EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 2-bis

13 juin 2016

Exercice 1 [7 points]

(a) On considère une suite d'évènements (A_n) dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. Avec $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$, à quelle(s) condition(s) la suite (X_n) converge vers $X = 0$, [2]

1. en probabilité ?
2. presque sûrement ?

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(b) Étudier la convergence de la suite de variables aléatoires (X_n) définie par $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} U_i$, d'abord en loi puis en moyenne quadratique. [3]

(c) Soit $\alpha > 0$. Montrer que la suite (X_n) définie par $X_n = (U_1 \times \cdots \times U_n)^{\frac{\alpha}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)^{\frac{\alpha}{n}}$ converge presque sûrement et donner sa limite. *Indication : s'intéresser à* $\ln X_n$. [2]

Bonus : Montrer que la suite (Y_n) *définie par* $Y_n = (X_n e^{\alpha})^{\sqrt{n}}$ *converge en loi et déterminer la loi limite.*

Exercice 2 [3 points]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires où chaque X_n suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p_n)$ avec $p_n \longrightarrow 0$. On suppose que $a_n p_n \longrightarrow \lambda \in]0, +\infty[$ pour une suite (a_n) de réels strictement positifs. Montrer que $\frac{X_n}{a_n}$ converge en loi, et déterminer la loi limite.

Exercice 3 [4 points]

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux successivement avec remise, obtenant les numéros N_1 et N_2. On note alors $X = \min(N_1, N_2)$ et $Y = \max(N_1, N_2)$.

(a) Trouver la loi du couple (X, Y). Vérifier que la somme des probabilités vaut 1. [2]

(b) Calculer les lois marginales de X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ? [2]

Exercice 4 [6 points]

On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f :

$$\begin{cases} f(x,y) = \alpha e^{-y} \text{ si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [x, +\infty[\\ \qquad\qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer les densités marginales f_X et f_Y respectivement de X et Y en fonction de α. En déduire la valeur de la constante α. X et Y sont-elles indépendantes ? [2]

(b) Déterminer la densité de $Z = Y - X$. Quelle loi (connue) suit Z ? [2]

(c) Calculer $\mathrm{P}(Y \geq \beta X)$ pour $\beta \geq 1$. Dessiner le domaine d'intégration avec $\beta = 2$. [2]

Rappel :

- Loi uniforme : $X \sim \mathcal{U}(a,b) \Leftrightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
- Loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow \mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
- Loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Loi log-normale : $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Limite sup : $\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} E_m$; limite inf : $\underline{\lim} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} E_m$
- $$x \ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
- Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ et $n\varepsilon_n \longrightarrow \lambda$, alors
$$(1-\varepsilon_n)^n \longrightarrow e^{-\lambda}$$