Avertissements importants :
– *Les appareils électroniques (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc...) et les documents sont interdits.*
– *Les exercices sont indépendants, le barème (sur 25) est indicatif.*
– *Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.*
– *Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.*

Questions de cours (4 points). Traitez deux des trois questions suivantes :

1. Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}^n$.

2. Enoncer le théorème de Fubini sur un pavé de $\mathbb{R}^2$.

3. Donner la définition de l'intégrale curviligne d'une fonction continue.

Exercice I (7 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. (a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

4. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice II (8 points). On considère les ouverts de $\mathbb{R}^2$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}.$$

1. Enoncer le théorème d'inversion globale.

2. (a) Montrer que $\Phi : (x,y) \mapsto (xy, y^2 - x^2)$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image.

(b) Etablir que $\Phi(U) = V$.

3. Soit $D = \{(x,y) \in U : 1 \leq xy \leq 2,\ 1 \leq y^2 - x^2 \leq 4\}$. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{xy(x^2+y^2)}{y^2-x^2}\,dx\,dy.$$

Exercice III (6 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f satisfait l'équation suivante :

$$f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \ln(f(x,y))$.

1. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

2. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$.

3. Que peut-on en déduire sur la fonction h ?

4. Montrer qu'il existe deux fonctions A et $B : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que $f(x,y) = A(x)B(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Elèments de correction de l'examen de mai 2017

Exercice I.

1. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^2 \to 0 = f(0,0)$ quand $(x,y) \to (0,0)$.

2. (a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composées, produits et sommes de fonctions continues.

(c) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car elle y admet des dérivées partielles continues.

3. (a) Si $x \neq 0$, alors

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \to 0$$

quand $x \to 0$ ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(b) Si f est différentiable en $(0,0)$ alors, nécessairement on a $df(0,0)(h,k) = 0$ puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Or

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - 0}{\|(h,k)\|} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \to 0$$

quand $(h,k) \to (0,0)$. On en déduit donc que f est différentiable en $(0,0)$ et que $df(0,0)$ est l'application linéaire nulle (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

4. Soit $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) \to (0,0)$ quand $n \to +\infty$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin(2n\pi) - 2\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi) = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. On montre de même que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice II.

1. Cours.

2. (a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux composantes sont des polynômes. De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$$

et $J_\Phi(x,y) = 2(y^2+x^2) \neq 0$ si $(x,y) \in U$. Enfin si (x,y) et $(x',y') \in U$ sont tels que $\Phi(x,y) = \Phi(x',y')$ alors $xy = x'y'$ et $y^2 - x^2 = y'^2 - x'^2$, ce qui implique par passage en complexe que $(y \pm ix)^2 = (y' \pm ix')^2$. Par conséquent, $y \pm ix = y' \pm ix'$ ou $y \pm ix = -y' \mp ix'$. Comme $x, y, x', y' > 0$ on en déduit que $(x,y) = (x',y')$ ce qui montre l'injectivité de Φ sur U. Le théorème d'inversion globale permet de conclure.

(b) Tout d'abord si $(x,y) \in U$ alors $y > x > 0$ ce qui montre que $xy > 0$ et $y^2 - x^2 > 0$ soit $\Phi(x,y) \in V$, ce qui montre que $\Phi(U) \subset V$. Réciproquement si $(x,y) \in V$, alors on cherche $u > 0$ et $v > 0$ tels que

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^2 - u^2. \end{cases}$$

On trouve que

$$\begin{cases} u = x\sqrt{\frac{2}{y+\sqrt{y^2+4x^2}}} \\ v = \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2+4x^2}}{2}} \end{cases}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$ alors $u > 0$ et $v > 0$. De plus comme $v^2 - u^2 = y > 0$, on en déduit que $v > u > 0$ ce qui montre que $(u,v) \in U$ et $\Phi(u,v) = (x,y)$, soit $V \subset \Phi(U)$. On a donc établi que $\Phi(U) = V$.

3. On utilise la formule de changement de variables en posant $(u,v) = \Phi(x,y)$ $(du\,dv = J_\Phi(x,y)\,dx\,dy = 2(x^2+y^2)\,dx\,dy)$. On remarque que $D \subset U$ et $\Phi(D) = [1,2] \times [1,4] \subset V$. Il vient alors

$$I = \iint_{[1,2]\times[1,4]} \frac{u}{2v}\,du\,dv$$

puis le théorème de Fubini

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 u\,du\right)\left(\int_1^4 \frac{dv}{v}\right)du = \frac{3\ln 2}{2}.$$

Exercice III.

1. Vrai par composition.

2. $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)^2}\left(f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0.$

3. h est donc de la forme $U(x) + V(y)$, où U et V sont $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

4. En posant $A = e^U$, $B = e^V$, qui sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x,y) = A(x)B(y)$.