EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 1

3 mai 2016

Exercice 1 [5 points]

Une population comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 10% des hommes ont les cheveux longs et que 40% des femmes ont les cheveux courts.

Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?

Exercice 2 [5 points]

On répartit n livres sur r étagères d'une bibliothèque.
Déterminer un espace Ω, puis une tribu et une loi de probabilité appropriés.
Calculer alors la probabilité que toutes les étagères soient occupées.

Exercice 3 [5 points]

Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit controlé lors d'un trajet est p. On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de contrôles d'un voyageur lors de N trajets.

(a) Déterminer la loi de X (c'est-à-dire les $\mathrm{P}(X = k)$), puis calculez son espérance. [3]

(b) Un voyageur envisage de ne jamais acheter de ticket ; soit Y la variable aléatoire de son gain relatif après N trajets. Exprimez Y puis calculez son espérance. En déduire la probabilité p de contrôle nécessaire pour dissuader de frauder. [2]

Exercice 4 [5 points]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Calculer la loi de $X+Y$, puis reconnaitre celle de X sachant $X+Y = n$.

Rappel :

- Formule de Bayes : $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$
- Formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)$
- Nombre de combinaisons à k éléments parmi n : $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Nombre d'arrangements (combinaisons avec ordre) : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- Loi binomiale : $\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Loi de Poisson : $\mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$