Introduction aux algèbres vertex

40 heures – 6 ECTS

Anne Moreau

25 janvier 2021

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay

But du cours : donner une introduction à la théorie des algèbres vertex, étudier des exemples importants d'algèbres vertex et présenter quelques applications.

Qu'est-ce qu'une algèbre vertex ?

Grosso-modo, une algèbre vertex est un espace vectoriel complexe V muni d'un vecteur particulier $|0\rangle \in V$ (appelé le *vacuum*) et d'une application linéaire de V vers l'espace des séries de Laurent formelles à coefficients dans $\mathrm{End}(V)$:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{End}(V)[[z^{-1}, z]] \\ a & \longmapsto & a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}. \end{array}$$

Ces données sont soumises à un certain nombre d'axiomes, dont l'axiome de *localité* :

$$\forall\, a, b \in V,\ \exists\, N > 0, \quad (z-w)^N [a(z), b(w)] = 0,$$

et possèdent des propriétés remarquables analogues à l'associativité ou l'identité de Jacobi pour les algèbres de Lie.

Bien que la définition soit purement algébrique, les axiomes précédents ont une signification géométrique profonde : ils reflètent le fait que les algèbres vertex donnent le formalisme mathématique des algèbres chirales en théorie conforme des champs en dimension 2.

Richard Ewen Borcherds *est né le 29 novembre 1959. Il fut récompensé de la médaille Fields en 1998 pour, entre autres, ses travaux sur les algèbres de Lie de dimension infinie. Il démontra notamment la conjecture de Conway-Norton sur le* groupe monstre *grâce à la théorie des algèbres vertex.*

Depuis qu'elles furent introduites par Borcherds (à la fin des années 80), les algèbres vertex apparaissent dans différents domaines des mathématiques et de la physique : algébres de Lie de dimension infinie, géométrie algébrique, théorie des fonctions modulaires, systèmes intégrables, combinatoires, théorie conforme des champs, etc.

Exemples d'algèbres vertex

1. Algèbres vertex commutatives = algèbres commutatives munies d'une dérivation (algèbres différentielles).
2. Algèbres vertex de Virasoro.
3. Algèbres vertex associées aux algèbres de Kac-Moody affines,

$$\widehat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K,$$

   où $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est une algèbre de Lie simple.

▶ *Les deux derniers exemples d'algèbres vertex sont construits à partir d'une algèbre de Lie de dimension infinie et jouent un rôle important en théorie des représentations.*

Variétés associées aux algèbres vertex

À toute algèbre vertex V, on peut associer de façon canonique une certaine variété algébrique affine X_V, appelée la *variété associée à V* :

$$V \longrightarrow X_V.$$

▶ *Les propriétés géométriques de cette variété reflètent des propriétés importantes sur l'algèbre vertex.*

Par exemple, si $X_V = \{\text{point}\}$ alors V a un nombre fini de modules simples et les *caractères* de ceux-ci ont des propriétés d'invariance modulaire.

Plan du cours et prérequis

Plan du cours :

1. Définitions, premières propriétés des algèbres vertex : définition d'une algèbre vertex, OPE (*operator product expansion*), exemples d'algèbres vertex.
2. Algèbres de Poisson et algèbres vertex de Poisson, filtration de Li, variétés associées.
3. Foncteur de Zhu, modules sur les algèbres vertex, applications.

Prérequis :

- analyse complexe de base,
- (si possible) introduction aux algèbres de Lie semi-simples,
- quelques notions de géométrie algébrique.

Bibliographie

Victor Kac.
Vertex algebras for beginners.
Second edition. University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

Edward Frenkel and David Ben-Zvi.
Vertex algebras and algebraic curves.
Mathematical Surveys and Monographs, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

Tomoyuki Arakawa and Anne Moreau.
Arc spaces and vertex algebras.
Livre en cours d'écriture.