Avertissements importants :
– *Les appareils électroniques (téléphones compris) et les documents sont interdits.*
– *Les exercices sont indépendants, le barème (sur 30) est indicatif.*
– *Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.*
– *Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.*

Question de cours (4 points). Traitez deux des trois questions suivantes :

1. Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}^n$.

2. Enoncer le théorème d'inversion globale.

3. Enoncer le théorème de changement de variables pour les intégrales multiples.

Exercice I (6 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{(1+y)^{3/2}} + x^2$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.

2. La fonction f admet-elle des points critiques ?

3. On considère l'ensemble fermé $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$. Pourquoi f atteint-elle ses bornes sur D ?

4. En déduire que les extrema de f sur D sont atteints sur la frontière de D.

5. Calculer $I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ (*on rappelle que la dérivée de la fonction* argsh *est donnée par* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$)

Exercice II (10 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ si cela est possible.

3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x, y) \neq (0, 0)$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0, 0)$?

5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) L'ensemble D est-il compact ? Pourquoi ?

(b) Calculer $I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

Exercice III (10 points). Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$. On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in U. \tag{1}$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\varphi(x, y) = (xy, y/x)$. Montrer que φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur U et calculer l'application réciproque φ^{-1}.

3. Etant donnée une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $g(u, v) = f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$ pour tout $(u, v) \in U$.

(a) Expliquer pourquoi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

(b) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4. Montrer que si f satisfait l'équation (1) si et seulement si

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{u} \quad \text{pour tout } (u, v) \in U.$$

5. En déduire toutes les solutions de (1) sont de la forme $f(x, y) = \ln(xy) + h(y/x)$, où $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Elèments de correction de l'examen de mai 2016

Exercice I.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\times]-1,+\infty[$. Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2$ et $(x,y)\mapsto y+1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $t\mapsto t^{-3/2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}_f$, $\nabla f(x,y) = (2x, -\frac{3}{2}(1+y)^{-5/2} \neq (0,0)$ donc f n'a pas de point critique.
3. D est compact car fermé et borné $D\subset[0,1]^2$, et f est continue. Par conséquent, f atteint ses bornes sur D.
4. Si f atteint un extremum en $(x_0,y_0)\in\mathring{D}$, alors $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$ ce qui est impossible puisque f n'a pas de point critique. Donc les extrema de f sont forcément atteints sur la frontière de D.
5. Par Fubini,

$$I = \int_0^1\left(\int_0^{x^2}((1+y)^{-3/2}+x^2)\,dy\right)dx = \int_0^1\left[-2(1+y)^{-1/2}+x^2y\right]_{y=0}^{y=x^2}dx$$
$$= \int_0^1\left(2-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+x^4\right)dx = \left[2x-2\mathrm{argsh}x+\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2-2\mathrm{argsh}(1)+\frac{1}{5}+2\mathrm{argsh}(0) = \frac{11}{5}-2\mathrm{argsh}(1).$$

Exercice II.

1. $|2xy|\leq x^2+y^2$, donc $|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}|y|\to 0 = f(0,0)$ quand $(x,y)\to(0,0)$. Donc f est continue en $(0,0)$.
2. $[f(x,0)-f(0,0)]/x = 0\to 0 = \partial_x f(0,0)$ et $[f(0,y)-f(0,0)]/y = 0\to 0 = \partial_y f(0,0)$.
3. $[f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)]/\sqrt{x^2+y^2} = xy^2/(x^2+y^2)^{3/2}$. Cette dernière quantité ne tend pas vers 0 quand $(x,y)\to(0,0)$ car elle vaut $1/2^{3/2}$ pour $x=y$. Par conséquent, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
4. Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$\partial_x f(x,\sqrt{2}x) = 2/9 \not\to 0$ et $\partial_y f(x,x) = 1/2\not\to 0$ quand $x\to 0$ donc les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.
5. (a) L'ensemble D est borné (car $D\subset\overline{B}((0,0),2))$ et fermé. En effet, $D = a^{-1}([0,+\infty[)\cap b^{-1}([0,+\infty[)\cap$ $\cap c^{-1}([0,+\infty[)$ où $a(x,y) = x$, $b(x,y) = y$ et $c(x,y) = x^2+y^2-4$. Les fonctions a, b et c sont continues (car polynômiales) et $[0,+\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc $a^{-1}([0,+\infty[)$, $b^{-1}([0,+\infty[)$ et $c^{-1}([0,+\infty[)$ sont fermés dans $\mathbb{R}^2$. Enfin D est fermé comme intersection de fermés. Il est donc compact.

   (b) On passe en coordonnées polaires

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^2\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^2 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\right)$$
$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

Exercice III.

1. Si $(x,y)\in U$, on pose $r = \min(x,y)/2$ de sorte que $B((x,y),r)\subset U$ et donc U est ouvert.

2. φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Par ailleurs $(u,v) = (xy, y/x) \Leftrightarrow (uv, u/v) = (y^2, x^2) \Leftrightarrow (x,y) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$. On a donc $\varphi^{-1}(u,v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$ qui est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Enfin, $(x,y) \in U$ si et seulement si $(u,v) \in U$ ce qui montre que φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur U.

3. (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Par la formule de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}) + \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -\frac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}) + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}).$$

4. On a donc que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2u}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}) + \sqrt{uv}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})\right).$$

Par conséquent,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \quad \text{pour tout } (x,y) \in U$$

si et seulement si

$$\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}) + \sqrt{uv}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}) = 2 \quad \text{pour tout } (u,v) \in U$$

si et seulement si

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{u} \quad \text{pour tout } (u,v) \in U.$$

5. g est solution de l'EDP précédente si et seulement s'il existe une fonction $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(u,v) = \ln u + h(v)$ pour tout $(u,v) \in U$. Donc f est solution de (1) si et seulement si $f(x,y) = g(\varphi(x,y)) = g(xy, y/x) = \ln(xy) + h(y/x)$ pour tout $(x,y) \in U$.