Examen final

EI-SE3

Introduction aux Probabilités

Benjamin Auder

18 mai 2015

Exercice 0 [2 points]

On considère (uniquement) deux guichets dans une gare SNCF, dont au moins un est ouvert. On note A (resp. B) l'évènement "le guichet 1 (resp. 2) est ouvert". Une étude statistique a permis d'établir les probabilités suivantes : $\mathrm{P}(A) = 0.55$, et $\mathrm{P}(B) = 0.7$.

Il y a beaucoup d'affluence dans cette gare : au moins un client attend son tour devant chaque guichet ouvert. On note C le nombre total de clients présents aux guichets.

(a) Calculez $\mathrm{P}(A \cup B)$. [1]

(b) Déterminez $\mathrm{P}(C = 3 | A \cap B)$. [1]

Exercice 1 [11 points]

Cet exercice porte sur les déplacements de n pigeons dans un groupe d'immeubles résidentiels. Ces oiseaux apprécient tout particulièrement les rebords de fenêtres, où ils se cachent derrière les volets. On effectue les hypothèses suivantes.

- Tous les pigeons partent initialement du même point au même instant $t_0 = 0$.
- Il y a m fenêtres numérotées $1, 2, \dots, m$, parcourues dans cet ordre par chaque pigeon. Une fois arrivé en m on revient vers 1 (*note* : $m \geq 2$).
- Le temps de vol T du point initial à la première fenêtre, puis de la fenêtre i à $(i \mod m) + 1$ suit une loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$ avec $0 < a < b$.

Un pigeon supporte de se poser si quelques congénères sont déjà présents, mais préfère être seul. On note N le nombre de pigeons sur un rebord de fenêtre, et P l'évènement "le pigeon se pose". Alors

- $\mathrm{P}(P|N = 0) = p_0 \in]0, 1[$
- $\mathrm{P}(P|N = 1) = p_1 \in]0, p_0[$
- $\mathrm{P}(P|N = 2) = p_2 \in]0, p_1[$
- $\mathrm{P}(P|N \geq 3) = 0$

Un pigeon reste posé sur un rebord de fenêtre pendant une durée R. suivant une loi exponentielle : $R \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

Les questions a) à c) portent sur les fenêtres *du premier tour uniquement*.

(a) *Cas* $n = 1$. [1]
Déterminez le temps moyen nécessaire au pigeon pour parvenir à la k^{eme} fenêtre.

(b) *Cas* $n = 2$. [3]
Calculez la probabilité que les deux pigeons se retrouvent posés ensemble sur le rebord de la première fenêtre. Vérifiez la cohérence du résultat.

(c) *On se place à partir de maintenant dans le cas général (n quelconque).* [2]

1. Déterminez la loi du temps d'atteinte de la première fenêtre, noté Z_n.
   (La fenêtre est atteinte quand un des n pigeons y parvient).
2. Montrez que Z_n converge en probabilité vers une variable aléatoire à expliciter.
   A-t-on aussi convergence preque sûre ?

(d) Montrez que tous les pigeons parviennent à se poser (au moins une fois). [3]

(e) On considère qu'une fois posés, les pigeons s'endorment pour une durée infinie. [2]
À quelles(s) condition(s) parviennent-ils tous à dormir ?

Exercice 2 [11 points]

On dispose d'une pièce de monnaie truquée, qui tombe sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$, et sur face avec probabilité $1-p$.

(a) *Dans cette question seulement, on suppose p inconnu.* [1]
Comment déterminer p empiriquement ? Justifiez.

(b) Comment simuler un lancer de pièce équilibrée à partir de la pièce truquée ? [2]

(c) Soient $b \in [\![2,+\infty[\![$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[\![0,b-1]\!]$. Montrez que la série $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{X_n}{b^n}$ converge presque sûrement, et que S suit une loi uniforme sur $[0,1]$. [3]

(d) En déduire une façon de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ à partir de la pièce truquée. [2]

(e) Toujours avec la pièce truquée, comment simuler une variable aléatoire d-dimensionnelle suivant la loi uniforme dans la boule unité $\mathcal{B}_d(0,1)\subset\mathbb{R}^d$? [3]

1. Via une méthode de rejet.
2. D'une autre manière plus efficace ?

Donnez la complexité en moyenne (en fonction de la précision souhaitée), et, si possible, la loi du nombre de lancers effectués.

Exercice 3 [6 points]

On s'intéresse dans cet exercice aux passages aux caisses d'un supermarché. Ce dernier comporte m caisses – toujours ouvertes – gérées par autant d'employé(e)s.

(a) *Chaque soir lors de la fermeture du magasin, les N derniers clients se présentent aux caisses. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.* [1]
Un client choisit la caisse k avec probabilité $p_k \in [0, 1]$. Quelle est la loi du nombre total de clients passant à la caisse numéro k ?

(b) *Pour cette question on suppose que N clients sont en train d'attendre aux caisses suivant les mêmes lois que précédemment. Chacun de ces client doit passer Λ_n articles suivant une loi uniforme dans $[\![1, A]\!]$.* [2]
Chaque caisse a un débit déterministe exprimé en "articles par minute" noté a_k.
Le temps C_n nécessaire au paiement d'un client suit une loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.
Un retardataire arrive aux caisses avec Λ_0 articles. Déterminez l'espérance de son temps d'attente, et interprétez le résultat obtenu.

(c) *On suppose désormais que personne n'attend aux caisses.* [3]
Les hypothèses de la question précédente restent valides.
Xénia et Youri sont les deux derniers à arriver pour passer leurs achats : Xénia choisit une caisse suivant la distribution $p_1, \ldots, p_m$, puis Youri en sélectionne une au hasard parmi celles restant inoccupées. On note X et Y les variables aléatoires des temps d'attente respectifs. Exprimez la loi jointe, puis simplifiez la formule obtenue dans le cas $\alpha = 1$. X et Y sont-elles indépendantes ?