Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles

B. Helffer à partir du texte établi par Thierry Ramond
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud

Version de Janvier-Mai 2007

Table des matières

Avant-Propos

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP non-linéaires - pensez au désormais célèbre effet papillon : une petite variation des conditions initiales peut en temps très long conduire à des très grandes variations. D'un autre côté, on a aussi appris à "entendre la forme d'un tambour" : on a démontré mathématiquement que les fréquences émises par un tambour lors de la vibration de la membrane - un phénomène décrit par une EDP, permettent de reconstituer parfaitement la forme du tambour.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisement certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation, et de démontrer la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises.

Quand sont apparues les EDP ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'electromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à L. Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géometrie et en analyse.

Venons-en aux objectifs de ce cours. On souhaite que, après avoir conforté leurs connaissances des équations différentielles ordinaires, les étudiants prennent contact avec les EDP et quelques unes des méthodes et des problèmatiques qui s'y rattachent. Bien sûr, il s'agit d'un cours destiné aux étudiants de fin de premier cycle, et on espère en même temps renforcer les connaissances et les savoirs-faire des étudiants en analyse mathématique. De ce point de vue, et même au niveau relativement élémentaire où l'on se place, les EDP constituent un terrain de jeu (de récréation) extrêmement riche et vaste !

Le contenu de ce cours est très largement inspiré du livre de W.A. Strauss : Partial Differential Equations : An Introduction, John Wiley, 1992. On a tenu cependant à ce que cette présentation des EDP soit aussi l'occasion de mettre en action certains outils mathématiques, et l'on introduit les notions nécessaires au fur et à mesure des besoins : éléments sur les équations différentielles ordinaires, calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables réelles, fonctions définies par des intégrales généralisées, séries de Fourier...

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'une EDP ?

1.1 Equations différentielles ordinaires

Pour fixer les idées, on rappelle d'abord quelques notions à propos des équations différentielles ordinaires (EDO). Une équation différentielle est une relation du type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0 \ , \tag{1.1}$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue u au point x. La fonction F est une fonction de plusieurs variables $(x, y) \mapsto F(x, y)$ où x est dans $\mathbb{R}$ (ou parfois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ est dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
L'exemple le plus simple est celui du mouvement d'un corps (identifié) à un point sur la droite. La variable x correspond alors au temps et le mouvement est décrit par l'équation :

$$u''(x) = f(u(x)) \ , \tag{1.2}$$

(c'est la célèbre formule $\vec{F} = m\gamma$, où γ est l'accélération).
Ici la fonction F qui intervient est ici la fonction

$$I \times \mathbb{R}^3 \ni (x, y_0, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 - f(y_0) \ .$$

On note que la fonction F ne dépend pas de x et de y_1.

Maintenant, si f est continue, on peut toujours trouver v continûment dérivable telle que :

$$f(y) = -v'(y) \ .$$

On peutalors montrer, en dérivant par rapport à x, la fonction "énergie" :

$$x \mapsto \frac{1}{2}u'(x)^2 + v(u(x)) \ ,$$

avec u solution de (1.2), que celle-ci est constante au cours du temps :

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 + v(u(x)) = E_0 \ ,$$

où E_0 est calculée par la valeur de l'énergie au temps initial x_0.
On obtient une nouvelle équation (plus facile à résoudre) qui a la forme ci-dessus

$$G(x, u(x), u'(x)) = 0 \ ,$$

avec cette fois-ci :

$$G(x, y_0, y_1) := \frac{1}{2}y_1^2 + v(y_0) - E_0 \ .$$

Expliquons brièvement pourquoi la résolution en est plus simple.

On réécrit l'équation sous la forme

$$u'(x) = \pm\sqrt{2(E_0 - v(u(x))} \ . \tag{1.3}$$

Si on suppose que $u'(x_0) \neq 0$ et que le terme de droite ne s'annule pas, on peut décider si $\pm$ doit être choisi égal à $+$ ou à $-$. Dans la suite, on suppose que $u'(x_0) > 0$ et l'équation devient :

$$u'(x) = \sqrt{2(E_0 - v(u(x))} \ .$$

Toujours en supposant que le terme de doite ne s'annule pas, on réécrit l'équation sous la forme

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{2(E_0 - v(u(x))}} = 1 \ .$$

On réécrit cette fois-ci le membre de gauche sous la forme

$$[g(u(x)]' = 1 \ , \tag{1.4}$$

où g est déterminé (à l'addition d'une constante près) par

$$g'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 - v(y_0))}} \ . \tag{1.5}$$

Autrement dit g est une primitive de la fonction $y_0 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(E_0 - v(y_0))}}$ bien défini dans un intervalle assez petit contenant x_0. On peut alors trouver "localement" une application réciproque notée g^{-1} (attention, ce n'est pas $\dfrac{1}{g}$!) de g, i.e. telle que

$$g\left(g^{-1}(t)\right) = t \ ,$$

pour t voisin de $g(u(x_0))$.
On peut réécrire (1.4) sous la forme

$$[g(u(x)) - x]' = 0 \ , \tag{1.6}$$

qui implique, en utilisant la condition initiale,

$$g(u(x)) = g(u(x_0)) + (x - x_0) \ . \tag{1.7}$$

Ceci nous donne en principe la solution dans un petit intervalle contenant x_0 par

$$u(x) = g^{-1}\left(g(u(x_0)) + (x - x_0)\right) \ . \tag{1.8}$$

Un autre exemple classique est celui des EDO linéaires à coefficients constants, qui s'écrivent formellement

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x), \tag{1.9}$$

où f est une fonction donnée. On parle d'équation linéaire homogène lorsque $f = 0$. L'ordre d'une EDO est le plus grand ordre de dérivation qui apparait dans l'équation - ici n.

Remarque 1.1.1 *On peut bien sûr écrire (1.9) sous la forme (1.1). On vérifiera que la fonction*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y) \mapsto F(x, y_0, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j y_j - f(x)$$

répond à la question.

Résoudre une EDO, c'est trouver un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction u définie sur I, suffisamment dérivable sur cet intervalle, et telle que pour tout $x \in I$, la relation (1.1) a lieu.

On se convainquera rapidement que seule la connaissance de la fonction et de certaines de ses dérivées en un point permettra d'identifier une solution bien précise (problème de l'unicité).

1.2 Equations aux Dérivées Partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, \ldots) \mapsto u(x, y, \ldots).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

1.2.1 Dérivées partielles

On introduira au fur et à mesure quelques notions[1] sur les fonctions de plusieurs variables réelles. On se limite pour les énoncés au cas de fonctions de deux variables, mais les notions qui suivent se généralisent facilement aux fonctions de n variables réelles, où n est un entier quelconque (supérieur à 2). Pour le moment, nous n'examinons que les propriétés des applications partielles associées à une telle fonction f.

Définition 1.2.1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle applications partielles associées à f en (x_0, y_0), les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenues en figeant l'une des variables :

$$f_1 : x \mapsto f_1(x) := f(x, y_0) \text{ et } f_2 : y \mapsto f_2(y) := f(x_0, y)$$

La notion de dérivée partielle de f en un point (x_0, y_0) est alors particulièrement simple : il s'agit des dérivées des applications partielles associées à f en (x_0, y_0).

Définition 1.2.2
Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ dans $\mathbb{R}^2$, et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$, et $f_1 :]a, b[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_1(x) = f(x, y_0).$$

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) lorsque f_1 est dérivable en x_0. On note $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou encore $\partial_x f(x_0, y_0)$ le nombre $f_1'(x_0)$.
De la même manière, si elle existe, on note $\partial_2 f(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0).

[1] qui seront analysées plus en profondeur dans un autre cours

Exercice 1.2.3
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes au point (x_0, y_0), lorsqu'elles existent.

$$f(x,y) = x^2 + y^3,\ f(x,y) = x^2y^4,\ f(x,y) = x\cos(y) + y^2 + 2,$$

et

$$f(x,y) = |x| + \frac{y}{x^2 + y^2}\ .$$

On définit ensuite par récurrence les dérivées partielles d'ordre supérieur. Par exemple $\partial^2_{xx}u(x_0, y_0)$ désigne en fait $\partial_x(\partial_x u)(x_0, y_0)$, c'est à dire la dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \partial_x u(x,y)$.

Exercice 1.2.4
Calculer $\partial^2_{xx}u(x_0, y_0)$, $\partial^2_{yy}u(x_0, y_0)$, $\partial^2_{xy}u(x_0, y_0)$,$\partial^2_{yx}u(x_0, y_0)$ et $\partial^2_{xyx}u(x_0, y_0)$, pour les trois premières fonctions de l'exercice précédent.

On observe dans l'exercice que $\partial^2_{xy}u = \partial^2_{yx}u$. On donnera plus tard des conditions suffisantes pour que ce soit le cas. Retenons pour l'instant que lorsque la fonction est suffisamment "gentille"(par exemple si toutes les dérivées partielles sont continues) le résultat d'une succession de dérivées partielles ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les fait.

1.2.2 EDP

Dans le cas de deux variables, une EDP d'ordre 1 s'écrit

$$F(x, y, u(x,y), \partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = 0. \tag{1.10}$$

et une équation du second ordre'écrit

$$\begin{aligned} F(x, y, u(x,y), \partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y), \\ \partial^2_x u(x,y), \partial_x\partial_y u(x,y) = 0\ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Plus généralement, on peut considérer des équations mettant en jeu des dérivées $\partial_x^{m_j}\partial_y^{n_j}u$. L'ordre d'une EDP est alors le plus grand ordre de dérivation $m_j + n_j$ qui apparaît dans l'équation.
Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (d est le nombre de variables), c'est trouver une fonction suffisamment *différentiable* dans Ω (voir le Chapitre 2), telle que la relation (1.10) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.

Voici quelques exemples, très simples a priori, d'EDP à deux variables. Certaines de ces EDP modélisent l'évolution au cours du temps de certains systèmes, et il est d'usage de garder la notation t pour la variable temps.

1. $\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation de transport) ; (Etudier s'il existe des solutions de la forme $g(x - at)$ avec g de classe C^1).
2. $\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation d'onde de choc) ;
3. $\partial_x \partial_y u(x,y) = 0$ (variante de l'équation des ondes) ;
4. $\partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) = 0$ (l'équation de Laplace) ;
5. $\partial^2_{tt} u(t,x) = \partial^2_{xx} u(t,x)$ (l'équation des ondes ou des cordes vibrantes).

Comme pour les EDO, on parle d'EDP linéaires ou non-linéaires. Dans la liste ci-dessus, seule l'équation 3. est non-linéaire. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP. Il s'agit de l'application qui à une fonction u associe le membre de gauche de l'EDP. Par exemple l'opérateur associée à l'équation 1. est $P_1 : u \mapsto \partial_x u + \partial_y u$, celui associée à l'équation (3) est $P_3 : u \mapsto \partial_x u + u\partial_y u$. On dit que l'EDP est linéaire lorsque l'opérateur P qui lui est associé l'est, c'est à dire que, pour toutes fonctions u, v "gentilles" et

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v) \ . \tag{1.12}$$

C'est bien le cas pour P_1, et il est très simple de vérifier que $P_3(\alpha u) \neq \alpha P_3(u)$ en général.

D'autre part on parle également d'EDP linéaire homogène lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles. Toutes les équations linéaires ci-dessus sont homogènes, alors que l'EDP

$$\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u = f(x,y) \tag{1.13}$$

ne l'est pas ! Notons que l'opérateur aux dérivées partielles associé à (1.13) est $P_5 = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ comme pour l'équation 5. ci-dessus.

Comme pour les EDO, les EDP linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé principe de superposition : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une EDP linéaire inhomogène une solution quelconque de l'EDP homogène associée, on obtient encore une solution de l'EDP inhomogène.

1.3 Premières EDP

Comme on l'a souligné dans l'avant-propos, il est en général désespéré de vouloir connaître explicitement la ou les solutions d'une EDP. C'est cependant parfois possible : voici trois exemples a priori très simples.

1.3.1 Exemple 1

On veut trouver les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial^2_{xx} u = 0. \tag{1.14}$$

Que faut-il lire ? Rappelons que la notation ∂^2_{xx} signifie que l'on applique deux fois l'opérateur ∂_x :

$$\partial^2_{xx} u = \partial_x(\partial_x u).$$

L'équation (1.14) signifie donc que la dérivée partielle par rapport à le première variable, de la dérivée partielle de u par rapport à la première variable est nulle : $\partial_x(\partial_x u) = 0$. Commençons donc par poser $v(x, y) = \partial_x u(x, y)$. On doit avoir, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x v(x, y) = 0.$$

Pour tout y fixé l'application partielle $x \mapsto v(x, y)$ doit donc être constante. Bien sûr cette constante peut dépendre de y. On voit donc que nécessairement

$$v(x, y) = C(y)$$

pour une certaine fonction C. On est ramené au problème suivant : trouver u telle que

$$\partial_x u(x, y) = C(y).$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement,

$$u(x, y) = C(y)x + D(y)$$

où D est encore une certaine fonction. Il est enfin immédiat de vérifier que n'importe quelle fonction de ce type vérifie l'équation (1.14), pourvu que cette fonctions admette des dérivées partielles. Notons dès à présent qu'il y a énormément de solutions pour l'équation (1.14), puisque aucune condition sur les fonctions C et D n'est apparue dans la démonstration.

1.3.2 Exemple 2

On veut résoudre l'équation

$$u_{xx} + u = 0\ . \tag{1.15}$$

Figeons la variable y, et posons $v(x) = u(x, y)$. On doit résoudre l'équation différentielle $v'' + v = 0$. Les solutions sont

$$v(x) = A\cos x + B\sin x,$$

et revenant à u on obtient

$$u(x, y) = A(y)\cos x + B(y)\sin x,$$

où A et B sont deux fonctions quelconques.

1.3.3 Exemple 3

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$u_{xy} = 0. \tag{1.16}$$

Nous allons voir que l'on peut interpréter de deux manières différentes -et toutes les deux raisonnables- la notation u_{xy} et aboutir à des ensembles de solutions différents. C'est bien entendu très gênant, et l'on verra très vite comment remédier à ce genre d'ambiguïté.
Considérons d'abord que u_{xy} désigne $\partial_x(\partial_y u)$. L'équation (1.16) donne d'abord $\partial_y u(x,y) = C(y)$, où C est une fonction quelconque de y, puis

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} C(s)ds + D(x).$$

On doit noter que la fonction D est arbitraire, mais que C doit posséder une primitive. En particulier la fonction $u(x,y)$ trouvée est dérivable par rapport à y.
Supposons maintenant que, suivant une autre convention u_{xy} désigne $\partial_y(\partial_x u)$. On trouve alors $\partial_x u(x,y) = E(x)$, puis $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} E(s)ds + F(y)$. Cette fois la fonction trouvée est dérivable par rapport à x, et ne possède aucune propriété particulière par rapport à y. Autrement dit l'ensemble des solutions dépend de l'interprétation de l'équation. On notera que la difficulté disparaît si on se limite à la recherche de solutions assez régulières, disons de classe C^2.

1.4 Discussion sur la notion de problème bien posé

Sur les exemples qui précèdent, on voit que le nombre de solutions d'une EDP peut être très grand. Rappelons le cas des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants. Pour l'équation

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \ , \tag{1.17}$$

on rappellera plus loin que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n : la solution générale dépend de n constantes (n est l'ordre de l'équation). On obtient une solution unique lorsque l'on fixe n conditions supplémentaires du type

$$u(0) = y_0, u'(0) = y_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{1.18}$$

où y_0, y_1, $\ldots y_{n-1}$ sont n réels fixés.
Le problème qui consiste à résoudre l'équation (1.17) sous la condition (1.18) porte le nom de *problème de Cauchy.*
Les trois exemples précédents sont des EDP linéaires homogènes d'ordre 2, et leur solution générale dépend de deux fonctions arbitraires - au lieu de deux constantes pour les EDO. On retiendra seulement que l'ensemble des solutions d'une EDP peut être difficile à décrire.
Cependant lorsque les EDP proviennent de la modélisation d'un phénomène du monde réel, les solutions intéressantes sont celles qui satisfont certaines conditions supplémentaires. Prenons un exemple. On cherche à décrire les vibrations verticales d'une corde de longueur L, tendue entre deux points fixes A et B. On note $u(t,x)$ la hauteur à l'instant t du point de la corde placé à distance x de A. Il est bien clair que les seules fonctions $u(t,x)$ qui nous intéressent sont celles pour lesquelles

$$\forall t\ ,\ u(t,A) = u(t,B) = O\ .$$

Ce type de condition est appelé "condition au bord", mais il y a bien d'autres sortes de contraintes que l'on rencontre très souvent, par exemple :
- Des conditions de régularité :
  Les solutions doivent être suffisamment différentiables, au moins pour que l'équation ait un sens. C'est en particulier ce genre de condition qui manque pour que l'équation (1.16) ait un sens précis.
- Des conditions initiales :
  On connaît l'état du système que l'on veut décrire à l'instant $t = 0$ et il s'agit de décrire son évolution dans le temps.
- Des conditions de comportement à l'infini.
- Des conditions de stationarité'.

Il est alors possible que le problème considéré "EDP+condition(s) physique(s)" admette une unique solution. Lorsque, de plus, la solution dépend "continûment" des données physiques, dans le sens où une petite erreur sur les données ne change que peu la solution, on parlera de *problème bien posé*. Bien sûr, il faudra définir tout ceci de manière mathématiquement plus précise!!

1.5 Exercices

1.5.1 Equations différentielles

1. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer, en les calculant explicitement, que les solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = 0$$

ne s'annulent jamais, sauf une.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' - u^2 = 0.$$

1. Montrer qu'en dehors de la fonction identiquement nulle, les solutions de cette équation ne s'annulent pas.
2. Y-a-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

1.5.2 Dérivées partielles

1. Soit $u(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$. Calculer $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x^2 u$, $\partial_y^2 u$ et $\partial_{xy}^2 u$.

1.5.3 EDP

1. Montrer que les fonctions $u(t, x) = f(t) + g(x)$, où f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont solutions de l'EDP $\partial_t \partial_x u(t, x) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1$, $u(x, t) = f(x - ct)$ est solution de l'EDP $\partial_t u + c\partial_x u = 0$. Comment faire de cette EDP un problème bien posé ?
3. Résoudre l'EDP $\partial_y^2 u(x, y) = 1$. Comment faire de cette EDP un problème bien posé ?
4. Montrer que $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est solution dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de l'EDP $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5. Calculer Δu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pour $u = \ln(x^2 + y^2)$.
6. Etudier les solutions polynômes de $\Delta u = 0$, dans $\mathbb{R}^2$.
7. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1$, $u(x, t) = f(\dfrac{x}{t})$ vérifie pour tout $t > 0$ l'équation $t\partial_t u + x\partial_x u = 0$.

Chapitre 2

Systèmes différentiels et équations différentielles

Beaucoup de problèmes relevant de la physique ou de la mécanique se ramènent à l'étude d'équations aux dérivées partielles ou plus simplement d'équations différentielles. On se limitera à l'étude des cas les plus simples : les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants.

2.1 En guise d'introduction

2.1.1 En théorie des circuits électriques

Le courant électrique $y(t)$ dans un circuit branché sur une source alternative de fréquence ω satisfait à une équation différentielle de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi) \ ,$$

avec $a \neq 0$.
On souhaiterait déterminer la solution $t \mapsto y(t)$. Cette équation est appelée "oscillateur harmonique forcé". Bien entendu la nature des solutions dépendra fortement des valeurs des réels a, b, c, α et ω.
On montrera comment résoudre explicitement cette équation.

2.1.2 En mécanique classique

Le mouvement d'un corps supposé ponctuel (penser à son centre de masse) de masse 1 se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ (ou dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$) et soumis à un champ de potentiel V est donné par un système d'équations différentielles :

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = -(\partial_{x_j} V)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \ , \quad \text{pour } j = 1, \cdots, 3 \ .$$

On rappelle que $\partial_{x_j} V$ désigne la dérivée partielle de V par rapport à la variable x_j. On note aussi x_j'' la dérivée seconde par rapport à la variable t (t correspondant au temps).
On dit que c'est un système (il y a en fait trois équations) différentiel du second ordre (à cause du $\frac{d^2}{dt^2}$).
Un tel système a beaucoup de solutions. La principale raison (qui est au moins intuitivement bien connue) est que l'on doit au moins connaître la situation à un instant donné disons t_0. Par situation, on entend ici la connaissance de la position à l'instant t_0 $x(t_0) = x_0$, mais aussi de sa vitesse : $dx/dt(t_0) = v_0$.
Typiquement, le potentiel V est un potentiel de Coulomb $V = -\frac{1}{|x|}$ (marquant l'attraction exercée sur le corps considéré[1] par un autre corps supposé ponctuel à l'origine), ou est un potentiel dit harmonique :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i^2 \ .$$

Dans le deuxième cas, le système se découple en trois équations indépendantes de même type :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\omega_i x_i \ , \quad \text{pour } i = 1, \ldots, 3 \ ,$$

correspondant au problème rencontré pour le circuit électrique.

2.1.3 Réduction à un problème du premier ordre

Dans tous les cas, on peut se ramener à un système du premier ordre, certes avec beaucoup plus d'équations. Le truc dans le premier cas considéré est le suivant. On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ ,$$

et on observe, en utilisant l'équation que :

$$\begin{aligned} X'(t) &= \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \ , \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} y'(t) - \frac{c}{a} y(t) + \frac{\alpha}{a} \cos(\omega t + \phi) \\ y'(t) \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

[1]Par exemple l'attraction d'un électron par un noyau ou de la terre par le soleil, et c..

Le système obtenu s'écrit alors :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)\ ,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{a}\cos(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Inversement, si on sait résoudre le système obtenu, on peut vérifier que la deuxième composante de $X(t)$ vérifie l'équation du second ordre initiale.
Cette procédure est beaucoup plus générale que celle rencontrée dans le cas particulier. On peut aussi faire cette réduction dans le second cas et l'on trouve un système différentiel avec six équations de la forme :

$$X'(t) = F(X(t))\ .$$

Sans résoudre explicitement les équations, on peut obtenir des informations a priori sur les propriétés d'une éventuelle solution. Un exemple est donné par :

Exercice 2.1.1
En admettant que la solution du second système existe et est de classe C^2 vérifier la conservation[2] de l'énergie :

$$\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + V(x(t)) = \frac{1}{2}|v_0|^2 + V(x_0)\ .$$

En déduire dans le cas où $V(x) = \sum_j \omega_j x_j^2$ que la particule ne peut pas s'échapper à l'infini. Regarder aussi le cas du potentiel de Coulomb.

2.1.4 Quelques mots sur la théorie de Cauchy

On se contente juste d'énoncer un théorème sans démonstration. Il est traditionnellement appelé "Théorème de Cauchy-Lipschitz" mais nous l'énoncerons ci-dessous sous des hypothèses légèrement plus fortes.
Les systèmes rencontrés ci-dessus de ramènent tous à la forme suivante :

$$dX/dt = F(t, X(t)) \tag{2.1}$$

[2]Ceci suppose le maniement des dérivées partielles que nous avons présenté au chapitre **??** et qui sera revu au Chapitre 3.

auquel on rajoute ce que l'on appelle une condition initiale

$$X(t_0) = X_0 \ . \tag{2.2}$$

Précisons les notations. $X(t)$ est pour tout t un point de $\mathbb{R}^n$ ou d'un ouvert[3] Ω (i.e. une réunion quelconque de boules ouvertes) de $\mathbb{R}^n$ représenté le plus souvent comme un vecteur colonne et on cherche en fait une application $t \mapsto X(t)$ de classe C^1 défini dans un certain intervalle ouvert I. L'application $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est une application continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1.2 (Cauchy-Lipschitz)
Si F est une application de classe C^1 de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$, alors, pour tous $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que l'équation (2.1) avec la condition initiale (2.2), admette une solution unique de classe C^1 dans un intervalle de la forme $]t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0[$ pour un $\epsilon_0 > 0$.

Notons que ce théorème ne donne pas d'existence dans l'intervalle I initial mais dans un intervalle éventuellement plus petit.

La théorie étudie alors les questions suivantes :
– Comment la solution dépend-elle de la condition initiale X_0 ?
– Quel est l'intervalle maximal d'existence de la solution ?
– Si F est plus régulière (dans C^k), la solution est-elle plus régulière ?
Notons aussi que théorème ne donne pas de solutions explicites (ce n'est pas toujours possible sauf en faisant des approximations !!).

La première approximation pour bien comprendre ce qui se passe est de remplacer l'équation initiale par :

$$X'(t) = F(t_0, X_0) \ .$$

La solution "approchée" est alors :

$$X^{app}(t) = X_0 + F(t_0, X_0)(t - t_0) \ .$$

C'est satisfaisant si $F(t_0, X_0) \neq 0$ et dans ce cas on peut aussi utiliser la même idée pour $X(t_0)$ assez voisin de X_0.
Lorsque $F(t_0, X_0) = 0$, c'est à la fois plus simple et plus compliqué. Traitons le cas (dit autonome) où $F(t, X) = F(X)$. La variable t n'apparait pas explicitement. C'est plus simple en ce sens que $X(t) = X_0$ est alors solution. Mais pour comprendre ce qui se passe pour $X(t_0)$ proche de X_0, on est amené

[3]Voir au Chapitre 3, pour une définition plus précise.

à regarder un système linéarisé, où $F(X)$ est remplacé par $A \cdot (X - X_0)$, où A est la matrice :

$$A = ((\partial_k F_j)(X_0)) .$$

On se ramène alors au cas particulier des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants qui ont la forme :

$$dX/dt = AX(t) + B(t) ,$$

où A est une matrice $n \times n$ et $t \mapsto B(t)$ est une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$, et bien évidemment tous ceux qui se ramènent à ce cas.
La fonction $F(t, X)$ introduite plus haut est alors simplement :

$$F(t, X) = AX + B(t) .$$

C'est cette simplification qui nous conduit à porter toute notre attention à ce cas.

2.1.5 Quelques exemples très simples

Le premier exemple correspond tout simplement à la notion de primitive. On considère :

$$x'(t) = f(t) , \ x(t_0) = x_0 .$$

Cette équation se réécrit formellement

$$dx = f(t)dt ,$$

et on obtient :

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Exercice 2.1.3
Regarder le cas $f(s) = |s|^\alpha$. Discuter en fonction de α. Comparer avec les hypothèses du théorème de Cauchy.

Le deuxième exemple est :

$$x'(t) = g(x)$$

Dans ce cas, la résolution passe par l'échange des variables. Plutôt que de chercher à trouver directement $x(t)$, on cherche à résoudre l'équation satisfaite par la fonction $x \mapsto t(x)$ définie au moins formellement par :

$$x(t(x)) = x .$$

On obtient formellement :

$$dx/g(x) = dt$$

Soit :

$$\int_{x_0}^{x} du/g(u) = t(x) - t_0 \ .$$

Dans certains cas cela permet de résoudre explicitement l'équation. Dans d'autres cas, où on ne sait pas faire de calcul explicite, on peut utiliser des théorèmes d'inversion (local ou global) en montrant que $x \mapsto t(x)$ est une fonction monotone d'un intervalle sur un autre, propriété qui s'analyse facilement (en regardant la dérivée) si g ne s'annule pas sur l'intervalle considéré.

Exemple 2.1.4

$$g(u) = u^k \ .$$

Discuter en fonction de k entier et de $x_0 \in \mathbb{R}$, l'existence de solutions telles que $x(0) = x_0$. La solution existe-t-elle pour tout t ?

Regarder aussi le cas $g(u) = |u|^{1/2}$ avec $x(0) = 0$. Y-a-t-il unicité de la solution ? Les hypothèses du théorème de Cauchy sont-elles satisfaites ?

Exercice 2.1.5

$$t^2 x'(t) - x(t) = 0 \ .$$

Montrer qu'il y une solution non identiquement nulle de classe C^1 mais qui est nulle sur l'un des deux demi-axes.

2.2 Systèmes différentiels à coefficients constants

2.2.1 Propriétés générales

Nous nous concentrons donc sur la recherche des solutions générales du système différentiel :

$$(SD) \qquad dX/dt = AX + B(t) \ ,$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^N$ et $B(t) \in \mathbb{R}^N$.
Le premier principe concerne la linéarité.Commençons par une définition.
On appelle système homogène (H) associé le système correspondant à $B(t) \equiv 0$:

$$(H) \qquad dX/dt = AX \ .$$

Théorème 2.2.1
Soit (SD) un système différentiel à coefficients constants et (H) le système homogène associé et soit $X_0(t)$ une solution de (SD). Alors toute solution $X(t)$ de (SD) s'écrit sous la forme

$$X(t) = X_0(t) + Z(t)$$

où $Z(t)$ est une solution du système homogène (H).

La démonstration est immédiate, si on observe que $X(t)-X_0(t)$ est effectivement une solution du système homogène. Il est utile d'observer que l'espace des solutions de (H) est un espace vectoriel.
Par conséquent, résoudre (SD), c'est trouver
– une solution particulière $X_0(t)$,
– une base de l'espace vectoriel des solutions de H.

Existence et Unicité.

On commence par redonner la traduction du théorème de Cauchy dans le cas particulier.

Théorème 2.2.2
Supposons que $t \mapsto B(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^N$, il existe une et une seule solution $X(t)$ du système (SD) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ telle que $X(0) = v$. En particulier, l'espace vectoriel des solutions du système associé homogène est de dimension N.

Exemple élémentaire

Considérons le cas $N = 1$. Le système s'écrit : $y'(t) = ay(t) + b(t)$. On résout d'abord le système homogène. Pour tout $v \in \mathbb{R}$, la solution de (H) telle que $y(0) = v$ est donnée par $y(t) = v \exp at$. L'espace des solutions du système homogène est donc bien de dimension 1.
Pour déterminer la solution du système non-homogène (on dit aussi "avec second membre"), on fait ce qui est communément appelé la méthode de variation des constantes. On écrit : $y(t) = e^{at}z(t)$ et on cherche l'équation vérifiée par $z(t)$. On trouve d'abord :

$$z'(t) = b(t)e^{-at} ,$$

et on est ainsi ramené à la recherche d'une primitive convenable. Pour $t = 0$, on observe que $z(0) = v$ (si on cherche y tel que $y(0) = v$). D'où :

$$z(t) = v + \int_0^t \exp -as\, b(s)\, ds .$$

Ceci conduit finalement à :

$$y(t) = v \exp at + \exp at \int_0^t \exp -as\, b(s)\, ds\ .$$

2.2.2 Etude du système dans le cas où A a des racines réelles distinctes

Solutions du système homogène
La première information est donnée par :

Théorème 2.2.3
Soit (H) le système homogène. Alors si A admet une valeur propre réelle λ et si v est un vecteur propre associé : $Av = \lambda v$ (avec $v \neq 0$), alors $X(t) = \exp \lambda t v$ est solution de (H).

La démonstration est immédiate, on observe en effet que :

$$X'(t) = \lambda \exp \lambda t v = A(X(t))\ .$$

Dans le cas favorable, cela conduit au théorème :

Théorème 2.2.4

Supposons que pour une matrice A on soit dans la situation où il existe n valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Si u_1, u_2, ...u_n, sont des vecteurs propres associés, alors les solutions $X_j(t) = \exp \lambda_j t u_j$ constituent une base de l'espace des solutions de (H).

On reprendra tout ceci en détail dans le cas des systèmes 2×2.

Méthode de variation des constantes

On peut aussi alors faire la variation des constantes de la manière suivante. On écrit :

$$B(t) = \sum_j b_j(t) X_j(t)\ .$$

On utilise ici que pour tout t, $X_j(t)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
On cherche une solution particulière de $X'(t) = AX(t)$, sous la forme :

$$X(t) = \sum_j c_j(t) X_j(t)\ ,$$

où les $c_j(t)$ sont à déterminer.
En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\sum_j c_j'(t)X_j(t) = \sum_j b_j(t)X_j(t) \ ,$$

qui conduit à :

$$c_j'(t) = b_j(t) \ , \ \forall j = 1, \cdots, n \ .$$

On peut alors choisir :

$$c_j(t) = \int_0^t b_j(s)ds \ ,$$

pour produire une solution particulière.

Remarque 2.2.5
Rappelons que pour vérifier les hypothèses ci dessus. On peut calculer le déterminant dét $(A - \lambda I)$. C'est un polynôme de degré n à coefficients réels (car on suppose ici A matrice réelle). On cherche alors les racines de ce polynôme et on vérifie si la condition ci-dessus est satisfaite. Pour chaque racine λ_j, on sait que le noyau de $(A - \lambda_j)$ est de dimension au moins égale à 1 et on peut donc trouver un vecteur propre u_j.

2.2.3 Systèmes 2×2 homogènes du premier ordre

On considère :

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \ , \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \ . \end{aligned}$$

On va mener une étude complète dans ce cas. Cela nous permettra en particulier de répondre à l'exemple considéré dans la théorie des circuits.

Cas de deux racines réelles distinctes
On a déjà traité ce cas. On regarde donc juste un exemple.

Exemple 2.2.6

$$x'(t) = y(t) \ , \ y'(t) = x(t) \ .$$

La matrice A correspondante a deux valeurs propres réelles distinctes : ± 1. On peut alors trouver la solution telle que $X(0) = (0, 1)$ en écrivant ce vecteur sur la base des vecteurs propres de la matrice A.

Cas de deux racines complexes distinctes
Dans ce cas si A est à coefficients réels, on voit facilement que $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Autrement dit, les deux valeurs propres sont complexes conjuguées.
Dans ce cas, il vaut mieux oublier un instant que la question posée était la recherche de solutions réelles. Si on oublie ce point, il est immédiat de trouver deux vecteurs propres (dans $\mathbb{C}^2$) de A. On peut même les choisir tels que : $v_2 = \overline{v_1}$.
On a en effet :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ ,$$

qui correspond à l'écriture de deux équations dans $\mathbb{C}$.
Si on prend le complexe conjugué de ces deux équations, et en remarquant que la matrice A est à coefficients réels, on obtient :

$$A\overline{v_1} = \overline{\lambda_1}\overline{v_1} \ .$$

Autrement dit, on a démontré que si v_1 est vecteur propre (dans $\mathbb{C}^2$), pour la valeur propre λ_1, alors le vecteur $\overline{v_1}$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ sont les conjuguées complexes de celles de v_1 est vecteur propre de A attaché à la valeur propre $\overline{\lambda_1}$.
Toute solution complexe de (H) s'écrit donc :

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \ ,$$

avec $X_2(t) = \overline{X_1(t)}$.
Il est alors facile de reconnaître les solutions réelles, telles que $\overline{X(t)} = X(t)$. On doit juste avoir

$$c_2 = \overline{c_1} \ .$$

Les solutions réelles de (H) sont données par :

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \overline{c_1}\overline{X_1(t)} \ .$$

On peut alors redonner une écriture réelle de l'espaces des solutions, en introduisant : $c_1 = a + ib$, $\lambda_1 = \mu + i\nu$ et $u_1 = v + iw$, avec a, b, μ, ν réels et v et w dans $\mathbb{R}^2$.
On obtient l'écriture suivante :

$$X(t) = (a + ib)(v + iw) \exp \mu t(\cos \nu t + i \sin \nu t) + c.\ c \ ,$$

où " c. c " veut dire "complexe conjugué".
Ceci donne :

$$X(t) = ((av - bw) + i(bv + aw)) \exp \mu t(\cos \nu t + i \sin \nu t) + c.\ c$$

ou encore :

$$X(t) = 2((av - bw)cos\nu t - \sin \nu t(bv + aw)) \exp \mu t$$

On peut aussi le réécrire sous la forme :

$$X(t) = 2 \exp \mu t \left((a \cos \nu t - b \sin \nu t)v - (b \cos \nu t + a \sin \nu t)w\right) .$$

Notons que le théorème de Cauchy dit a priori que, si on cherche $X(t)$ dans $\mathbb{C}^2$ solution de (H) avec $X(0) \in \mathbb{R}^2$, alors $X(t)$ sera en fait dans $\mathbb{R}^2$.
Pour la résolution du problème avec second membre, on peut procéder comme dans le cas réel. De nouveau le théorème de Cauchy dit a priori que, si on cherche $X(t)$ dans $\mathbb{C}^2$ solution de (SD) avec $X(0) \in \mathbb{R}^2$ et $B(t)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors la solution $X(t)$ sera en fait dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.2.7

$$x' = -y \ , \ y' = x \ .$$

Alors le polynôme caractéristique a deux racines i et $-i$. L'espace propre associé à la valeur propre i est donné par

$$-iz_1 - z_2 = 0$$

On peut donc prendre $u = (1, 0)$ et $v = (0, -1)$. Si on prend comme condition initiale $X(0) = (0, 1)$, on trouve : $X(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Cas d'une racine double

Ecrivons d'abord que la matrice (2×2) a une racine double. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et si λ est la valeur propre double, on a :

$$2\lambda = a + d \ , \ ad - bc = \lambda^2 \ .$$

On observe alors que :

$$A = \lambda I + N \ ,$$

où N a la propriété que :

$$N^2 = 0 \ .$$

Pour le voir, on se ramène immédiatement au cas $\lambda = 0$ en remplçant a par $a - \lambda$ et c par $c - \lambda$.
Il s'agit de montrer qu'une matrice N qui a zero comme valeur propre double est forcément de carré 0. C'est immédiat par calcul "bête".

On peut aussi chercher quelle est la forme générale de N. Trois cas sont à considérer. D'abord, on rencontre le cas où :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha\beta \\ \dfrac{1}{\beta}\alpha & -\alpha \end{pmatrix} ,$$

avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
On a deux autres cas à considérer :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} .$$

Deux cas peuvent se présenter :
- ou bien $N = 0$ et on peut choisir pour A deux vecteurs propres linéairement indépendants : les deux vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ font l'affaire ! !
- ou bien N n'est pas l'opérateur nul. Comme $N^2 = 0$, N est de rang 1. Son noyau est de dimension 1. On peut toujours alors prendre un vecteur propre de A comme u_1 (il satisfait $Nu_1 = 0$) et un vecteur u_2 indépendant[4] de u_1 tel que $Nu_2 = u_1$.

On peut vérifier à la main que : $\exp \lambda t\ u_1$ et $\exp \lambda t\ (u_2 + tu_1)$ sont solutions. En effet :

$$\frac{d}{dt} \exp \lambda t\ (u_2 + tu_1) = \lambda \exp \lambda t (u_2 + tu_1) + \exp \lambda t\ u_1 ,$$

et

$$\begin{aligned} & A(\exp \lambda t (u_2 + tu_1)) \\ & = (I + N)(\exp \lambda t\ (u_2 + tu_1))\lambda \exp \lambda t\ (u_2 + tu_1) + \exp \lambda t\ Nu_2 . \end{aligned}$$

Remarque 2.2.8
Il est intéressant dans chacun des cas de décrire dans $\mathbb{R}^2$ la courbe décrite par une solution $X(t)$.

[4]Montrons ce dernier point. Soit $\tilde{u}_2$, un vecteur linéairement indépendant de u_1. N n'étant pas nul, on a $N\tilde{u}_2$ non nul et $N(N\tilde{u}_2) = 0$. Donc $N\tilde{u}_2 = \alpha_2 u_1$. On pose alors $u_2 = \dfrac{1}{\alpha_2}\tilde{u}_2$.

2.3 Traduction pour les équations différentielles d'ordre n

On regarde l'équation avec second membre :

$$(ed) \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(n-j)}(t) = b(t)\ .$$

2.3.1 Equations différentielles homogènes.

Pour le système homogène, qui est défini par :

$$(eh) \qquad \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(n-j)}(t) = 0\ ,$$

on peut faire la réduction a un système différentiel d'ordre 1 $n \times n$, puis suivre la méthode expliquée pour ce cas.
On peut aussi chercher plus directement des solutions de la forme $\exp \lambda t$, ce qui conduit, en mettant dans l'équation à :

$$(ei) \qquad \Phi(\lambda) := \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} = 0\ .$$

La fonction $\exp \lambda t$ est donc solution du système si et seulement si λ est racine de cette équation.
On peut alors reprendre la discussion précédente.
Un premier point est que :

Théorème 2.3.1
L'espace des solutions de l'équation homogène (eh) est de dimension n.

Si l'équation précédente possède n racines réelles distinctes λ_j $(j = 1, \cdots, n)$, une base est constituée par les fonctions $\exp \lambda_j t$.
Dans le cas où l'on a une valeur propre complexe (non réelle) $\lambda_0 = \mu + i\nu$, deux solutions complexes indépendantes sont données par $\exp \lambda_0 t$ et $\exp \overline{\lambda_0} t$.
Si on cherche les solutions réelles, on vérifie que $\exp \mu t \cos \nu t$ et $\exp \mu t \sin \nu t$ sont des solutions indépendantes.
Si λ_0 est une racine double de l'équation, on peut montrer que $t \exp \lambda_0 t$ est aussi solution (il faut penser[5] que c'est $(\frac{d}{d\lambda} \exp \lambda t)_{/\lambda=\lambda_0}$). Plus généralement,

[5] On peut écrire pour tout λ que

$$(\sum_j a_j \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} \exp \lambda t) = \Phi(\lambda) \exp \lambda t\ .$$

si λ_0 est une racine de multiplicité k de l'équation, $t^j \exp \lambda_0 t$ est solution pour $j = 0, 1, \cdots, k-1$.
Ceci fournit un moyen de déterminer toutes les solutions homogènes.

2.3.2 La méthode de variation des constantes

Il ne reste plus qu'à expliquer la méthode de variation des constantes. On se contente de détailler le cas de l'ordre 2. On considère donc (on peut se ramener au cas $a_0 = 1$ en divisant par a_0) l'équation :

$$(ed) \qquad y''(t) + a_1 y' + a_2 y = b(t) \; .$$

et son équation homogène associée :

$$(eh) \qquad y''(t) + a_1 y' + a_2 y = 0 \; .$$

Dans tous les cas, on vient de montrer (quitte à passer par la recherche de solutions complexes) que l'on pouvait trouver deux solutions indépendantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Si on pense à la réduction du système, on tombe sur :

$$X' = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

et $Y_1(t) = (y_1'(t), y_1(t))$ et $Y_2(t) = (y_2'(t), y_2(t)$ sont les solutions du système homogène associé. La méthode décrite précédemment pour les systèmes dit qu'il faut chercher une solution (pour (SD)) sous la forme :

$$c_1(t)Y_1(t) + c_2(t)Y_2(t)$$

et qu'on doit alors résoudre :

$$c_1'(t)Y_1(t) + c_2'(t)Y_2(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ceci conduit au système :

$$\begin{aligned} c_1'y_1' + c_2'y_2' &= b(t) \; , \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \; . \end{aligned}$$

C'est sous cette forme qu'on décrit la méthode quand on veut expliquer la recette sans passer par les systèmes. Notons que la matrice $(Y_1(t)\; Y_2(t))$ est pour tout t inversible. Cette matrice qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_w(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

On peut alors dériver par rapport à λ cette identité et prendre $\lambda = \lambda_0$. Pour le résultat plus général, il faut continuer de dériver par rapport à λ, jusqu'à l'ordre $(k-1)$.

et est appelée la matrice Wronskienne de y_1 et y_2. Le déterminant de la matrice wronskienne est appelé le wronskien :

$$w(y_1, y_2) = y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t) \ .$$

Exercice 2.3.2
Montrer que le wronskien est indépendant de t si $a_1 = 0$. Dans le cas général, montrer que $t \mapsto w(y_1(t), y_2(t)$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Dire que cette matrice est inversible (propriété que l'on peut vérifier en calculant le wronskien et en vérifiant qu'il est non-nul) est en effet une manière de dire que les solutions Y_1 et Y_2 sont indépendantes dans l'espace des solutions de (H). Notons que $(c_1'(t), c_2'(t))$ sont les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $Y_1(t), Y_2(t)$.

Travaux pratiques : Retour à l'exemple initial
Il est bien de la forme (en se ramenant à $a = 1$) :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(t) \ ,$$

avec $b(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$.
On cherche les racines de :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \ .$$

On se contente de traiter le cas où cette équation a deux racines distinctes et réelles : r_1 et r_2.
Suivant la règle établie ci-dessus, on tombe sur :

$$\begin{array}{ll} r_1 c_1'(t) \exp r_1 t + r_2 c_2'(t) \exp r_2 t & = b(t) \\ c_1'(t) \exp r_1 t + c_2' \exp r_2 t & = 0 \end{array}$$

Chacun peut résoudre, à t fixé, ce système de deux équations pour $c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ par sa méthode favorite. Suivons une méthode matricielle.
On peut réécrire le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp r_1 t \ c_1' \\ \exp r_2 t \ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

En utilisant la matrice inverse, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \exp r_1 t \ c_1' \\ \exp r_2 t \ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \frac{1}{r_1 - r_2} \exp -r_1 t \, b(t) \,, \\ c_2'(t) &= -\frac{1}{r_1 - r_2} \exp -r_2 t \, b(t) \,. \end{aligned}$$

D'où une solution particulière obtenue par :

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{r_1 - r_2} \int_0^t \exp -r_1 s \, b(s) \, ds \,, \\ c_2(t) &= -\frac{1}{r_1 - r_2} \int_0^t \exp -r_2 s \, b(s) \, ds \,. \end{aligned}$$

On peut pousser le calcul lorsque $b(t) = \alpha(\cos \omega t + \phi)$. Un moyen pour se faciliter ce calcul est de penser que $b(t) = \alpha \operatorname{Re} \exp i(\omega t + \phi)$ et de faire le calcul d'abord avec $\alpha \exp i(\omega t + \phi)$.
Par exemple :

$$c_1(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r_1 - r_2} \int_0^t \exp((i\omega - r_1)s + i\phi) \, ds \right) \,.$$

On laisse la suite au lecteur .... le cas où $r_1 = i\omega$, $r_2 = -i\omega$ est un peu particulier.

Remarque 2.3.3
La recherche d'une solution particulière dans le cas particulier $b(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$*, peut aussi être menée de la manière suivante. On prend d'abord* $b(t) = z \exp i\omega t$*, (avec* $z = \alpha \exp i\phi$*). On cherche une solution particulière de la forme* $\tilde{z} \exp i\omega t$*. On trouve :*

$$\tilde{z}\Phi(i\omega) = z \,,$$

où $\Phi(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$*.*
Ceci fonctionne dès que $\Phi(i\omega) \neq 0$*, c'est à dire* $i\omega \neq r_1$ *et* $i\omega \neq r_2$*.*
On vérifie alors que $\operatorname{Re}(\tilde{z} \exp i\omega t)$ *est une solution particulière.*

2.4 Systèmes généraux

Ils se traitent à l'aide de ce qui a été appris sur les réductions des matrices (diagonalisation, triangulation ....). Avant de présenter une méthode générale, on présente d'abord deux remarques.

2.4.1 Suivi du système par changement de base

La première est que si $X(t)$ est solution de (SD), alors $\tilde{X}(t) := P^{-1}X(t)$ est solution du système :

$$d\tilde{X}/dt = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} \ ,$$

avec :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \ , \ \tilde{B} = P^{-1}B \ .$$

Par conséquent, si on trouve une matrice P telle que $\tilde{A}$ a une forme plus simple (par bloc, diagonale, triangulaire), alors on a fait avancer le Schmilblic ! !

2.4.2 Cas d'une matrice triangulaire

Expliquons comment on traite le cas triangulaire sur un exemple très simple, mais la méthode est générale.
Considérons par exemple :

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ dx_2/dt &= a_{22}x_2(t) \ . \end{aligned}$$

Il suffit de commencer par résoudre explicitement la deuxième équation. Une fois trouvé $x_2(t)$, la première équation n'est plus qu'une équation différentielle pour $x_1(t)$.

2.4.3 Méthode générale

Si on ne vous propose pas de technique particulière la technique suivante conduit à une construction d'un système de solutions du problème (H).
On calcule d'abord le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \text{ dét } (A - \lambda I) \ .$$

C'est un polynôme de degré n dont on recherche les racines distinctes α_j $(j = 1, \cdots, q)$ dans $\mathbb{C}$. On définit n_j comme étant la multiplicité de α_j et on a la décomposition suivante de P :

$$P(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\alpha_q - \lambda)^{n_q} \ .$$

Pour chaque racine α_j, on cherche une base V_i^j de $\ker(A - \alpha_j)^{n_j}$ $(i = 1, \cdots, n_j)$, dont on peut démontrer que c'est un espace (complexe) dont la dimension est n_j. On peut alors construire, pour $j = 1, \cdots, q$, n_j solutions indépendantes de (H) en considérant :

$$Y_{ij}(t) = \exp \alpha_j t \sum_{p=0}^{n_j-1} \frac{t^p}{p!}(A-\alpha_j)^p V_i^j \ , \quad \text{pour } i = 1, \cdots, n_j \ .$$

On vérifie directement que l'on produit ainsi n solutions indépendantes, en remarquant que $n = \sum_j n_j$.
On remarque que, quand $n_j = 1$, on retrouve le résultat du Théorème 2.2.4.
La méthode de variation des constantes se déroule comme dans le cas où les multiplicités sont égales à 1.

2.5 Exercices

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle
$$u'(x) - u(x) = x^2 e^x \ .$$
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y' + 2y = e^x, \ y' - 5y = x, \ y' + 3y = x + e^{-2x}, \ y' - 2y = x^2 e^{2x}.$$
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y' - xy = x^2, y' - 2xy = x, \quad (\text{sur }]0, +\infty[) \ y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x).$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel strictement positif.
   1. Ecrire la solution générale de l'équation $y' - ky = f$.
   2. On suppose que f est bornée. Montrer que l'équation précédente admet une unique solution bornée.

5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y''-4y'-12y = 0\,,\ y^{(4)}+2y^{(2)}+y = 0\,,\ y''-6y'+9y = e^{3x}\ ,\ y''-6y'+9y = xe^{3x}.$$
6. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle
$$y' + a(x)y = 0$$
ne s'annulent jamais, sauf une.
7. Trouver toutes les solutions de
$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

EDP linéaires du premier ordre

3.1 Quelques notions supplémentaires autour des dérivées partielles.

On a étudié dans le premier Chapitre la notion de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables. Il s'agissait en fait de propriétés de fonctions d'une variable, et l'on doit maintenant regarder la dépendance de toutes les variables prises ensemble. Il faudrait sans doute investir un peu de temps pour explorer la notion - plus délicate - de différentielle. Ceci étant fait dans un autre cours pour certains étudiants mathématiciens et n'étant pas revus par les étudiants physiciens, nous ne détaillerons pas cette partie et nous simplement développerons quelques points utiles pour les calculs ou pour expliquer certains théorèmes.
Comme pour les fonctions d'une variable, on doit d'abord rappeler la notion de continuité.

3.1.1 Continuité

On note d la distance euclidienne entre les points de $\mathbb{R}^2$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

On note aussi $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ la norme euclidienne du vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$, de sorte que

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|.$$

Définition 3.1.1
On dit qu'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si, pour tout point

(x, y) de Ω, on peut trouver un disque ouvert de rayon $r_{x,y} > 0$ contenu dans Ω.

On peut penser comme exemples de base à $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ ou à un disque ouvert).

Définition 3.1.2
Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ lorsque

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \to 0 \text{ quand } d((x, y), (x_0, y_0)) \to 0$$

On dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en chaque point de Ω.

Exemple 3.1.3
La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est continue en $(0, 0)$, et même en n'importe quel $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il est important de noter que pour (x_0, y_0) donné, la continuité des fonctions f_1 en y_0 et de f_2 en x_0 n'entraîne pas la continuité de f en (x_0, y_0), comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 3.1.4
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ bien que les deux applications partielles associées le soient. Montrer que f admet même des dérivées partielles en $(0, 0)$.

3.1.2 Dérivées directionnelles

Définition 3.1.5
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, (x_0, y_0) un point de Ω et $u = (u_1, u_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On appelle dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction de u la dérivée en $s = 0$, si elle existe, de la fonction d'une variable

$$f_u : s \mapsto f((x_0, y_0) + su).$$

On la note alors $\partial_u f(x_0, y_0)$.

Remarque 3.1.6
Bien sûr, lorsque $u = (0,0)$, la direction associée à u n'est pas vraiment définie mais la définition donne que

$$\partial_{u=(0,0)} f(x_0, y_0) = 0 \ ,$$

ce qui est cohérent avec ce que nous utiliserons après.
On notera que comme Ω est ouvert, la fonction f_u est bien définie pour $|s|$ assez petit.

Exemple 3.1.7
Les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne sont autres que les dérivées directionnelles de f dans les directions des deux vecteurs de la base canonique e_1 et e_2.

On donne maintenant un critère très simple d'existence de dérivée directionnelle dans toute direction.

Définition 3.1.8
Lorsque f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ continues dans Ω, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω.

Proposition 3.1.9
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Alors f admet en tout point (x,y) une dérivée directionnelle dans toute direction u, et on a :

$$(\partial_u f)(x,y) = u_1(\partial_x f)(x,y) + u_2(\partial_y f)(x,y) \ . \tag{3.1}$$

Sous ces hypothèses, on peut alors définir, pour $(x,y) \in \Omega$, une application linéaire $(Df)_{(x,y)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{R}^2 \ni u \mapsto (Df)_{(x,y)}(u) = (\partial_u f)(x,y) \ . \tag{3.2}$$

Cete application est appelée la dérivée (ou différentielle) de f au point (x,y).

En particulier $\partial_x f(x,y) = (Df)_{(x,y)}(e_1)$ et $\partial_y f(x,y) = (Df)_{(x,y)}(e_2)$. Autrement dit la matrice 1×2 de $(Df)_{(x,y)}$ dans la base canonique est simplement

$$(Df)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} .$$

Une autre manière d'écrire est :

$$(\partial_u f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

3.1.3 Applications de classe C^k

On présente maintenant l'extension au cas de dérivées d'ordre supérieure. On a déjà défini les applications de classe C^1.

Définition 3.1.10
Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω. On dira que f est de classe C^2 si ces d{erivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont de classe C^1.

On notera

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{xx} f = \partial_x(\partial_x f)\ , & \partial^2_{yx} f = \partial_y(\partial_x f) \\ \partial^2_{xy} f = \partial_x(\partial_y f)\ , & \partial^2_{yy} f = \partial_y(\partial_y f) \end{array}$$

Comme mentionné au chapitre 1, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.11
Si f est de classe C^2 dans Ω, alors on a :

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f\ , \quad \text{dans } \Omega\ . \tag{3.3}$$

On note aussi les dérivées secondes

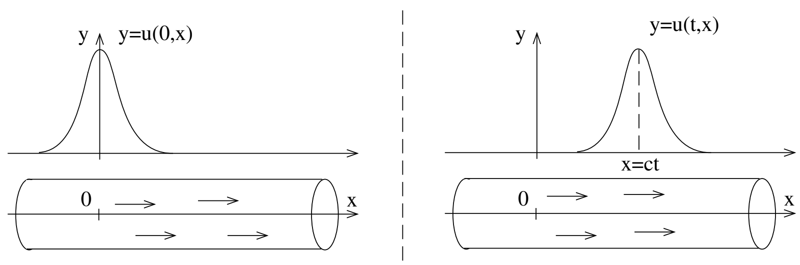
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Rappelons que l'utilisation de ∂ est impérative quand on considère plusieurs variables.
On laisse au lecteur le soin de définir la notion d'application de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On posera

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)\ .$$

3.2 Les équations de transport

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c (en m/s). Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau. On note $u(t,x)$ la concentration (en gr/m) de polluant à l'instant t et à l'abscisse x.



La fonction u vérifie l'EDP

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0. \tag{3.4}$$

En effet, à l'instant t, la quantité de polluant entre les points d'abscisse 0 et x est

$$Q(t) = \int_0^x u(t,y)dy.$$

A l'instant $t+h$, le polluant s'est deplacé de ch mètres. La quantité de polluant entre les points d'abscisse ch et $x+ch$ est donc celle qui se trouvait à l'instant t entre 0 et x. On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+h,y)dy.$$

Nous voulons dériver l'égalité obtenue par rapport à x. Pour ce faire nous effectuons le changement de variable $y' = y - ch$ dans la deuxième intégrale. Nous obtenons

$$Q(t) = \int_0^x u(t+h, y'+ch)dy',$$

et donc

$$u(x,t) = u(t+h, x+ch). \tag{3.5}$$

Nous voulons enfin dériver par rapport à h l'égalité (3.5). On utilisera très souvent le lemme suivant (dérivée d'une fonction composée).

Lemme 3.2.1
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit aussi f_1 et f_2 deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = u(f_1(t), f_2(t))$$

est dérivable, sa dérivée est continue et donnée par

$$F'(t) = (Du)_{(f_1(t),f_2(t))}((f_1'(t), f_2'(t)),$$

ou encore :

$$F'(t) = f_1'(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(f_1(t), f_2(t)) + f_2'(t)\,\frac{\partial u}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))\ .$$

Preuve : Elle est admise.

3.3 Equations à coefficients constants

On va résoudre les EDP de la forme (3.4), ou de manière un peu plus générale, les équations
$$a\partial_t u(t,x) + b\partial_x u(t,x) = 0, \tag{3.6}$$
où a et b sont deux constantes réelles, dont l'une au moins n'est pas nulle. Comme on l'a vu dans le premier chapitre, il est important de préciser ce que l'on entend par "résoudre". On cherche ici toutes les fonctions u définies sur $\mathbb{R}^2$ (ou sur une partie plus petite Ω, réunion de boules ouvertes) de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité (3.6) soit vérifiée. Commençons pour fixer les idées par examiner le cas de l'équation ($a = 1$ et $b = 0$)
$$\partial_t u(t,x) = 0.$$
On voit immédiatement que u est solution si et seulement si u ne dépend pas de t. Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent
$$u(t,x) = f(x)$$
pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La première remarque qui s'impose, c'est qu'il y a beaucoup de solutions !
On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique :
Les solutions $(t,x) \mapsto u(t,x)$ sont exactement les fonctions qui sont constantes le long des droites horizontales du plan (Otx), c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a,b) = (1,0)$. Ce phénomène a également lieu pour toutes les équations (3.6), et c'est que nous allons mettre en évidence.

3.3.1 Méthode des caractéristiques

On reprend l'équation (3.6). Supposons que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, soit solution. En terme de différentielle ou dérivée, (3.6) se traduit par
$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, (Du)_{(t,x)}(a,b) = 0. \tag{3.7}$$
Autrement dit la dérivée directionnelle $\partial_{(a,b)}u(t,x)$ de u dans la direction du vecteur (a,b) est nulle en tout point (t,x) de $\mathbb{R}^2$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.3.1
Si u est solution de (3.6), alors u est constante le long de chaque droite de direction (a,b).

Preuve :
Soit (t,x) un point de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

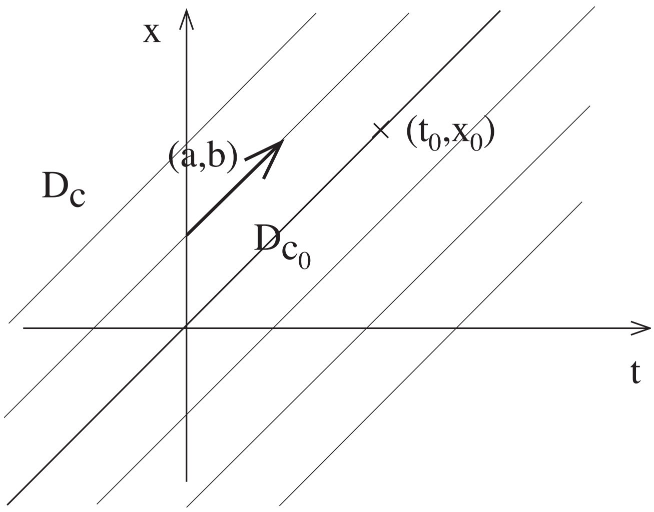
$$k \mapsto \varphi(k) = u((t,x) + k(a,b)) = u(t + ka, x + kb).$$

La fonction f donne les valeurs de u en chaque point $(t', x') = (t,x) + k(a,b)$ de la droite $\mathcal{D}$ de direction (a,b) passant par (t,x). Or, en utilisant à nouveau le Lemme 3.2.1, on a

$$\varphi'(k) = (Du)_{((t,x)+k(a,b))}(a,b) = 0.$$

Donc φ est constante, et u l'est sur la droite $\mathcal{D}$. □

Définition 3.3.2
On appelle caractéristiques de l'équation (3.6) les droites de vecteur directeur (a,b). Ce sont toutes les droites $\mathcal{D}_c$ d'équation $bt - ax = c$, où c parcourt l'ensemble des réels.



Notons maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui a un réel c associe la valeur de u sur la droite $\mathcal{D}_c$. Soit (t_0, x_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule caractéristique qui passe par (t_0, x_0) : c'est la droite $\mathcal{D}_{c_0}$, où $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0, x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0).$$

Ce raisonnement étant valable pour tout (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$, on a finalement

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, u(t,x) = f(bt - ax). \tag{3.8}$$

On remarque au passage que, puisque u est $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi (Exercice !).

On a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire. Il reste à prouver que toute fonction u de la forme (3.8) avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est bien solution de (3.6). C'est une vérification très simple, grâce encore une fois au Lemme 3.2.1, et qu'on laisse au lecteur. On a alors démontré le résultat suivant.

Théorème 3.3.3
Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation (3.6) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(t,x) = f(bt - ax)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3.3.4
Dans le théorème ci-dessus, on peut remplacer $\mathbb{R}^2$ par un convexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est alors définie sur un intervalle qui est l'image dans $\mathbb{R}$ de Ω par l'aplication $(t,x) \mapsto bt - ax$,.

3.3.2 Méthode du changement de variables

Nous allons retrouver le résultat précédent à l'aide d'une autre méthode, qui s'avère être très pratique. Plutôt que d'une méthode totalement différente, il s'agit d'une autre formulation de la même idée. On a vu que les solutions de l'équation (3.6) ne dépendent que de la variable $bt - ax$. On pose donc $t' = bt - ax$ et on choisit une autre coordonnée x' indépendante. On prend par exemple

$$\begin{cases} t' = bt - ax \\ x' = at + bx. \end{cases}$$

On pose alors $v : (x', t') \mapsto v(t', x') = u(t, x)$, et l'on examine l'équation vérifiée par v lorsque u est solution de (3.6). On calcule d'abord les dérivées partielles de u en fonction de celles de v. Là encore l'ingrédient essentiel est le Lemme 3.2.1. On a

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) &=& \partial_t (v(bt - ax, at + bx)) \\ &=& b(\partial_1 v)(bt - ax, at + bx) + a(\partial_2 v)(bt - ax, at + bx), \\ \partial_x u(t,x) &=& \partial_x (v(bt - ax, at + bx)) \\ &=& -a(\partial_1 v)(bt - ax, at + bx) + b(\partial_2 v)(bt - ax, at + bx). \end{cases}$$

Donc u, de classe $\mathcal{C}^1$, est solution de l'équation (3.6) si et seulement si v vérifie l'équation

$$(a^2 + b^2)(\partial_2 v)(t', x') = 0.$$

Autrement dit, puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, u est solution de l'équation (3.6) si et seulement si v ne dépend pas de x' : $v(t', x') = f(t')$ pour une certaine fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ puisque v l'est. Revenant à u, on retrouve le Théorème 3.3.3 :

$$u(t, x) = f(bt - ax).$$

Donnons une approche légèrement différente. Si on fait plus généralement le changement de variables

$$\begin{cases} t' = \alpha' t + \beta' x \\ x' = \gamma' t + b\delta' \ , \end{cases}$$

où on suppose que $\alpha'\delta' - \gamma'\beta' \neq 0$.
Alors l'équation satisfaite par v est :

$$a'\partial_{t'} v + b'\partial_{x'} v = 0 \ ,$$

avec

$$\begin{cases} a' = \alpha' a + \beta' b \\ b' = \gamma' a + \delta' b \ . \end{cases}$$

Le choix proposé précédemment consistait en choisir le changement de variables de telle sorte que $a' = 0$, soit $\alpha' a + \beta' b = 0$. La paire $\alpha' = b$, $\beta' = -a$ convient. On trouve alors $b' = a^2 + b^2$.

Application à des problèmes avec conditions initiales Cette méthode est aussi adaptée pour résoudre le problème de trouver u de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &a\partial_t u + b\partial_x u = f(t, x) \ , \\ &u(0, x) = \varphi(x) \ , \end{aligned}$$

où $a \neq 0$, f est donnée dans C^0, φ est donné dans C^1.

3.4 Equations à coefficients variables

3.4.1 Champs de vecteurs

Considérons par exemple l'équation

$$\partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0 \tag{3.9}$$

On cherche à appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation. Lisons l'équation. La dérivée directionnelle de u dans la direction du vecteur $X = (1, x)$ doit être nulle :

$$\partial_{(1,x)} u(x, y) = 0.$$

Evidemment, la difficulté qui apparaît est que le vecteur en question dépend du point (x, y) où l'on se trouve. On doit adapter un peu la notion de caractéristique.

Définition 3.4.1
On appelle champ de vecteur une application (régulière) X de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considéré comme sous-ensemble des points du plan, dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme ensemble des vecteurs du plan (i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).

Ici régulière signifie de classe C^0 ou de classe C^1.

Par exemple, l'équation (3.9) amène naturellement à considérer le champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Un autre exemple est le champ de vecteurs grad V, où V est une fonction régulière, définie sur Ω :

$$\text{grad V } (x, y) = ((\partial_x V)(x, y), (\partial_y V)(x, y))\ .$$

On peut par exemple prendre $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $V(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Le champ de vecteur est appelé central car il est parallèle, au point (x, y) au vecteur (x, y).

Définition 3.4.2
Soit X un champ de vecteurs régulier sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Une courbe intégrale de X est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

On appelle caractéristiques de l'équation (3.9) les courbes intégrales du champ de vecteurs $X(x, y) = (1, x)$ (il y a une petite ambiguité ici car les courbes intégrales sont des courbes paramétrées !). Cette définition est motivée par la

Proposition 3.4.3
Si u est une solution de l'équation (3.9), u est constante le long des courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t)$ du champ X :

$$\frac{d(u(\gamma))}{dt} = 0.$$

Cette proposition généralise ce que l'on a vu dans le cas des équations à coefficients constants : dans ce cas-là, le champ de vecteurs X associé à l'équation est le champ constant $X(x, y) = (a, b)$, dont les courbes intégrales sont le droites de direction (a, b). La preuve est la même, et constitue un excellent **Exercice**.

3.4.2 Un problème de Cauchy pour l'équation (3.9)

A titre d'exemple nous allons résoudre un problème de Cauchy associé à l'équation (3.9) :

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = \phi(y), \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ donnée.
On commence en cherchant les courbes caractéristiques de l'équation. Ce sont les courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ du champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Par définition on a donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = x(t), \end{cases}$$

ce qui donne $x(t) = t + x_0$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + x_0 t + y_0$, où l'on a noté (x_0, y_0) le point de γ correspondant à $t = 0$. Si l'on préfère une équation cartésienne, on voit que la courbe γ qui passe par (x_0, y_0) (il y en a une et une seule...), a pour équation

$$\gamma : y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

On veut maintenant déterminer la valeur de la solution du problème de Cauchy (3.10) au point (x_0, y_0). On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0). Cette courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(x_1 = 0, y_1 = y_0 - \dfrac{x_0^2}{2})$, et l'on sait que

$$u(x_1, y_1) = u(0, y_1) = \phi(y_1) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

On obtient donc, pour n'importe quel (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$,

$$u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

En raisonnant par condition nécessaire, on obtient donc $u(x, y) = \phi(y - \dfrac{x^2}{2})$.
Il est très simple de vérifier que cette fonction est effectivement solution de

(3.10), et la méthode des caractéristiques nous a encore permis de construire l'unique solution de ce problème.

3.5 Un exemple d'équation non-linéaire : Equation de Burgers

On s'intéresse maintenant à l'EDP du premier ordre non-linéaire

$$\partial_x u(x,y) + u(x,y)\partial_y u(x,y) = 0. \tag{3.11}$$

S'agissant d'une équation du premier ordre, on va encore tenter d'utiliser la méthode des caractéristiques. Cette fois, le champ de vecteur X associé à l'équation

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ u(x,y) \end{pmatrix}$$

dépend de la solution ! Supposons que celle-ci est connue, et considérons les courbes intégrales du champ de vecteurs X. Ce sont les courbes paramétrées $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ telles que

$$x'(t) = 1, y'(t) = u(x(t), y(t)). \tag{3.12}$$

Sur une telle courbe, on a donc

$$\begin{aligned}\partial_t(u(x(t),y(t))) &= (Du)_{(x(t),y(t))}(x'(t),y'(t)) = x'(t)(\partial_x u(x(t),y(t)))+y'(t)(\partial_y u(x(t),y(t)))\\ &= \partial_x u(x(t),y(t)) + u(x(t),y(t))\partial_y u(x(t),y(t)) = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit la fonction u est constante le long des courbes intégrales du champ $X = X_u$. Reprenons alors (3.12) : notant C_γ la valeur (constante !) de u sur la courbe intégrale γ de X_u, on a

$$x'(t) = 1, y'(t) = C_\gamma.$$

Ces courbes intégrales sont donc des droites $y = mx + p$, puisque

$$x(t) = t + x_0, y(t) = C_\gamma t + y_0.$$

Considérons maintenant le problème de Cauchy pour l'équation (3.11)

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + u(x,y)\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

où ϕ est une fonction régulière donnée. On cherche d'abord les caractéristiques. Ce sont des droites d'équation $y = mx + p$ et la pente m est égale à la valeur de u sur cette droite. La caractéristique issue du point $(x_0, 0)$ est donc la droite d'équation

$$y = \phi(x_0)(x - x_0). \tag{3.14}$$

Contrairement au cas des équations linéaires, ces caractéristiques peuvent donc se couper ! Supposons par exemple que deux d'entre elles, issues respectivement de $(x_1, 0)$ et de $(x_2, 0)$, se coupent en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Si u est définie en ce point on doit avoir

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(x_1) = \phi(x_2),$$

ce qui est absurde. On peut donc conclure que le problème (3.13) n'admet en général pas de solutions définies dans le plan tout entier, mais seulement dans un domaine $\mathcal{D}_\phi$ du plan dans lequel les droites caractéristiques (3.14) ne se coupent pas.

Etudions le problème (3.13) pour $\phi(x) = x^2$. Partant d'un point (x_0, y_0) tel que $u(x_0, y_0) \neq 0$, on obtient la courbe intégrale :

$$x(t) = x_0 + t \ , \ y(t) = y_0 + u(x_0, y_0)t \ .$$

La courbe intégrale coupe la droite $\{y = 0\}$ au temps $t = -y_0/u(x_0, y_0)$. On a donc $u(x_0, y_0) = u(x_0 - y_0/u(x_0, y_0), 0) = \phi(x_0 - y_0/u(x_0, y_0))$.
Dans notre cas particulier, on obtient l'équation

$$u(x_0, y_0) = (x_0 - y_0/u(x_0, y_0))^2 \ .$$

Si cette équation détermine un unique u, on aura résolu le problème. Dans tous les autres cas le problème sera mal posé. Notre question devient donc : Discuter en fonction de (x_0, y_0) les solutions, non nulles, de

$$f(\lambda) := \lambda^3 - (x_0\lambda - y_0)^2 \ .$$

Noter qu'on peut toujours supposer $y_0 \neq 0$, puisque u est connue sur $x = 0$. Un cas simple est celui où l'on peut montrer que $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. Un critère simple est de montrer que la dérivée de f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2x_0(x_0\lambda - y_0) \ .$$

Son discriminant est

$$\Delta(x_0, y_0) := 4(x_0^2 - 6x_0y_0) = 4x_0(x_0 - 6y_0) \ .$$

Le problème est que le discriminant est positif pour y_0 petit par rapport à x_0, situation qui n'est pas favorable ! !

Le problème est plus simple si on se donne une condition sur $\{x = 0\}$:

$$u(0, y) = y \ .$$

On trouve assez facilement que la solution est déterminée par $u(x, y) = y/(1+x)$ sur le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$.

3.6 Exercices

3.6.1 EDP du premier ordre à coefficients constants

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 4\partial_t u(t,x) - 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = x^3 \end{cases}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 3\partial_t u(t,x) + 5\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(t,0) = t^2 \end{cases}$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \sin(x) \end{cases}$$
4. On cherche les solutions $\mathcal{C}^2$ du problème
$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = x^2, \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

a. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$(\partial_t - 4\partial_x)((\partial_t + \partial_x)u)(t,x) = \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x).$$

b. Trouver toutes les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_t v(t,x) - 4\partial_x v(t,x) = 0. \tag{1}$$

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On veut trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = f(4t + x). \tag{2}$$

On pose $t' = -t + x$, $x' = 4t + x$ et l'on note $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $w(t', x') = u(t,x)$.

c1) Quelle équation vérifie w lorsque u est solution de (2) ?

c2) Résoudre cette équation. En déduire les solutions de (2).

d. Conclure.

3.6.2 Courbes intégrales de champs de vecteurs

1. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1, 2xy^2)$.
2. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1+x^2, 1)$.
3. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $[-1,1] \times \mathbb{R}$ défini par $X(x,y) = (\sqrt{1-x^2}, 1)$.
4. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y, x)$.
5. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x, y)$.
6. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y, -y)$.
7. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x, 2y)$.

3.6.3 EDP du premier ordre à coefficients non-constants

1. On considère le champ de vecteurs $X(x,y) = (1, -xy)$.

   a. Déterminer et tracer ses courbes intégrales.

   b. Montrer que les solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation

   $$\partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0$$

   s'écrivent nécessairement $u(x,y) = f(ye^{x^2/2})$ pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

   c. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

   d. Le problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$$

   a-t-il des solutions ?

Chapitre 4

L'équation des ondes sur un axe

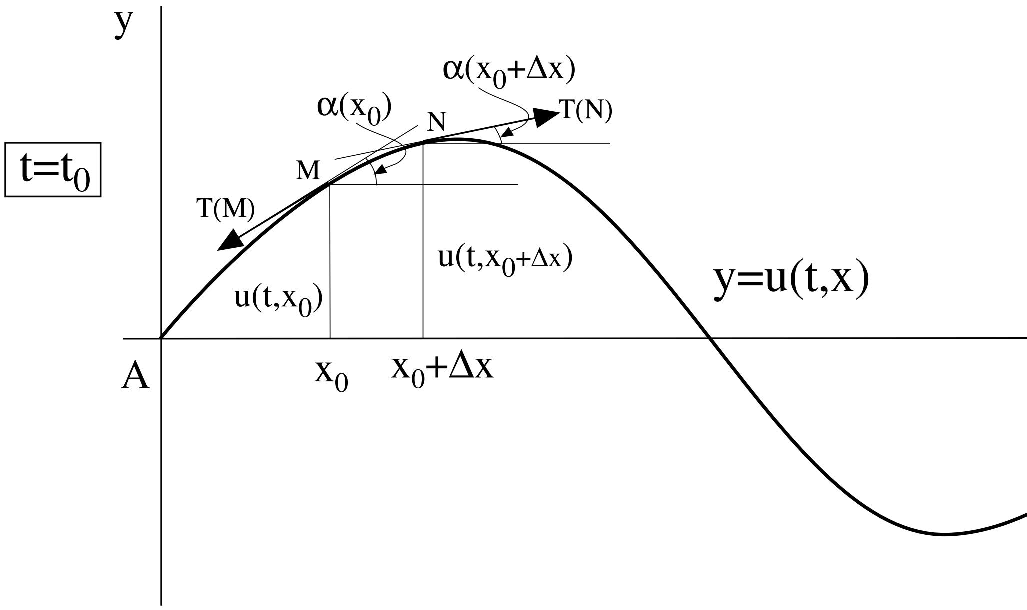
4.1 Le modèle physique : cordes vibrantes

On considère une corde de longueur L, de densité ρ constante, élastique, tendue entre deux points A et B. On s'intéresse aux petites vibrations transversales de la corde. Penser par exemple aux vibrations d'une corde de guitare. On supposera que les effets de la gravité et des autres éventuelles forces extérieures peuvent être négligées. On choisit axe des abscisses la droite (AB), l'origine de l'axe étant le point A, et on note x les abscisses. On désigne alors par $u(t, x)$ le déplacement vertical de la corde au point d'abscisse x et à l'instant t. On va appliquer la loi de Newton à un petit morceau de corde de longueur Δx commençant au point M d'abscisse x et d'extrémité N d'abscisse $x + \Delta x$. Les forces extérieures sont les tensions exercées par le morceau de corde AM au point M, notée $T(M)$, et celle $T(N)$ exercée par le morceau de corde NB au point N. L'hypothèse que la corde est élastique correspond au fait que ces forces de tensions sont dirigées tangentiellement à la corde. Puisque l'on suppose que les déplacements de la corde n'ont lieu que dans la direction verticale, la loi de Newton donne

$$T(M) + T(N) = \rho \Delta x \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^2_{tt} u(t, x) \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer les composantes des vecteurs $T(M)$ et $T(N)$. L'angle entre la tangente à la corde au point d'abscisse x et la direction horizontale est $\alpha(t, x) = \partial_x u(t, x)$. On a donc, notant $\tau(t, x)$ la norme du vecteur $T(t, x)$,

$$T(M) = \begin{pmatrix} -\tau(t, x) \cos(\partial_x u(t, x)) \\ -\tau(t, x) \sin(\partial_x u(t, x)) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tau(t, x + \Delta x) \cos(\partial_x u(t, x + \Delta x)) \\ \tau(t, x + \Delta x) \sin(\partial_x u(t, x + \Delta x)) \end{pmatrix}.$$


y
α(x0+Δx)
α(x0)
N
T(N)
t=t0
M
T(M)
u(t,x0+Δx)
y=u(t,x)
u(t,x0)
A
x0
x0+Δx

On obtient donc le système (plutôt compliqué !)

$$\begin{cases} \tau(t,x+\Delta x)\cos(\partial_x u(t,x+\Delta x)) - \tau(t,x)\cos(\partial_x u(t,x)) = 0 \\ \tau(t,x+\Delta x)\sin(\partial_x u(t,x+\Delta x)) - \tau(t,x)\sin(\partial_x u(t,x)) = \partial_{tt}^2 u(t,x) \end{cases}$$

On utilise maintenant l'hypothèse de petitesse des déplacements, puis on fait tendre Δx vers 0. Dans la première équation on considère que les termes en cosinus valent 1, et dans la seconde on utilise $\sin A \sim A$. On obtient alors $\partial_x \tau(t,x) = 0$ donc $\tau(t,x)$ ne dépend pas de x. On peut aussi montrer que l'hypothèse de déplacement uniquement transverse entraîne que $\tau(t,x)$ ne dépend pas non plus de t ; au total $\tau(t,x) = \tau \in \mathbb{R}$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. On obtient alors l'équation

$$\partial_{tt}^2 u(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\partial_{xx}^2 u(t,x).$$

C'est cette équation que l'on appelle communément équation des ondes, et la constante $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, qui ne dépend que du milieu où se déplacent les ondes, est, nous le verrons, la vitesse de propagation dans le milieu en question.

4.2 Solutions de l'équation des ondes

4.2.1 Solution générale

On va résoudre l'équation des ondes

$$c^2 \partial_{xx}^2 u(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x), \tag{4.1}$$

c'est à dire trouver les fonctions $u(t,x)$, définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient cette égalité. On reprend la méthode du changement de coordonnées. Soit

$$\begin{cases} t' = x + ct \\ x' = x - ct, \end{cases}$$

et $v : (x', t') \mapsto u(t,x)$. On note que :

$$u(t,x) = v(x+ct, x-ct) \ .$$

On vérifie facilement que

$$\partial_t u(t,x) = c\partial_{t'} v(t',x') - c\partial_{x'} v(t',x'), \partial_x u(t,x) = \partial_{t'} v(t',x') + \partial_{x'} v(t',x')$$

puis que

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) = c^2\partial^2_{t't'}v(t',x') + c^2\partial^2_{x'x'}v(t',x') - 2c^2\partial^2_{t'x'}v(t',x') \\ \partial^2_{xx}u(t,x) = \partial^2_{t't'}v(t',x') + \partial^2_{x'x'}v(t',x') + 2\partial^2_{t'x'}v(t',x'). \end{cases}$$

Donc u est solution de l'équation des ondes si et seulement si v vérifie

$$\partial^2_{t'x'}v(t',x') = 0.$$

On a déjà vu cette équation, et les solutions sont toutes les fonctions v qui s'écrivent

$$v(t',x') = f(t') + g(x'),$$

où f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Revenant à u, on obtient que

$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{4.2}$$

Rappelons que la solution générale de équation de transport associée à $\partial_t + c\partial_x$ est une fonction arbitraire de la variable $x - ct$. On voit ici que la solution est la somme de deux fonctions arbitraires l'une de la variable $x + ct$ et l'autre de la variable $x - ct$. La première décrit une onde arbitraire se déplaçant vers la gauche à la vitesse c, et la seconde une autre onde arbitraire se déplaçant vers la droite à la vitesse c.
On comprend mieux l'analogie avec les équations de transport si l'on remarque que

$$\partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u(t,x).$$

Autrement dit pour résoudre l'équation des ondes, on doit chercher u et w telles que

$$\begin{cases} w = \partial_t u + c\partial_x u \\ \partial_t w - c\partial_x w = 0 \end{cases}$$

4.2.2 La formule de D'Alembert

On vient de voir que l'équation des ondes sur l'axe réel a de nombreuses solutions. Notre objectif ici est de montrer le résultat suivant, qui remonte à D'Alembert au milieu du 18ème siècle.

Théorème 4.2.1
Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. Alors le problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0\ , \\ u(0,x) = \phi(x)\ , \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x)\ , \end{cases} \tag{4.3}$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :
La preuve de l'existence est très simple : il suffit de vérifier que la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

est une solution du problème.

Bien sûr, le lecteur trouvera que la formule a un côté "parachuté". En fait, on a vu précédemment que les solutions générales de l'équation des ondes sont de la forme :

$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct) \ ,$$

avec f et g de classe C^2. On peut alors écrire les conditions initiales qui permettront de déterminer u par :

$$\phi(x) = f(x) + g(x) \ , \ \psi(x) = c\,(f'(x) - g'(x)) \ .$$

Cette deuxième version a l'avantage de donner aussi l'unicité. □

Exercice 4.2.2
Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = \sin x$ et $\psi(x) = 0$

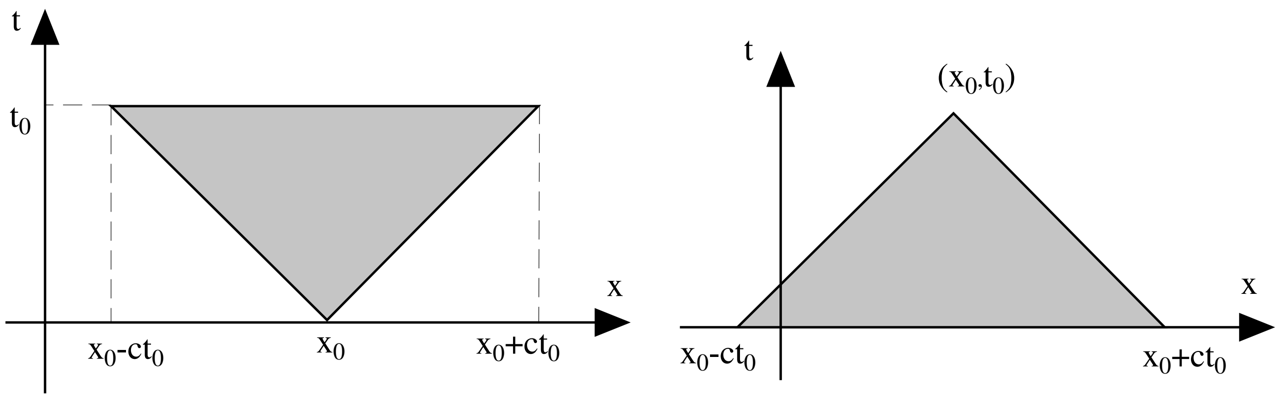
Exercice 4.2.3
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = 0$ et $\psi(x) = \cos x$

Exercice 4.2.4
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = e^x$ et $\psi(x) = \sin x$

4.3 Causalité et conservation de l'énergie

4.3.1 Vitesse de propagation finie

On vient de voir que l'effet d'une position $\phi(x)$ à l'instant $t = 0$ est une paire d'ondes et qui se propagent dans les deux directions à vitesse c. Si l'on a une vitesse $\psi(x)$ à l'instant $t = 0$, on obtient une onde qui s'étale dans les deux directions, à une vitesse inférieure ou égale à c. Dans tous les cas rien ne se propage à vitesse plus grande que c. Autrement dit la valeur de la solution u au point (t, x) ne dépend que des valeurs de ϕ en $x - ct$ et en $x + ct$, et des valeurs de ψ sur l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. Pour le voir il suffit de reprendre l'expression de la solution donnée dans le théorème de D'Alembert.


t
t_0
x
x_0-ct_0
x_0
x_0+ct_0
t
(x_0,t_0)
x
x_0-ct_0
x_0+ct_0

Proposition 4.3.1
Soient ϕ et ψ comme dans le Théorème 4.2.1, et u la solution du probème de Cauchy (4.3). Si ϕ et ψ sont nulles en dehors de l'intervalle $-R \leq x \leq R$, alors pour chaque t fixé, $u(t,x)$ est nulle quand $x \notin [-R - c|t|, R + c|t|]$.

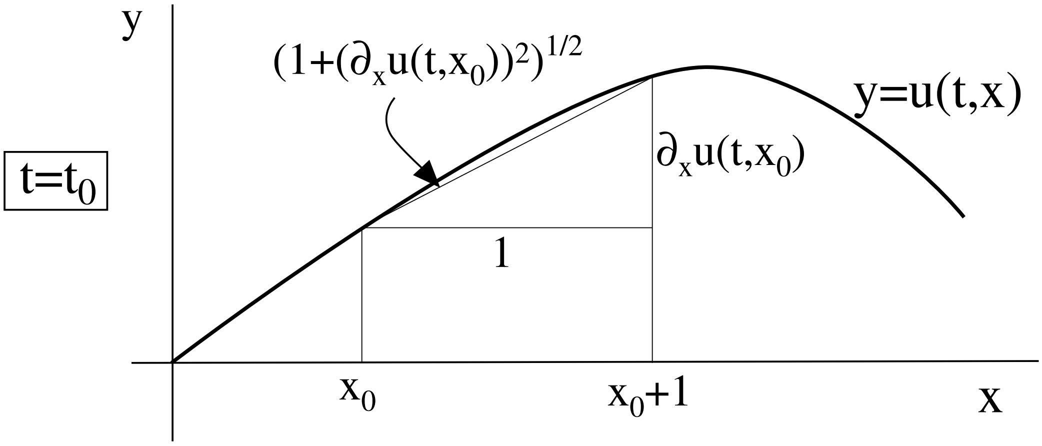
Exercice 4.3.2
Le milieu d'un corde de piano de longueur ℓ, de tension τ et de densité ρ est frappé par un marteau de diamètre $2a$. Une puce dort sur la corde à la distance $\ell/4$ d'une extrémité. Quand la puce se réveillera-t-elle ?

4.3.2 Energie

Définition 4.3.3
Soit u une solution de l'équation des ondes. On appelle énergie de u la quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx$$

Il faut noter que, pour ce qui concerne les constantes ρ et τ qui sont strictement positives, nous avons gardé ici la définition physique de l'énergie de la corde vibrante : la première intégrale est la partie énergie cinétique ("$\frac{1}{2}mv^2$"), et la deuxième est la partie énergie potentielle, qui correspond à la tension τ multipliée par l'allongement de la corde élastique ($\sqrt{1 + (\partial_x u)^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(\partial_x u)^2$). Là encore l'hypothèse de petitesse des oscillations permet de simplifier considérablement l'étude !


y
$(1+(\partial_x u(t,x_0))^2)^{1/2}$
$y=u(t,x)$
$t=t_0$
$\partial_x u(t,x_0)$
1
x_0
x_0+1
x

Nous allons démontrer rigoureusement un phénomène très important, particulier aux équations du même type que celle des ondes - les équations hyperboliques : l'énergie est constante au cours du temps.

Théorème 4.3.4
Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. On suppose que ϕ et ψ sont nulles en dehors d'un intervalle borné $|x| \leq R$. Soit u l'unique solution du problème (4.3) :

$$\begin{cases} \tau\partial^2_{xx}u(t,x) - \rho\partial^2_{tt}u(t,x) = 0 \; ; \\ u(0,x) = \phi(x) \; ; \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \; . \end{cases}$$

Alors la a quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx$$

est une fonction constante de t.

Pour prouver ce résultat, on va dériver l'expression donnant $E(t)$ par rapport à t, et montrer que cette dérivée est nulle. Il nous faut donc dériver une intégrale dépendant d'un paramètre (voir quelques rappels à la fin du chapitre).
Posons $f(t,x) = (\partial_t u(t,x))^2$ et

$$A(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)dx.$$

On veut dériver la fonction $t \mapsto A(t)$. Notons d'abord que pour tout t fixé, l'intégrale $A(t)$ est en fait une intégrale sur un intervalle borné puisque la fonction $f(t,x)$, qui est continue, est nulle en dehors de l'intervalle $|x| \leq R + ct$. De plus, pour tout intervalle $]t_1, t_2[$ fixé, on a donc $A(t)$ défini par une intégrale qu'on peut supposer définie sur un intervalle borné indépendant de t dans cet intervalle. On a maintenant

$$\partial_t f(t,x) = 2\partial_t u(t,x)\partial^2_{tt}u(t,x) \; ,$$

et on obtient ainsi

$$A'(t) = \rho\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x)\partial^2_{tt}u(t,x)\, dx \; ,$$

et, puisque u est solution de l'équation des ondes,

$$A'(t) = T\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x)\partial^2_{xx}u(t,x)\, dx \; .$$

Maintenant on intègre par parties cette intégrale, où l'intégrand est nul en dehors d'un intervalle borné :

$$A'(t) = -T\int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xt}u(t,x)\partial_x u(t,x)dx = -\frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\partial_x u(t,x))^2 dx.$$

Notant alors $B(t) = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u(t,x))^2 dx$, on montre de la même manière que

$$B'(t) = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\partial_x u(t,x))^2 dx,$$

et puisque $E(t) = A(t) + B(t)$, on a bien $E'(t) = 0$. □

Remarque 4.3.5
On peut retrouver l'unicité en utilisant la méthode d'énergie. Soient u_1 et u_2 deux solutions. La fonction $v = u_1 - u_2$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Puisque l'énergie de v est constante, on a pour tout t,

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}}(\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u(t,x))^2 dx = E(0) = 0\ .$$

Donc $\partial_x v$ et $\partial_t v$ sont toujours nulles, donc v est constante. Puisque $v(0,x) = 0$, v est identiquement nulle et $u_1 = u_2$.

4.4 Quelques théorèmes de base sur les intégrales de fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes qui suivent servent dans de multiples circonstances et leurs hypothèses sont faciles à vérifier.

Théorème 4.4.1
Soit $f : [x_1, x_2] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F définie par :

$$[x_1, x_2] \ni x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)dt\ .$$

Alors F est continue sur $[x_1, x_2]$.

Pour la démonstration, le point essentiel est de remarquer que f est uniformément continue sur $[x_1, x_2] \times [a, b]$.
Pour ce qui concerne la dérivabilité de F on dispose du critère suivant

Théorème 4.4.2
Soit $f : [x_1, x_2] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une dérivée partielle $\partial_x f$ par rapport à sa première variable, qui est continue sur $[x_1, x_2] \times [a, b]$. Alors l'application F définie par

$$[x_1, x_2] \ni x \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est continument dérivable sur $[x_1, x_2]$, et

$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(x, t)\, dt.$$

4.5 Exercices

1. Montrer que si u est une solution de l'équation des ondes

$$\partial_{tt}^2 u(t, x) - \partial_{xx}^2 u(t, x) = 0,$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions $v_\lambda : (t, x) \mapsto u(t, x - \lambda)$ et $w_\lambda : (t, x) \mapsto u(\lambda t, \lambda x)$ sont aussi solutions.

2. On considère l'équation des ondes amorties

$$\partial_{tt}^2 u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t) - r\partial_t u(x, t), \tag{1}$$

où r est un réel positif ou nul (qui mesure la résistance de l'air). On suppose que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie l'équation (1), et l'on pose

$$\begin{cases} e(t, x) = \frac{1}{2}(\partial_t u(t, x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u(t, x))^2 \\ p(t, x) = \partial_t u(t, x)\partial_x u(t, x). \end{cases}$$

A. **On suppose dans cette partie que** $r = 0$.
a. Montrer que $\partial_t e(t, x) = \partial_x p(t, x)$ et que $\partial_x e(t, x) = \partial_t p(t, x)$. En déduire que e et p sont également solution de (1) (toujours avec $r = 0$).
b. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $u(t, x)$ et $\partial_t u(t, x)$ sont nulles pour tout $x \notin [-R, R]$.

b1) Rappelez pourquoi, pour chaque t, il existe un réel $R(t)$ telle que $u(t,x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$.
b2) Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t,x)dx = 0.$$

3. Quel théorème du cours évoque ce résultat ?

II. **On suppose maintenant que** $r > 0$.

1. Montrer que $\partial_t e(t,x) = -r(\partial_t u(t,x))^2 + \partial_x p(t,x)$.
2. En supposant encore une fois que $u(t,x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$, montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t,x)dx \leq 0.$$

3. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Chapitre 5

L'équation de Laplace et principe du maximum

5.1 Extrema d'une fonction de deux variables

5.1.1 Fonctions d'une variable

On commence par la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions d'une variable réelle.

Théorème 5.1.1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour tout $k \leq n$ on a

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{s^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!} f^{(k+1)}(u)du$$

Preuve :
Par récurrence. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons qu'elle le soit pour l'entier $k-1$, c'est-à-dire

$$\int_0^s \frac{(s-u)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(u)du = f(s) - f(0) - sf'(0) - \ldots - \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0).$$

On intègre par parties

$$\int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!} f^{(k+1)}(u)du = -\frac{s^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^s \frac{(s-u)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(u)du,$$

et donc avec l'hypothèse de récurrence

$$\int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!} f^{(k+1)}(u)du =$$

$$-\frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0)+f(s)-f(0)-sf'(0)-\ldots-\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0).$$

On voit donc que la formule est vraie pour l'entier k. □

On utilise cette formule également sous la forme

$$f(s)=f(0)+sf'(0)+\ldots+\frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{s^{k+1}}{k!}\int_0^1(1-u)^k f^{(k+1)}(su)du. \quad (5.1)$$

Définition 5.1.2
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction, et s_0 un point de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en s_0 s'il existe un intervalle $]s_0-\alpha,s_0+\alpha[$ pour tout s duquel on ait $f(s)\leq f(s_0)$ (resp. $f(s)\geq f(s_0)$).

Voici d'abord une condition nécessaire d'extremum local.

Proposition 5.1.3
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en s_0, alors $f'(s_0)=0$.

Preuve :
On prend $s_0=0$ pour simplifier. Puisque f est dérivable, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que

$$f(s)=f(0)+s(f'(0)+\epsilon(s)).$$

Supposons que $f'(0)\neq 0$, par exemple que $f'(0)>0$. Puisque ϵ tend vers 0 en 0, il existe un intervalle $]-\alpha,\alpha[$ pour tout s duquel $f'(0)+\epsilon(s)>0$. Mais alors $f(s)>f(0)$ pour $\alpha>s>0$ et $f(s)<f(0)$ pour $-\alpha<s<0$, ce qui contredit le fait que 0 est un extremum local pour f. □

Remarque 5.1.4
Attention ! Dans le cas où la fonction f est définie sur un intervalle fermé $[a,b]$, le critère ci-dessus ne vaut que pour les extrema de f dans $]a,b[$. On le voit dans la démonstration ci-dessus puisque l'on doit pouvoir calculer $f(s)$ pour des $s<0$ et des $s>0$. On peut aussi penser au cas d'une fonction strictement monotone, par exemple $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Cette fonction admet un maximum en $x=1$, alors que $f'(1)=1$.

La formule de Taylor permet d'énoncer une condition suffisante pour qu'une fonction (suffisamment régulière) admette un extremum local en s_0.

Proposition 5.1.5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et s_0 un point de $\mathbb{R}$. Si $f'(s_0) = 0$, et si $f''(s_0) \neq 0$, alors la fonction f admet un extremum local en s_0. C'est un maximum si $f''(s_0) < 0$ et un minimum si $f''(s_0) > 0$.

Preuve :
On reprend la formule de Taylor ci-dessus, sachant que $f'(0) = 0$:

$$f(s) - f(0) = \frac{s^2}{2}(f''(0) + \epsilon(s)),$$

avec $\epsilon(s) = 2\int_0^1 (1-u)(f''(su) - f''(0))\, du$. L'hypothèse que f est de classe C^2 implique que $\lim_{s\to 0} \epsilon(s) = 0$.
Supposons par exemple que $f''(0) > 0$. Prenant $\alpha > 0$ assez petit, on peut donc affirmer que pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$f''(0) + \epsilon(s) \geq f''(0) - C\alpha > 0 .$$

Donc, pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a $f(s) \geq f(0)$, ce qui montre que f admet un minimum local en 0. Le cas $f''(0) < 0$ se traite de la même manière. $\square$

Remarque 5.1.6
On appelle souvent points critiques de f les points où f' s'annule. On vient de voir que les points critiques où la dérivée seconde de f ne s'annule pas sont des extrema de f. Les points critiques où la dérivée seconde de f s'annule sont dits dégénérés, et on peut par exemple utiliser la formule de Taylor à un ordre plus élevé pour connaitre l'allure du graphe de f au voisinage de ces points.

L'exercice suivant est sans doute utile pour mieux comprendre ultérieurement la démonstration correspondant au principe du Maximum

Exercice 5.1.7
Soit u une solution de classe $C^2([0,1])$ de $-u''(x) + q(x)u(x) = 0$ dans $[0,1]$, avec $u(0) = u(1) = 0$. On suppose que $q(x) > 0$ sur $]0,1[$. Montrer que $u = 0$. Pour cela, on montrera que $\pm u \leq 0$ regardera ce qui se passe en un point x_0 où $\pm u$ est maximum.
Une autre approche est de multiplier par u l'équation et d'intégrer sur $[0,1]$. En utilisant une intégration par parties, montrer qu'alors

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)u(x)^2 dx = 0 .$$

En déduire le théorème sous l'hypothèse plus faible $q \geq 0$.

5.1.2 Fonctions de deux variables

Définition 5.1.8
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que F admet un maximum (resp. minimum) local en (x_0, y_0) s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout (x, y) vérifant $d((x, y), (x_0, y_0)) < \alpha$, on ait $F(x, y) \leq F(x_0, y_0)$ (resp. $F(x, y) \geq F(x_0, y_0)$).

Pour les fonctions de deux (plusieurs) variables, de classe C^1, les extrema sont également des points critiques.

Proposition 5.1.9
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si F admet un extremum local en (x_0, y_0), alors $(DF)_{(x_0,y_0)} = 0$. Autrement dit

$$(\partial_1 F)(x_0, y_0) = 0 \ , \ (\partial_2 F)(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Preuve :
On prend $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pour simplifier. Il suffit d'appliquer les résultats de dimension 1 à la fonction $t \mapsto F(tu_1, tu_2)$ où $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ est fixé. On a ainsi montré que la dérivée de F dans la direction (u_1, u_2) est nulle. □

Remarque 5.1.10
Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il est très important de remarquer que, dans la preuve de cette proposition, on utilise de manière cruciale le fait que F soit définie dans un voisinage de $(0, 0)$. Lorsque la fonction F est définie sur un domaine avec bord, cette proposition ne vaut donc que pour les extrema qui ne se trouvent pas sur le bord.

On veut maintenant trouver une condition suffisante pour qu'un point $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ soit un extremum local de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se ramène au cas de $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 0)$ en posant

$$u_1 = x_1 - \tilde{x}_1 \, , u_2 = x_2 - \tilde{x}_2 \, .$$

On suppose que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En appliquant la formule de Taylor (5.1) à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(s) = F(s(u_1, u_2)),$$

et en prenant $s = 1$, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2) \;\; = \;\; & F(0, 0) + u_1 \partial_1 F(0, 0) + u_2 \partial_2 F(0, 0) \\ & + \frac{1}{2}(u_1^2 \partial_{11}^2 F(0, 0) + 2u_1 u_2 \partial_{22}^2 F(0, 0) + u_2^2 \partial_{22}^2 F(0, 0)) \\ & + \frac{1}{2} s^2 (\epsilon_{11}(u_1, u_2) u_1^2 + 2\epsilon_{12}(u_1, u_2) u_1 u_2 + \epsilon_{22}(u_1, u_2) u_2^2) \, , \end{aligned} \tag{5.2}$$

avec

$$\epsilon_{ij}(u_1,u_2) := 2\int_0^1 (1-t)\left(\partial^2_{ij}F(tu_1,tu_2) - \partial^2_{ij}F(0,0)\right) dt\ .$$

Pour ce qui concerne le terme de reste, tout ce qui compte, c'est que, F étant de classe $\mathcal{C}^2$, les ϵ_{ij} tendent vers 0 quand (u_1,u_2) tend vers $(0,0)$.
A la vue du cas des fonctions d'une variable, on comprend donc que le comportement de f au voisinage du point critique $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ ne va dépendre que du signe de la quantité

$$Q_F(u_1,u_2) = u_1^2\partial^2_{11}F(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) + 2u_1u_2\partial^2_{22}F(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) + u_2^2\partial^2_{22}F(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) \qquad (5.3)$$

pour (u_1,u_2) proche de $(0,0)$.
Une des méthodes les plus simples pour connaitre le signe de cette quantité consiste à l'écrire sous forme d'une somme ou différence de carrés : c'est la méthode de Gauss. On détermine ainsi la *signature de la forme quadratique* Q_F : c'est le couple (n_+,n_-), où n_+ (resp. n_-) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de la matrice M_F associée à Q_F.

Concrètement, la matrice M_F est donnée par :

$$M_F := \begin{pmatrix} \partial_{11}F(0,0) & \partial_{12}F(0,0) \\ \partial_{21}F(0,0) & \partial_{22}F(0,0) \end{pmatrix}$$

On notera que M_F aussi appelée $Hessien$ de F au point $(0,0)$ est une matrice symétrique. Quand ses valeurs propres sont non nulles, on dit alors qu'elle est non dégénérée, l'analyse du signe de ses valeurs propres permet de déterminer le comportement de F près du point critique $(0,0)$.

Proposition 5.1.11
Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $(DF)_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)} = 0$. Soit Q la forme quadratique associée à F en $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ définie par (5.3) qu'on supposera non dégénérée. La fonction F admet un minimum (resp. maximum) local en $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ si et seulement si $sgn(Q)=(2,0)$ (resp. $sgn(Q)=(0,2)$). Lorsque $sgn(Q)=(1,1)$, le point critique $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ est un col.

Dans le cas où Q admet une valeur propre nulle, le point critique est dit dégénéré, et une étude plus approfondie est nécessaire.

5.2 Généralités sur l'équation de Laplace

On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation de Laplace (on se limite au cas de deux variables)

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \tag{5.4}$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$, appelé *Laplacien*, et f est une fonction continue donnée.
Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques. Du côté physique, la solution de l'équation (5.4) est par exemple le potentiel électrique engendré dans le plan par la repartition de charges $\rho = -\dfrac{1}{4\pi} f$.
L'équation de la chaleur ou des ondes pour deux variables d'espace s'écrivent

$$\partial_t u = k(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u) \quad \text{et} \quad \partial^2_{tt} u = c^2(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u).$$

On est donc aussi en présence de l'équation de Laplace lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes stationnaires, c'est-à-dire indépendant du temps, pour lesquels $\partial_t u = 0$ et $\partial^2_{tt} u = 0$. On est aussi intéressé par des solutions de la forme $u(t,x,y) = \exp -\lambda t\, \phi(x,y)$ (avec $\lambda > 0$ pour la chaleur) ou $u(t,x,y) = \exp i\lambda t\, \phi(x,y)$ pour l'équation des ondes. Du point de vue des mathématiques, le Laplacien est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie. Les solutions de (5.4) pour $f = 0$ - qui doivent être des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ - sont par exemple appelées fonctions harmoniques, et l'on va décrire quelques unes de leurs propriétés.

5.3 Principe du Maximum

Théorème 5.3.1
Soit D un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit u fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans D, continue dans $\bar{D} = D \cup \partial D$. Si u est solution dans D de

$$\Delta u(x,y) = 0.$$

alors le maximum de u dans $\bar{D}$ est atteint sur le bord de D.

Preuve :

Soit u une fonction harmonique, et $v_\epsilon(x,y) = u(x,y) + \epsilon(x^2+y^2)$. On a

$$\Delta v_\epsilon(x,y) = \Delta u(x,y) + \epsilon\Delta(x^2+y^2) = 0 + 4\epsilon > 0.$$

D'un autre côté, si (x_0, y_0) est un maximum pour v_ϵ dans D, on a, par exemple en utilisant la formule de Taylor,

$$\Delta v_\epsilon(x_0, y_0) = \partial^2_{xx} v_\epsilon(x_0, y_0) + \partial^2_{yy} v_\epsilon(x_0, y_0) \leq 0,$$

ce qui est absurde. Or, puisque v_ϵ est continue, elle doit atteindre son maximum sur le compact $\bar{D}$. Elle l'atteint donc en un point (x_0, y_0) du bord ∂D. On a donc, pour tout (x, y),

$$u(x, y) < v_\epsilon(x, y) \leq v_\epsilon(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + \epsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon r^2,$$

où $r > 0$ est choisi pour que le disque centré à l'origine de rayon r contienne D. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient, pour tout $(x, y) \in \bar{D}$,

$$u(x, y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x, y).$$

$\square$

Encore une fois, ce théorème dit que la fonction harmonique u, supposée aussi continue sur le compact $\bar{D}$, atteint son maximum au moins un en point du bord de D. Comme pour l'équation de la chaleur, on a en fait un Principe du Maximum Fort : u n'a pas d'extremum dans D. On ne démontrera pas ce résultat.

Exercice 5.3.2
Montrer que la fonction $u(x, y) = (1 - x^2 - y^2)/(1 - 2x + x^2 + y^2)$ est harmonique dans le disque $x^2 + y^2 < 1$. Le principe du maximum est-il vérifié dans $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ pour cette fonction ? Etudier le même problème dans un disque de rayon strictement inférieur à 1, dans une couronne ...

Corrigé :
u n'est pas définie en $(1, 0)$, et ne se prolonge pas par continuité en ce point puisque

$$\lim_{x\to 1^-} u(x, 0) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1 - x^2}{(1 - x)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1 + x}{1 - x} = +\infty.$$

On a

$$\partial_x u(x, y) = 2\frac{(x - 1)^2 - y^2}{((x - 1)^2 + y^2)^2}, \partial_y u(x, y) = 4\frac{y(x - 1)}{((x - 1)^2 + y^2)^2},$$

et donc

$$\partial^2_{xx} u(x, y) = -4\frac{-1 + 3x - 3x^2 + 3y^2 + x^3 - 3xy^2}{(1 - 2x + x^2 + y^2)^3} = -\partial^2_{yy} u(x, y),$$

ce qui montre que u est harmonique. On peut voir également que u n'a pas de point critique dans D, mais de toutes façons, on a bien

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) = +\infty \ .$$

Exercice 5.3.3
Enoncer et démontrer un principe du minimum.

Corrigé :
Si u est harmonique dans D et continue sur $\bar{D}$, $v = -u$ aussi. Le Principe du Maximum dit que, pour tout $(x,y) \in \bar{D}$,

$$v(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y),$$

c'est-à-dire

$$u(x,y) \geq -\max_{(x,y)\in\partial D} -u(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial D} u(x,y).$$

On peut déduire du principe du maximum l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour le Laplacien.

Proposition 5.3.4
Soit D un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction continue sur $\bar{D}$, et g une fonction continue sur ∂D. Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in D \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{5.5}$$

admet au plus une solution $\mathcal{C}^2$.

Preuve :
Si u_1 et u_2 sont solutions de (5.5), $w = u_1 - u_2$ vérifie $\Delta w = 0$ et est nulle sur ∂D. Par le principe du maximum (et celui du minimum) on obtient $w = 0$ sur D. □

5.4 Propriétés d'invariance

Il est très important de noter les propriétés d'invariance de l'équation de Laplace. Nous allons montrer que cette équation est invariante sous l'action des translations et des rotations du plan. De manière plus explicite, il s'agit de montrer le résultat suivant.

Lemme 5.4.1
Si $u(x', y')$ est une solution de $\Delta u = f$ dans un domaine D, alors $v(x, y) = u(\tau(x, y)) = u(x-a, y-b)$ et $w(x, y) = u(\rho(x, y)) = u(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ sont encore solutions, dans $\tau^{-1}(D)$ et $\rho^{-1}(D)$ respectivement.

Preuve :
On n'écrit la preuve que pour w, le cas de v étant beaucoup plus simple (c'est donc un excellent **Exercice**). On pose (anciennes coordonnées en fonction des nouvelles)

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \partial_x w(x, y) = \cos\theta(\partial_{x'} u)(x', y') + \sin\theta(\partial_{y'} u)(x', y') \\ \partial_y w(x, y) = -\sin\theta(\partial_{x'} u)(x', y') + \cos\theta(\partial_{y'} u)(x', y'), \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \partial^2_{xx} w(x, y) = \cos^2\theta(\partial^2_{x'x'} u)(x', y') + 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \sin^2\theta(\partial^2_{y'y'} u)(x', y') \\ \partial^2_{yy} w(x, y) = \sin^2\theta(\partial^2_{x'x'} u)(x', y') - 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \cos^2\theta(\partial^2_{y'y'} u)(x', y'). \end{cases}$$

On a donc bien $(\Delta_{x,y} w)(x, y) = (\Delta_{x',y'} u)(x', y') = 0$. □

5.5 Le Laplacien en coordonnées polaires

Le fait que le Laplacien possède cette invariance par rotation suggère que son expression en coordonnées polaires doit être relativement simple.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique couple (r, θ) dans $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Notant g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ par

$$g(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

on voit d'abord facilement que

$$\begin{cases} \partial_r g(r, \theta) = \cos\theta\partial_x f(x, y) + \sin\theta\partial_y f(x, y) \\ \partial_\theta g(r, \theta) = -r\sin\theta\partial_x f(x, y) + r\cos\theta\partial_y f(x, y). \end{cases}$$

Ensuite, en formant les combinaisons linéaires adéquates, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_x f(x,y) = \cos\theta\partial_r g(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta g(r,\theta) \\ \partial_y f(x,y) = \sin\theta\partial_r g(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\partial_\theta g(r,\theta). \end{array}\right. \tag{5.6}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Lemme 5.5.1
Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \partial^2_{rr}v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}v(r,\theta)$$

Preuve :
Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Soit aussi $w(r,\theta) = \partial_x u(x,y)$. On a d'abord, en utilisant (5.6) pour $f(x,y) = \partial_x u(x,y) = w(r,\theta)$,

$$\partial^2_{xx}u(x,y) = \partial_x(\partial_x u(x,y)) = \cos\theta\partial_r w(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta w(r,\theta).$$

On a ensuite, en utilisant (5.6) pour $f(x,y) = u(x,y) = v(r,\theta)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_r w(r,\theta) = \partial_r(\partial_x u(x,y)) = \partial_r(\cos\theta\partial_r v(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)) \\ \partial_\theta w(r,\theta) = \partial_\theta(\partial_x u(x,y)) = \partial_\theta(\cos\theta\partial_r v(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)), \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_r w(r,\theta) = \cos\theta\partial^2_{rr}v(r,\theta) + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta v(r,\theta)) - \dfrac{\sin\theta}{r}\partial^2_{r\theta}v(r,\theta) \\ \partial_\theta w(r,\theta) = \\ \quad -\sin\theta\partial_r v(r,\theta) + \cos\theta\partial^2_{r\theta}v(r,\theta) - \dfrac{\cos\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)) - \dfrac{\sin\theta}{r}\partial^2_{\theta\theta}v(r,\theta)). \end{array}\right.$$

On a donc finalement

$$\partial^2_{xx}u(x,y) = \cos^2\theta\partial^2_{rr}v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}v(r,\theta).$$

Un calcul identique donne

$$\partial^2_{yy}u(x,y) = \sin^2\theta\partial^2_{rr}v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}v(r,\theta),$$

et l'on obtient le lemme en ajoutant ces deux dernières égalités. □

On peut par exemple utiliser cette expression pour déterminer toutes les fonctions harmoniques qui sont invariantes par rotation. Il s'agit des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\Delta u(x, y) = 0$, et pour lesquelles, notant $v(r, \theta) = u(r \cos\theta, r \sin\theta)$, on a $\partial_\theta v(r, \theta) = 0$ (v ne dépend pas de θ).
Avec le Lemme 5.5.1, on doit alors avoir

$$0 = \Delta u(x, y) = \partial^2_{rr} v(r, \theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r, \theta).$$

On peut remarquer que cette équation s'écrit

$$0 = \partial_r(r\partial_r v(r, \theta)),$$

et donc que ses solutions sont

$$v(r, \theta) = C_1 \log(r) + C_2. \tag{5.7}$$

Remarque 5.5.2
On notera que l'on a pas précisé dans quel domaine on cherche de telles solutions invariantes par rotation. Ce domaine doit être lui-même invariant par rotation, et ne pas contenir $(0, 0)$.

Exercice 5.5.3
Trouver toutes les fonctions u telles que $\Delta u = 1$ dans la couronne $a < r < b$ et qui s'annulent sur $r = a$ et sur $r = b$.

Corrigé :
La réponse est

$$v(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) - \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\frac{\log r - \log a}{\log b - \log a}.$$

On cherche les solutions invariantes par rotation. Puisque l'on a unicité, si l'on trouve une solution de cette manière, on n'aura rien oublié. On doit résoudre $r = \partial_r(r\partial_r v(r, \theta))$ (attention : pas $1 = \ldots$) , c'est-à-dire $r\partial_r v(r, \theta) = r^2/2 + C_1$, donc $\partial_r v(r, \theta) = r/2 + C_1/r$, d'où $v(r, \theta) = r^2/4 + C_2 + C_1 \log r$...

5.6 Solutions particulières : séparation des variables

On cherche des solutions $v(r, \theta)$ de

$$\partial^2_{rr} v(r, \theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r, \theta) = 0 \tag{5.8}$$

qui sont à variables séparées, c'est-à dire qui s'écrivent

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{5.9}$$

pour certaines fonctions R et Θ.
Pour ce type de fonctions v, l'équation (5.8) s'écrit

$$0 = R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta).$$

On cherche maintenant des solutions du type (5.9) pour lesquelles R et Θ ne s'annulent jamais (on verra plus tard qu'il faut ensuite oublier cette condition trop restrictive). En divisant l'équation ci-dessus par $R(r)/r^2$, on obtient

$$\{r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}\} = -\Theta''(\theta)/\Theta(\theta)\,.$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r, le membre de gauche non plus : la fonction $r \mapsto r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}$ est constante. Si une telle fonction v est solution, il existe donc un réel λ tel que

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

On s'intéresse à la première de ces équations. Puisque l'on veut que u soit régulière, on cherche les fonctions Θ qui sont périodiques de période 2π. Or les solutions de

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \tag{5.11}$$

sont des combinaisons linéaires d'exponentielles pour $\lambda < 0$: de telles fonctions ne sont pas périodiques, donc nécessairement $\lambda \geq 0$, et dans ce cas les solutions de (5.11) sont

$$\Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Encore une fois la condition $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ne peut être satisfaite que lorsque $\lambda = n^2$ pour un certain entier naturel n. On obtient finalement une famille de solutions

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta). \tag{5.12}$$

On reprend maintenant la deuxième équation de (5.10), sachant que λ doit être un entier naturel :

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Cette équation différentielle ordniaire porte le nom d'équation d'Euler, et présente la particularité que ses coefficients possèdent une singularité en $r = 0$. Il faut pour le voir ne pas oublier d'isoler le terme d'ordre le plus élevé, et écrire l'équation sous la forme

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0.$$

On peut étudier ce type d'équations de manière systématique : c'est l'objet de la théorie de Fuchs. On peut se contenter ici de chercher des solutions sous la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors *l'équation indicielle*

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0,$$

et donc nécessairement $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$. Dans le cas où $\lambda = n^2 \neq 0$, on obtient deux solutions indépendantes $r \mapsto r^n$ et $r \mapsto r^{-n}$, et la solution générale s'écrit

$$R(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}. \tag{5.13}$$

Le cas où $\lambda = 0$ a déjà été vu (cf. (5.7)). Les solutions s'écrivent alors

$$R(r) = C_0 \log r + D_0. \tag{5.14}$$

Récapitulons : toutes les fonctions

$$v_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

sont solutions de l'équation pour $n \in \mathbb{N}^*$; c'est aussi le cas de

$$v_0(r, \theta) = C_0 \log r + D_0.$$

Revenons au problème initial. Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ dans tout le disque $\{x^2 + y^2 < \delta\}$, en particulier à l'origine. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \to 0$. Il reste les fonctions

$$v_n(r, \theta) = (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))r^n, \tag{5.15}$$

où n est un entier positif ou nul.

5.7 Exercices

5.7.1 Extrema

1. Déterminer les points critiques de chacune des applications suivantes et donner leur développement limité à l'ordre 2 en chacun de leurs points

critiques. Existe-t-il des extrema locaux ? globaux ?
1. $f(x,y,z) = x^2/2 + xyz - y + z$. 2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.
Dans le deuxième cas, montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$.

2. Etudier les points critiques des fonctions suivantes :

   a) $f_1(x,y) = x^2 - y^3$ b) $f_2(x,y) = x + y + x^2 - xy + y^2 + 1$
   c) $f_3(x,y,z) = xy + yz + xz + xyz$ d) $f_4(x,y,z) = x^2 + z^2 + x^2 y$
   e) $f_5(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + \pi \cos x \cos y$

3. Soit f_1 et f_2 les deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x,y) = y + 2 - (x+1)^2$ et $f_2(x,y) = y - 2 + (x-1)^2$. On pose $f = f_1 f_2$. Déterminer les points critiques de f, et déterminer pour chacun d'eux s'il s'agit d'un extremum. Tracer les courbes $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, et étudier dans le complémentaire le signe de f. Placer les points critiques dans le dessin.
4. Soit $f(x,y) = x^3 + 3x^2 y - 15x - 12y$. Trouver les extrema locaux de f. Lesquels sont des minima, lesquels sont des maxima ?
5. Soit a un réel positif. Quels sont les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$?

5.7.2 Fonctions harmoniques

1. Déterminer toutes les fonctions harmoniques dans un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Prouver le principe du maximum dans ce cadre.
2. Soit k un entier positif.
   1. Montrer que les fonctions $u(x,y) = (x \pm iy)^k$ sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$.
   2. A quelle condition sur a et b la fonction $u(x,y) = (ax+by)^k$ est-elle harmonique ?

5.7.3 Le principe du maximum

1. Soit Ω un disque du plan, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On suppose que

$$\begin{cases} \Delta f(x) \geq f(x) - 1 & \text{pour tout } \ x \in \Omega \\ \nabla f(x) \cdot x = 0 & \text{pour tout } \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

   Montrer que $f \leq 1$ dans $\bar{\Omega}$. On pourra montrer que le maximum de f sur $\bar{\Omega}$ ne peut être strictement supérieur à 1.

2. Etudier dans le cas du carré si on a des fonctions harmoniques de la forme $u(x)v(y)$.