EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 2

24 mai 2016

Exercice 1 [7 points]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose $I_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $S_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

(**a**) Donner la fonction de répartition puis la densité de la variable aléatoire I_n. [2]

(**b**) Étudier la convergence de la suite (I_n) en loi, puis pour les autres modes. [3]

(**c**) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n = n(1 - S_n))$. [2]

Exercice 2 [2 points]

Soit la suite de variables aléatoires (X_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n} \\ \mathrm{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers $X = 0$ mais que (X_n) ne converge pas en moyenne quadratique. *Bonus : qu'en est-il de la convergence presque sûre ?*

Exercice 3 [4 points]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
Déterminer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 [7 points]

On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f :

$$\begin{cases} f(x,y) = x + y \text{ si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ \qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(**a**) Calculer les densités marginales f_X et f_Y respectivement de X et Y. [2]
Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

(**b**) Déterminer la densité de $Z = X + Y$. [3]
Indication : dessiner la zone correspondant à $Z \leq z$ en fonction des valeurs de z.

(**c**) Calculer la covariance du couple (X, Y). [2]

Rappel :

- Loi de Bernouilli : $X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow \mathrm{P}(X=1) = p$ et $\mathrm{P}(X=0) = 1-p$
- Loi uniforme : $X \sim \mathcal{U}(a,b) \Leftrightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
- Loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ et $n\varepsilon_n \longrightarrow \lambda$, alors

$$(1-\varepsilon_n)^n \longrightarrow e^{-\lambda}$$