

7.3 Espaces normés complets

On a déjà mentionné que $\mathbb{R}$ est complet (toute suite de Cauchy converge) et que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En fait on peut définir la notion de suite de Cauchy dans tout espace normé E. On dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \text{ tel que} \forall n \geq N \ , \ \forall m \geq N \ , \ ||x_m - x_n|| \leq \epsilon \ .$$

Il est facile de voir que toute suite convergente est de Cauchy. Par contre, c'est une propriété qui n'est pas toujours vérifiée que toute suite de Cauchy converge. Si cette propriété est vérifiée, on dit que l'espace normé est complet.
Par exemple l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ munie de la norme du sup est complet mais muni de la norme $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\,dt$, il n'est pas complet.
On va esquisser comment remédier à la situation dans le paragraphe suivant.

7.4 Autour de l'espace L^1

Nous continuons à élargir l'ensemble des fonctions dont on peut définir la transformée de Fourier. On part de la remarque élémentaire suivante

$$|f(x)e^{ikx}| = |f(x)|.$$

Autrement dit, en utilisant un critère de comparaison, on peut définir la transformée de Fourier de (essentiellement) n'importe quelle fonction f telle que $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Malheureusement l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ au sens de Riemann n'est pas complet, et on est amené à modifier la notion d'intégrale pour aboutir à un espace vectoriel L^1 qui lui est complet.

Compte-tenu de ce qui a été enseigné en intégration, il est impossible de donner une définition complète et mathématiquement parfaitement correcte des espaces L^1 et L^2. Cette théorie est due à Lebesgue. On va donc se contenter de donner une idée forcément un peu trompeuse mais qui permettra de comprendre et de justifier un certain nombre de calculs et de définitions.

7.4.1 Les propriétés souhaitées de L^1.

On va d'abord proposer un essai de définition de L^1. On se donne les contraintes suivantes :

1. Essayer de construire un espace vectoriel normé complet qui contienne des fonctions régulières C_0^∞ et pour lesquelles la norme est dans ce cas définie par
$$||f||_{L^1} = \int |f(t)|dt \;. \tag{7.4.1}$$
2. On veut savoir intégrer. Plus précisément, on veut avoir sur L^1 une application :
$$f \mapsto \int f(t)dt \;,$$
qui :
– coincide avec l'intégrale connue dans le cas où $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et
– est raisonnablement "continue" c'est à dire vérifiant :
$$|\int f(t)dt| \leq \int |f(t)|\, dt \;. \tag{7.4.2}$$
Cette continuité est essentielle pour retrouver, à partir des propriétés connues de l'intégrale sur des espaces de fonctions régulières, les propriétés de l'intégrale dans le cas général.
3. On ne veut pas distinguer des fonctions qui sont "presque égales". Ce qui nous intéresse, c'est le résultat obtenu après intégration.
4. $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L^1. On entend par là que tout f dans L^1 est limite d'une suite f_n avec $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Bien entendu, on souhaite que tous les efforts de généralisation de l'intégrale soient pris en compte, en particulier tout ce que nous avons fait autour de l'intégrale d'une fonction continue, d'une fonction continue par morceaux ou des intégrales généralisées.

Pour ce qui est du premier item, on veut que dans cet espace les suites de Cauchy convergent. Si on se souvient de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, on essayera de faire un peu la même chose pour L^1 à partir de l'espace préhilbertien $C_0^\infty(\mathbb{R})$ muni de la norme L^1.

Pour ce qui est du troisième item, on a déjà vu que pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, l'intégrale ne changeait pas si on changeait la fonction en un nombre fini de points. Dans cet espace L^1, on ne veut pas distinguer deux fonctions f et g telles que $\int |f(t) - g(t)|dt = 0$. L'espace L^1 est donc un **espace de classes de fonctions.**

Quelques propriétés supplémentaires seront aussi utiles. On souhaite que :

1. L'application $f \mapsto \int f dt$ soit linéaire.
2. Pour toute fonction ϕ continue à support compact, ϕf doit être dans L^1 et

$$|\int \phi f dt| \leq ||f||_{L^1} \sup |\phi| \; . \tag{7.4.3}$$

On veut d'ailleurs que cette dernière inégalité soit encore vraie pour une fonction ϕ continue et bornée.

LE RESULTAT DIFFICILE QUE NOUS ADMETTONS EST QUE CET ESPACE EXISTE.

7.4.2 Exemples de fonction dans L^1

Exemple 7.4.1
La fonction $t \mapsto g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|(t^2+1)}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. En effet la fonction

$$f_n := 1_{[}-n,+n] \cdot \left(1 - 1[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]\right) g_0$$

est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction continue par morceaux. On a dit que ces fonctions là étaient dans L^1. On vérifie qu'elles définissent une suite de Cauchy dans L^1 (cf les calculs faits sur une intégrale généralisée).

On peut de même définir $L^1(]a,b[)$, $L^1(\mathbb{R}^+)$. Notons que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ sa restriction à $]a,b[$ est dans $L^1(]a,b[)$. Inversement, si f est dans $L^1(]a,b[)$, son extension par 0 à $\mathbb{R}$ (en dehors de $]a,b[$) est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Puisqu'un élément de L^1 représente une classe de fonctions, on peut légitimement se demander ce que signifie l'affirmation, qu'un élément de L^1 est dans C^0 : cela veut dire qu'il existe un représentant dans la classe qui est de classe C^0. Autrement dit, la forme linéaire associée peut-être définie par $\phi \mapsto \int f_0 \phi dt$, où f_0 est continue.

En particulier, dire que f est nulle dans L^1, c'est simplement dire que la fonction f est dans la même classe que la fonction nulle. On aura donc toujours :

$$\int f(t)\phi(t)dt = 0 \; , \; \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \; , \tag{7.4.4}$$

qui est une manière de vérifier que f est nulle dans L^1.

Voici enfin une condition suffisante pour qu'une fonction appartienne à L^1, qui est peut-être assez simple à comprendre, mais qui dans la pratique est assez peu maniable...

Remarque 7.4.2
On suppose qu'il existe un nombre fini de points de $\mathbb{R}$, a_1, a_2,...., a_N tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ et on considère une fonction f continue dans la réunion :

$$]-\infty, a_1[\cup (\cup_{1\leq j\leq N-1}]a_j, a_{j+1}[) \cup]a_N, +\infty[.$$

Alors si les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{a_1} |f(t)|dt$, $\int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(t)|dt$ $(j = 1, \cdots, N-1)$ *et* $\int_{a_N}^{+\infty} |f(t)|dt$ *existent, la fonction* f *représente un élément de* L^1 *et*

$$\int f(t)dt = \int_{-\infty}^{a_1} f(t)dt + \sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)dt + \int_{a_N}^{+\infty} f(t)dt ,$$

$$||f|| = \int_{-\infty}^{a_1} |f(t)|dt + \sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} |f(t)|dt + \int_{a_N}^{+\infty} |f(t)|dt ,$$

$$\int f(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{a_1} f(t)\phi(t)dt + \sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\phi(t)dt + \int_{a_N}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt .$$

De plus deux fonctions de ce type égales sauf en un nombre fini de points définissent le même élément de L^1.

7.4.3 Intégrale de Fourier sur L^1

On observe d'abord que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la définition 7.1.1 donne

$$\sup_k |\hat{f}(k)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_{L^1} , \tag{7.4.5}$$

Du coup, on peut étendre cette définition à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ de la manière suivante : si (f_n) est une suite de Cauchy de fonctions de C_0^∞ pour la norme L^1, et qui définit f dans L^1, on voit, grâce à (7.4.5), que, pour tout k, $\hat{f}_n(k)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. On définit alors la transformée de Fourier de f par :

$$\hat{f}(k) = \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(k) .$$

Bien sûr, il faudrait vérifier que la définition ne dépend pas du choix de la suite...

On montre alors les propriétés suivantes :

Proposition 7.4.3

(i) Si $f \in L^1$, l'application $k \mapsto \hat{f}(k)$ est une fonction continue bornée.

(ii) Si $f \in L^1$, $\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = 0$.

(iii) L'inégalité (7.4.5) est vraie pour tout f dans L^1.

Preuve:
Pour le point (ii), on démontre d'abord que c'est vrai pour une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. On observe en effet que :

$$|\hat{f}(k+h) - \hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, |h| \, ||xf||_{L^1} \, ,$$

si on remarque que :

$$|e^{-i(k+h)x} - e^{-ikx}| = |e^{-ihx} - 1| \leq |hx| \, .$$

Ensuite, pour f dans L^1, on utilise une suite (f_n) de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ qui tend vers f dans L^1. On observe que :

$$\sup_k |\hat{f}(k) - \hat{f}_n(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f - f_n||_{L^1} \, .$$

Par conséquent la fonction $\hat{f}$ est la limite, pour la norme du sup, d'une suite de fonctions continues. La démonstration utilisée dans la Proposition 4.1.5 de la première partie permet de conclure.
On pourrait aussi jouer avec l'estimation :

$$|\hat{f}(k+h) - \hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |h| \int_R^{+R} |x||f(x)| dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x| \geq R} |f(x)| \, dx \, ,$$

qui est vérifiée pour tout $R > 0$.
Pour le point (iii), la démonstration est voisine de celle de la proposition 5.2.5 (lemme de Riemann-Lebesgue). □

Les propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{C}_0^\infty$ ou dans $\mathcal{S}$ n'ont malheureusement plus cours pour la transformation de Fourier dans L^1. Il reste seulement la propriété (7.1.2). Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\int f(t) \hat{g}(t) \, dt = \int \hat{f}(s) g(s) \, ds \, .$$

7.5 Autour de l'espace L^2

L'espace L^1 n'est pas stable par transformation de Fourier : on a vu seulement que $\hat{f}$ est une fonction continue et qui tend vers 0 à l'infini, lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$. On construit maintenant un espace de (classes de) fonctions sur le même modèle que L^1, et qui aura lui cette propriété. On obtiendra alors les formules d'inversion de Fourier et de Plancherel.

7.5.1 Le cahier des charges pour L^2

On s'impose les contraintes suivantes :

1. $L^2(\mathbb{R})$ doit être un espace de Hilbert (i.e. un espace préhilbertien complet) qui contient les fonctions régulières C_0^∞, et pour lesquelles le produit scalaire est dans ce cas défini par :

$$\langle f \mid g \rangle = \int f(t) \bar{g}(t) \, dt \, .$$

2. On ne veut pas distinguer des fonctions qui sont “presque égales”.
3. Si f est dans L^2, $\bar{f}$ est dans L^2.
4. On veut que le produit de deux fonctions dans L^2 soit dans L^1
5. On veut que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ soit dense dans L^2.

Remarque 7.5.1
Notons qu'on aura automatiquement Cauchy-Schwarz.

$$|\int f(t)\bar{g}(t)dt| \leq ||f||_{L^2} \cdot ||g||_{L^2} \ .$$

pour tout f, g dans L^2.

LE RESULTAT DIFFICILE QUE NOUS ADMETTONS EST QUE L'ESPACE L^2 EXISTE.

7.5.2 Transformée de Fourier L^2

On commence par démontrer la Formule de Plancherel pour les fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty$.

Proposition 7.5.2
Pour $f \in \mathcal{C}_0^\infty$, on a :

$$\int |f(t)|^2 \, dt = \int |\hat{f}(k)|^2 dk \ . \tag{7.5.1}$$

Esquisse de démonstration.

Supposons que le support de f, noté supp$f$, vérifie : supp$f \subset [-\frac{1}{2}T_0, \frac{1}{2}T_0]$. Autrement dit, on suppose que T_0 est choisi assez grand de telle sorte que f est identiquement nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}T_0, \frac{1}{2}T_0]$.

Pour tout $T \geq T_0$, rien ne nous empêche de considérer la restriction de f à l'intervalle $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$ comme la restriction au même intervalle d'une fonction T-périodique qu'on notera f_T.

On va appliquer le corollaire (appelé formule de Parseval) donné au précédent chapitre.

On a :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f_T(t)|^2 dt = \sum_n |c_n(f_T)|^2 \ , \tag{7.5.2}$$

où l'on rappelle que :

$$c_n(f_T) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp -i\frac{2\pi n}{T} t \ f_T(t)dt \ . \tag{7.5.3}$$

On observe maintenant que compte-tenu de l'hypothèse sur le support, on a :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f_T(t)|^2 dt = \int |f(t)|^2 dt \tag{7.5.4}$$

et

$$c_n(f_T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\hat{f}(\frac{2\pi n}{T}) \ . \tag{7.5.5}$$

Ceci conduit à l'identité suivante, qui est vérifiée pour tout $T \geq T_0$,

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_n \frac{2\pi}{T}|\hat{f}(\frac{2\pi n}{T})|^2 \ . \tag{7.5.6}$$

Si on voit le deuxième membre comme l'approximation de l'intégrale d'une fonction continue $\hat{f}$, (tendant assez vite vers 0 à l'infini pour que la définition de l'intégrale généralisée ne pose pas trop de problèmes), où on a fait une graduation par des points équidistants de distance $\frac{2\pi}{T}$ (voir le sous-paragraphe 2.1.1 (première partie)), on obtient (au moins heuristiquement) en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_n \frac{2\pi}{T}|\hat{f}(\frac{2\pi n}{T})|^2 = \int |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau \ .$$

On a ainsi "démontré " la formule de Plancherel. □

Pour $f \in C_0^\infty$, on vient d'observer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire et isométrique :

$$||f||_{L^2} = ||\hat{f}||_{L^2} \ .$$

Cette égalité implique que si f_n $(n \in \mathbb{N})$ est une suite de Cauchy de C_0^∞, alors $\hat{f}_n$ est une suite de Cauchy de L^2. L^2 étant complet, la suite $\hat{f}_n$ est convergente. On va utiliser cette propriété pour définir la transformée de Fourier par passage à la limite.

Définition 7.5.3
Soit $f \in L^2$, et (f_n) une suite de Cauchy de fonctions dans C_0^∞ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \ .$$

Alors, on définit la transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f} = \mathcal{F}f$, par :

$$\mathcal{F}f = \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \ .$$

Proposition 7.5.4
L'application $f \mapsto \mathcal{F}f$ est une application linéaire isométrique de L^2 dans L^2 :

$$||\mathcal{F}f|| = ||f|| \ , \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \ . \tag{7.5.7}$$

Remarque 7.5.5
Attention ! nous n'avons pas dit que si $f \in L^2$ alors la fonction $f(t)\exp -ikt$ est dans L^1 et que la transformée de Fourier au point k est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)\exp -ikt$. C'est faux en général ! ! La transformée de Fourier d'un élément de L^2 est en général un élément de L^2 qui n'est défini que par un passage à la limite.

Proposition 7.5.6
On a, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tout $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathcal{F}f \ , \ \mathcal{F}g \rangle = \langle f \ , \ g \rangle \ .$$

Preuve:
On applique Plancherel avec $f \pm g$ et $f \pm ig$ et on prend des combinaisons linéaires convenables. C'est le même argument qui était utilisé pour montrer que dans un espace préhilbertien on peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme. □

7.6 Transformée de Fourier inverse

On commence par démontrer que, si $f \in C_0^\infty$, la formule d'inversion de Fourier est vraie. On se rappelle la formule de Plancherel à savoir que, pour tout $f \in \mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}$ et de plus

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk \ . \tag{7.6.1}$$

On en a déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \overline{g(x)}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k)\ \overline{\hat{g}(k)}\ dk \ . \tag{7.6.2}$$

Nous allons maintenant en déduire la :

> **Proposition 7.6.1**
> Pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a :
> $$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}) f = \check{f} \ ,$$
> où $\check{f}$ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
> $$\check{f}(x) = f(-x) \ .$$

Preuve :
On notera par commodité de notation Σ l'application :

$$f \mapsto \Sigma f = \check{f} \ .$$

De nouveau, on se contente d'esquisser la démonstration. On va appliquer d'une part Plancherel et d'autre part la Proposition 7.1.2.

On note que, d'une part, par Plancherel, on a :

$$\int (\mathcal{F}f)(x)\ g(x) dx = \int (\mathcal{F}f)(x)\ \overline{\overline{g(x)}} dx = \int (\mathcal{F}\mathcal{F}f)(k)\ \overline{\mathcal{F}\overline{g}}(k)\ dk$$

et d'autre part, par la Proposition 7.1.2, on a :

$$\int (\mathcal{F}f)(x)\ g(x) dx = \int f(k) (\mathcal{F}g)(k)\ dk \ .$$

Mais

$$\overline{\mathcal{F}\overline{g}} = \Sigma \mathcal{F} g \ .$$

Un changement de variable donne alors :

$$\int (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(k) \cdot (\overline{\mathcal{F}\overline{g}})(k)\ dk = \int (\Sigma \mathcal{F}\mathcal{F}f)(k)\ (\mathcal{F}g)(k)\ dk \ .$$

Ceci implique :

$$\int (\Sigma \mathcal{F}\mathcal{F} f)(k)\ (\mathcal{F} g)(k)\ dk = \int f(k)\ (\mathcal{F}\ g)(k)\ dk\ ,\ \forall g \in C_0^\infty\ .$$

Réutilisant encore une fois la Proposition 7.1.2, on obtient :

$$\int [\mathcal{F}(\Sigma \mathcal{F}\mathcal{F} f - f)](x)\ g(x)\ dx = 0\ ,\ \forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ ,$$

et ceci implique la proposition, en tenant compte de (7.4.4) et l'injectivité de $\mathcal{F}$ dans L^2.

Ceci conduit à la

Définition 7.6.2 (Transformation de Fourier inverse).
On définit :

$$\mathcal{G} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp ikx f(k)\ dk\ .$$

On obtient alors :

Proposition 7.6.3
Pour $f \in C_0^\infty$,

$$\mathcal{G}\mathcal{F} f = f\ .$$

Par continuité, on peut montrer que comme $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ se prolonge en un opérateur isométrique de L^2 dans L^2 et que l'on a les identités :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = I\ ,\ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = I\ .$$