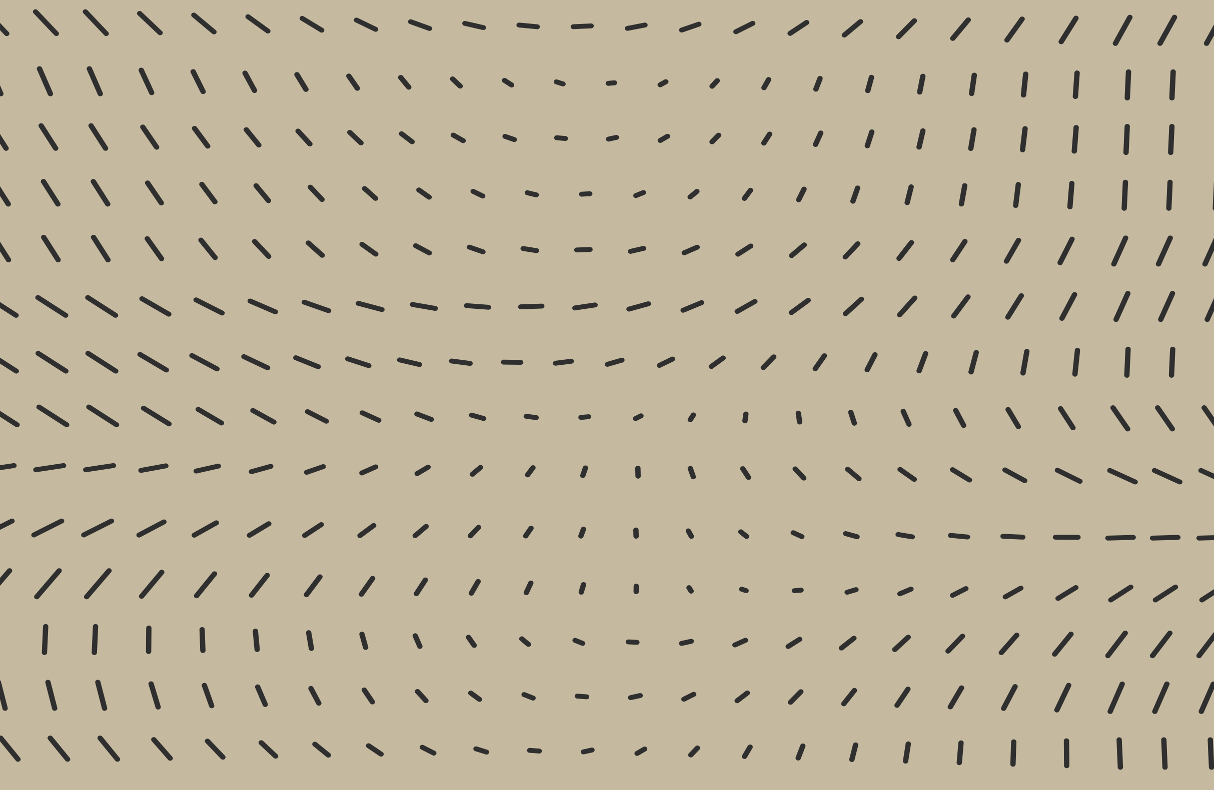
Rencontre ANR GAG

Grenoble

24-26/02/2025



Exposé Louis — Dimension de Von Neumann

<u>But</u> : construire des nombres de Betti qui se comportent bien par revêt^t. Si $X = \mathbb{C}x$ simplicial fini alors

on a $\begin{cases} b_k(X) = \dim H^k(X, \mathbb{Q}) \\ \chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X) \end{cases}$ Invariants par homotopie

Si $\tilde{X} \to X$ revêtement de degré d, on a $\chi(\tilde{X}) = d\chi(X)$

mais $b_k(\tilde{X}) \neq d\, b_k(X)$ en général.

Les nbres de Betti vont vérifier :

<u>B1</u> : Invariants par homotopie

<u>B2</u> : $\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k^{(2)}(X)$

<u>B3</u> : si $\tilde{X} \to X$ $\deg = d$, $b_k^{(2)}(\tilde{X}) = d\, b_k^{(2)}(X)$

<u>B4</u> : [Lück 94] si $X_j \to X$ suite de revêt. de degré d_j qui converge vers le revêt^t universel de X

alors $b_k^{(2)}(X) = \lim_{j \to +\infty} \frac{b_k(X_j)}{d_j}$.

Dimension de Von Neumann : si G groupe agissant par isométries sur V espace de Hilbert.

<u>Def</u> : on dit que V est un G-Hilbert modèle si $\exists$ base G-adaptée $(e_i)_{i \in I}$ ie G agit librement sur I et

$$g \cdot e_i = e_{g \cdot i}$$

Rappels : si $P : V \longrightarrow V$ est un opérateur fermé à domaine dense alors P est positif si $\langle Pv, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in V$

(en part. positif $\Rightarrow$ auto-adjoint)

Décomposition polaire : P borné alors $P = \mathcal{U}|P|$ avec $|P| = (P^*P)^{1/2}$ et $\mathcal{U}$ quasi-isométrie

($\mathcal{U}_{|\mathrm{Ker}(\mathcal{U})^\perp} : \mathrm{Ker}(\mathcal{U})^\perp \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathcal{U})$ est une isométrie).

Déf : si $P : V \longrightarrow V$ un opérateur positif G-équivariant et V un G-Hilbert modèle, $(e_i)_{i\in I}$ une base G-adaptée alors $\underline{tr_G(P) = \sum_{i \in I/G} \langle Pe_i, e_i\rangle} \in [0; +\infty]$

Rq : c'est indépendant de la base adaptée choisie !

Prop : Soit $P : V \longrightarrow V$ G-équivariant, V G-Hilbert modèle

1. $tr_G(P) = 0 \iff P = 0$
2. Si V' est un autre G-Hilbert modèle et $Q : V' \longrightarrow V'$ positif alors $P \oplus Q : V \oplus V' \longrightarrow V \oplus V'$ est positif et
$$tr_G(P \oplus Q) = tr_G(P) + tr_G(Q).$$
3. Si $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$ syst dirigé convergeant faiblement vers P alors $$tr_G(P) = \sup_{\alpha \in A} tr_G(P_\alpha)$$
   - $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in A$, $\exists \alpha \in A$, $\alpha \geq \alpha_0$ et $\alpha \geq \alpha_1$ avec $P_\alpha \geq P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}$
   - $\langle P_\alpha(v), w\rangle \underset{\text{"}\alpha \to +\infty\text{"}}{\longrightarrow} \langle P(v), w\rangle$

(4) Si $G' < G$ ssgpe d'indice fini, $tr_{G'}(P) = [G:G']\, tr_G(P)$
(5) $tr_G(P^*P) = tr_G(PP^*)$ (ici P pas nécessairem^t ≥ 0).

G-dimension : si V est un G-Hilbert et si $\exists\, V \overset{i}{\hookrightarrow} H$ G-équivariant et isométriq avec H un G-Hilbert modèle alors on déf $\dim_G(V) = tr_G(P_{\overline{V}})$

Rq: cette définition ne dépend pas du plongement !

Lemme : soient V et W deux G-Hilbert, $A : V \longrightarrow W$ injectif, isométriq d'image dense alors $i \searrow H \swarrow i'$

$$tr_G(P_{\overline{i(V)}}) = tr_G(P_{\overline{i'(W)}})$$

démo : on considère $B = A\, pr_{\overline{V}}$ opérateur fermé à domaine dense, on écrit la décomposition polaire $B = U|B|$ et on a $tr_G(U^*U) = tr_G(UU^*)$. Or on vérifie que

$$U^*U = pr_{\overline{V}} \quad \text{et} \quad UU^* = pr_{\overline{W}} \quad \square$$

Propriétés : (D1) $\dim_G(V) = 0 \iff V = 0$

(D2) $\dim_G(V \oplus W) = \dim_G(V) + \dim_G(W)$, décroissant

(D3) • Si $(V_i)_{i\in I}$ syst de ss-espaces dirigé par l'inclusion alors $\dim_G\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \inf_{i\in I}\left(\dim_G(V_i)\right)$

• Si $(W_i)_{i\in I}$ syst dirigé croissant $(W_{i_0}, W_{i_1} \subseteq W_i)$ alors $\dim_G\left(\overline{\bigcup_{i\in I} W_i}\right) = \sup_{i\in I}\left(\dim_G(W_i)\right)$.

(D4) Si $G' < G$ indice fini $\dim_{G'}(V) = [G:G'] \dim_G(V)$

(D5) si $A : V \longrightarrow W$ G-équivariant, borné et V, W de G-dim $< +\infty$ alors $\left[\begin{array}{l} \dim_G(\operatorname{Ker} A) - \dim_G(\operatorname{Ker} A^*) = \\ \quad \dim_G(V) - \dim_G(W). \end{array} \right.$

<u>Exemples</u> : (0) $\dim_G \ell^2(G) = 1$.

(1) si $G = \mathbb{Z}$, $\ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{S}^1)$ (Fourier)

Or $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))^{\mathbb{Z}} \xleftrightarrow{\sim} L^\infty(\mathbb{S}^1) \\ M_\varphi(f) = \varphi f \longleftarrow\!\shortmid \ \varphi \end{array} \right.$

si $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}^1$, $E_{\mathcal{U}} = \{ f \in L^2(\mathbb{S}^1), \ f|_{\mathcal{U}^c} = 0 \}$

$\dim_{\mathbb{Z}}(E_{\mathcal{U}}) = \mu(\mathcal{U}) \in [0;1]$.

Exposé Cécile — Nombres de Betti L^2

§1. Espaces de cochaînes L^2 venant de Cx simpliciaux loc. finis

<u>Def</u>: Un Cx simplicial est la donnée d'un ensemble X de simplexes tq
- $\forall \sigma \in X$, les faces de $\sigma \in X$
- $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in X$, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est une face de σ_1 et de σ_2

Un Cx est dit local^t fini si $\forall x \in X$, $\exists U$ vois tq $\#\{\sigma \in X, \sigma \cap U \neq \emptyset\} < +\infty$.

<u>Exemple</u>: si Y est un espace top homéo à la réalisat° top d'un Cx simplicial fini, alors $\tilde{Y}$ est (homéo à) un Cx <u>loc. fini</u>

On déf. l'ens. des k-cochaînes $\mathcal{C}^k(\tilde{Y}, \mathbb{R})$ et on considère
$$L^2\mathcal{C}^k(\tilde{Y}, \mathbb{R}) = \left\{ c \in \mathcal{C}^k(\tilde{Y}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{\substack{\sigma \subset \tilde{Y} \\ \dim \sigma = k}} |c(\sigma)|^2 < +\infty \right\}$$

Pour définir le cobord, on étudie :
$$\mathbb{Z}\text{-}\{(k+1)\text{-simplexes de } \tilde{Y}\} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\{k\text{-simplexes sur } \tilde{Y}\}$$
et son dual $d_k : \mathcal{C}^k(\tilde{Y}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\tilde{Y}, \mathbb{R})$.

<u>Fait</u>: d_k induit un opérateur borné $d_k : L^2\mathcal{C}^k \longrightarrow L^2\mathcal{C}^{k+1}$.
(si le nbre de simplexes contenant un point donné est uniformément borné)

§2 – Cohomologie L^2 : $L^2H^k(\tilde{Y},\mathbb{R}) = \ker(d_k^{(2)}) / \mathrm{Im}(d_{k-1}^{(2)})$

Version réduite $L^2\overline{H}^k(\tilde{Y},\mathbb{R}) = \ker(d_k^{(2)}) / \overline{\mathrm{Im}(d_{k-1}^{(2)})}$

Si on a une action libre d'un gpe, $L^2b_k = \dim_G L^2\overline{H}^k(\tilde{Y},\mathbb{R})$

On peut utiliser les représentants harmoniques :

$$L^2\mathcal{H}^k(\tilde{Y},\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\Delta_k)$$

avec $\Delta_k : L^2\mathcal{C}^k \circlearrowleft$ donné par $d_{k-1}d_{k-1}^* + d_k^* d_k$

§3. Nbres de Betti L^2 on part de Y (homéo à) un complexe simplicial fini et $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ son revêtement universel

On note $\Gamma = \pi_1(Y)$ qui agit unitairement sur $L^2\mathcal{C}^k(\tilde{Y},\mathbb{R})$

Def : $L^2b_k(Y) = b_k^{(2)}(Y) = \dim_\Gamma L^2\mathcal{H}(\tilde{Y},\mathbb{R})$

(rq : $L^2\mathcal{C}^k(\tilde{Y},\mathbb{R}) \simeq \ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{C}^k(Y,\mathbb{R})$
si on a une décomposition en simplexes suff. fins)

exemple : $\mathbb{S}^1 \longrightarrow L^2b_0(\mathbb{S}^1) = L^2b_1(\mathbb{S}^1) = 0$.

§4. Propriétés des nbres de Betti L^2 invariance par homotopie (B1)

(B2) th de l'indice L^2

(B3) Si $\hat{X} \longrightarrow X$ revêt^t de degré d, $L^2b_k(\hat{X}) = d\,L^2b_k(X)$

(B4) = th de Lück (B5) calcul via les formes diff.

(B6) Dualité de Poincaré si M compacte orientée
alors $L^2b_k(X) = L^2b_{n-k}(X)$. ($n = \dim M$).

Pour démontrer (B2), on utilise l'invariance de l'indice pour l'opérateur $d+d^*$: $L^2\mathcal{C}^{\text{paire}}(\widetilde{X},\mathbb{R}) \longrightarrow L^2\mathcal{C}^{\text{impaire}}(\widetilde{X},\mathbb{R})$ et le fait que $L^2\mathcal{C}^k(\widetilde{X},\mathbb{R}) \simeq \ell^2(\Gamma)\otimes L^2\mathcal{C}^k(\widetilde{X},\mathbb{R})$ (d'où $\dim_\Gamma L^2\mathcal{C}^k(\widetilde{X},\mathbb{R}) = \dim \mathcal{C}^k(\widetilde{X},\mathbb{R})$).

<u>Invariance par homotopie</u> (Dodziuk, 1977)

Idée : adapter le lien entre cohomologie de de Rham et cohomologie de Čech au cas L^2.

Exposé d'Andreas

Approximation des nbres de Betti L^2

<u>Setup:</u> X Cx simplicial $< +\infty$ de gpe fondamental $\pi = \pi_1(X)$ que l'on suppose résiduell^t fini. On se donne (Γ_m) suite exhaustive de ss-gpes <u>normaux</u> d'indice fini et on note
$p_m : X_m \longrightarrow X$ les revêtements correspondants

<u>Th (Lück, 1994)</u> : égalité de Kazhdan

$$b_k^{(2)}(X) = \lim_{m \to +\infty} \frac{b_k(X_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]}$$

(on vérifie sur le cas de $\mathbb{S}^1$!)

<u>Début de la démo:</u> $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ revêtement universel
on considère les complexes de chaînes de X et $\widetilde{X}$ avec les opérateurs de bord :

$$c_p : \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n_{p-1}} \mathbb{Z}\pi \quad (n_k = \text{nbre de } k\text{-simplexes de } X)$$

On lui associe deux types d'opérateurs :

rep. en dim $< +\infty$ — représentations L^2

$$(c_p)_m : \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{C}[\Gamma_m \backslash \pi] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n_{p-1}} \mathbb{C}[\Gamma_m \backslash \pi] \qquad c_p^{(2)} : \bigoplus_{i=1}^{n_p} \ell^2(\pi) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n_{p-1}} \ell^2(\pi)$$

<u>Homologie L^2:</u> $b_k^{(2)}(X) = \dim_\pi H_k^{(2)}(\widetilde{X})$

Calcul formel : $b_p^{(2)}(X) = \dim_\pi \operatorname{Ker} c_p^{(2)} - \dim_\pi \overline{\operatorname{Im}(c_{p+1}^{(2)})}$

$$= \underbrace{\dim_\pi \operatorname{Ker}(c_p^{(2)}) + \dim_\pi (\operatorname{Ker} c_{p+1}^{(2)})}_{①} - n_{p+1}$$

et le m̂ calcul sur X_m donne :

$$\frac{b_p(X_m)}{[\pi : \Gamma_m]} = \underbrace{\frac{\dim(\operatorname{Ker}(c_p)_m \oplus \operatorname{Ker}(c_{p+1})_m)}{[\pi : \Gamma_m]}}_{} - n_{p+1}$$

il faut montrer que $\xrightarrow[m\to+\infty]{=}$ ①

À partir de maintenant : $f : \bigoplus_{i=1}^{a} \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{b} \mathbb{Z}[\pi]$ application linéaire qui induit f_m et $f^{(2)}$

On pose $E_m(\lambda) = \#\{$ valeurs propres de $f_m^* f_m \leq \lambda$, comptés avec multiplicité $\}$

d'où $\underbrace{F_m^{\nabla f}(\lambda) = \frac{E_m(\lambda)}{[\pi : \Gamma_m]}}_{\text{croissant et } C^0 \text{ à droite}}$ et $\underbrace{\overline{F^{\nabla f}}(\lambda) = \limsup_{m\to+\infty} F_m^{\nabla f}(\lambda)}_{\text{croissant}}$

$$\overline{F^{\nabla f}}^{+}(\lambda) = \lim_{\delta\to 0^+} \overline{F^{\nabla f}}(\lambda+\delta) \quad (C^0 \text{ à droite})$$

et les analogues $\underline{F^{\nabla f}}(\lambda)$, $\underline{F^{\nabla f +}}(\lambda)$ avec les lim inf.

On voudrait faire la m̂ chose avec $f^{(2)*} f^{(2)} \Rightarrow$ th. spectral !

Th spectral : $N : H \longrightarrow H$ opérateur normal sur H alors
∃ ! mesure sur $\mathrm{Bor}(\mathbb{C})$ à valeurs ds les projecteurs tq $N = \int_{\mathbb{C}} z \, dE(z)$

On est dans le cas auto-adjoint donc $\sigma(N) \subseteq \mathbb{R}$ et on a une famille de projecteurs spectraux $(P_\lambda)_{\lambda \in [0;+\infty[}$ et la fonction de densité

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow [0;+\infty] \\ \lambda \longmapsto \dim_\pi \operatorname{Im}(P_\lambda) \end{cases} \qquad P_\lambda = \int_0^\lambda dE(z)$$

F est C^0 à droite et croissante

et $F(0) = \dim \operatorname{Ker}(f^{(2)*} f^{(2)}) = \dim \operatorname{Ker}(f^{(2)}) = 1$!

Thm : On a

1) $F(\lambda) = \overline{F^{rf^+}}(\lambda) = \underline{F^{rf^+}}(\lambda) \quad \forall \lambda \in [0;+\infty[$

2) a) $\overline{F^{rf}}$ et $\underline{F^{rf}}$ sont C^0 à droite

b) $\underset{1\,''}{F(0)} = \underset{\lim 2}{\lim_{m \to +\infty} F_m^{rf}(0)}$.

(donc c'est gagné !)

Préparation de la preuve du 1) :

$$f : \bigoplus_{i=1}^a \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^b \mathbb{Z}[\pi] \iff B \in \operatorname{Mat}(a, b, \mathbb{Z}[\pi])$$

tq $f(x) = xB$

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{Z}[\pi]} f^* f = \sum_{i=1}^a \underbrace{\operatorname{tr}_{\mathbb{Z}[\pi]} (B^* B)_{ii}}_{= \text{coeff de l'élément neutre !}}$$

Lemme clé 1 : soit $p(\mu)$ un polynôme. Alors $\exists\, m_0 = m_0(\Gamma_\bullet, p)$

$$\forall m \geq m_0, \quad \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}[\pi]} p(f^* f) = \frac{1}{[\pi : \Gamma_m]} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\, p(f_m^* f_m)$$

démo cas $p(\mu) = \mu$: on écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^a (B^* B)_{ii} = \sum_{k=0}^r \underset{\in \mathbb{Z}}{\lambda_k} \underset{\in \pi}{g_k}$

avec $g_0 = 1$.

On s'intéresse à λ_0 ! Endim $<+\infty$, on a :

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, f_m^* f_m = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\left(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k \overline{g_k}\right)$$ avec $\overline{g_k}$ mult. à droite par g_k sur $\mathbb{C}[\Gamma_m \backslash \Gamma]$

Or, comme $\bigcap_{m\geq 1} \Gamma_m = \{1\}$, il existe m_0 tq $\forall m \geq m_0$, $\overline{g_k} \neq 1$ dans $\Gamma_m \backslash \Gamma$ $(k \neq 0)$

$\Rightarrow \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(\overline{g_k}) = 0$ sur $\mathbb{C}[\Gamma_m \backslash \Gamma]$ pour $k \neq 0$

D'où pour $m \geq m_0$, $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, f_m^* f_m = \mathrm{tr}(\lambda_0 : \mathbb{C}[\Gamma_m \backslash \Gamma] \circlearrowleft) = \lambda_0 [\Gamma : \Gamma_m]$

mais $\lambda_0 = \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}[\pi]}(f^{(1)*} f^{(1)})$ $\blacksquare$

<u>Lemme clé 2</u> : Soit $\chi_{[0;\lambda]}(\mu)$ la fonction caractéristique de $[0;\lambda]$ et $p_n(\mu)$ une suite de polynômes tq $p_n(\mu) \longrightarrow \chi_{[0,\lambda]}(\mu)$ avec $|p_n(\mu)| \leq L$ si $\mu \in [0; \|f^{(1)}\|^2]$

alors $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}[\pi]}\, p_n(f^* f) = F(\lambda)$$

Exposé de Jean   Approximation de Lück II

0) Fin de la démonstration

<u>Proposition</u> : Soient Γ un gpe discret, $A \in M_m(\mathbb{Z}\Gamma)$ symétrique positive. On se donne $N_n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$, $A_n \in M_{N_n}(\mathbb{Z})$ tq

(0) $\varepsilon_n \asymp 1/N_n$ (1) $\| A_n \| \leq C$

(2) $\forall f \in \mathbb{R}[t]$, $\varepsilon_n \operatorname{tr}(f(A_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \operatorname{tr}_\Gamma(f(A))$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n \dim(\operatorname{Ker}(A_n)) = \dim_\Gamma(\operatorname{Ker} A)$

<u>démo</u> : on a besoin du résultat intermédiaire suivant

<u>Lemme</u> : soit $0 < \lambda < 1$. $L_n(\lambda) = \left(\text{nb de valeurs propres de } A_n \text{ dans }]0;\lambda[\right)$ vérifie

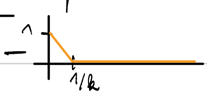
$$L_n(\lambda) \leq C_1 \frac{1}{\varepsilon_n |\log \lambda|}$$

<u>démo</u> : on note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{K_n} \leq C$ les vp > 0 de A_n

alors $\prod\limits_{i=1}^{K_n} \lambda_i \in \mathbb{Z}$ et $\neq 0 \Rightarrow \prod\limits_{1 \leq i \leq K_n} \lambda_i \geq 1$

et on a $\lambda^{L_n(\lambda)} C^{N_n} \geq \lambda^{L_n(\lambda)} C^{K_n} \geq 1$ et OK. $\blacksquare$

<u>Retour à la prop</u> : pour $k \geq 1$, on se donne $f_k \in \mathbb{R}[t]$

tq $\| f_k -$  $\|_{\infty,[0;C]} < 1/k$

$$0 \leq \operatorname{tr}\left(g_k(A_n)\right) - \dim \operatorname{Ker} A_n \leq \mu_n\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{C_3}{\varepsilon_n \log(k)}$$

et on a aussi

$$\left| \operatorname{tr} f_k(A_n) - \operatorname{tr}\left(g_k(A_n)\right) \right| \leq N_n \cdot \frac{1}{k}$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \left[\operatorname{tr}\left(f_k(A_n)\right) - \dim\left(\operatorname{Ker}(A_n)\right)\right] \varepsilon_n \right| \leq \frac{C_2}{k} + \frac{C_3}{\log(k)}$$

Comme $\operatorname{tr}\left(f_k(A_n)\right)\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{tr}_\Gamma\left(f_k(A)\right)$, on en déduit :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \dim\left(\operatorname{Ker}(A_n)\right)\varepsilon_n - \operatorname{tr}_\Gamma\left(f_k(A)\right) \right| \leq \frac{C_2}{k} + \frac{C_3}{\log k}$$

Or, $\limsup_{k\to+\infty} \left| \operatorname{tr}_\Gamma f_k(A) - \dim_\Gamma \operatorname{Ker}(A) \right| = 0$ (C^0 à droite de la fonction spectrale)

et donc (inégalité $\triangle$) $\limsup_{n\to+\infty} \left| \dim\left(\operatorname{Ker} A_n\right)\varepsilon_n - \dim_\Gamma \operatorname{Ker}(A) \right| = 0$ $\blacksquare$

1) Convergence de Cx simpliciaux. Si (X,v) et (Y,w) deux Cx simpliciaux loc. $<+\infty$ enracinés :

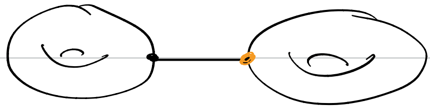
$$d\left((X,v),(Y,w)\right) = 2^{-R} \quad \text{avec}$$
$$R = \max\left(r \geq 0,\ B_X(v,R) \simeq B_Y(w,R)\right)$$

Exemple : (X,v) compact et $(\tilde{X},\tilde{v})$ le revêt^t universel. Si (X_m,v_m) est un revêtement intermédiaire alors

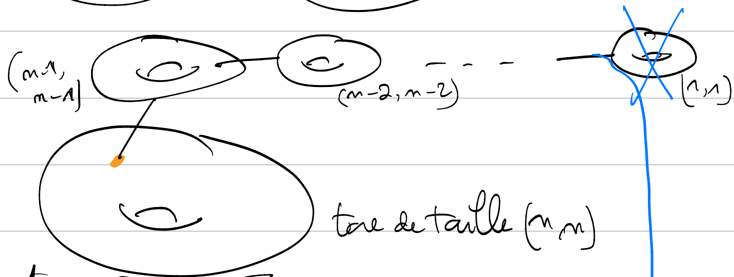
$$(X_m, v_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} (\tilde{X},\tilde{v}) \iff \begin{cases} \forall S \subseteq \Gamma \text{ fini, } S \hookrightarrow \Gamma/\Gamma_m \\ \text{pour } m \gg 1. \end{cases}$$

Rq : si les Γ_m sont emboîtés, cette propriété revient à Γ résiduell^t fini.

Exemples : 1) $X =$

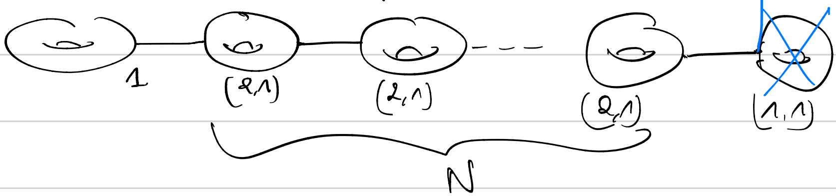


$Z_n =$



on peut ajouter des tores à Z_n

Y_N :



$X_n = Z_n \cup Y_{N_n}$

avec $N \gg n$ alors $\liminf \dfrac{b_2(X_n)}{\deg(X_n \to X)} > 0$

mais $b_2^{(2)}(X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{le th de Lück ne marche pas si} \\ \text{la suite n'est pas distinguée.} \end{cases}$

2) Bergeron-Gaboriau (200?) donnent des constructions systématiques

2) __Critère de Farber__ Γ un gpe et $\Gamma_n < \Gamma$ une suite de ss-gpes d'indice fini. On cherche une condition pour que $\forall A \in M_d(\mathbb{Z}[\Gamma])$ $\dfrac{\mathrm{tr}(A \bmod \Gamma_n)}{[\Gamma : \Gamma_n]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{tr}_\Gamma(A)$

On écrit $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=0}^{n} a_i \gamma_i$ avec $\gamma_0 = 1_\Gamma$ et les γ_i 2 à 2 $\neq$

$$\mathrm{tr}(A \bmod \Gamma_m) = a_0 [\Gamma : \Gamma_m] + \sum_{i \geq 1}' a_i \, \mathrm{Fix}_{\Gamma/\Gamma_m}(\gamma_i)$$

On veut donc (F_γ) : $\mathrm{Fix}_{\Gamma/\Gamma_m}(\gamma) = o([\Gamma : \Gamma_m])$

<u>Critère de Farber</u> : $\forall \gamma \neq 1_\Gamma, \ (F_\gamma) \implies \forall A \in M_d(\mathbb{Z}\Gamma)$,
$$\frac{\mathrm{tr}(A \bmod \Gamma_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \mathrm{tr}_\Gamma(A)$$

<u>Géométriquement</u> : si $\Gamma = \pi_1(X)$ et $X_m = \Gamma_m \backslash \tilde{X}$, $v \in X$
alors $\forall \gamma \neq 1, (F_\gamma) \iff \forall R > 0$, le nbre de v_m relevé de v dans X_m tq $d((X_m, v_m), (\tilde{X}, \tilde{v})) > 2^{-R}$ est un $o([\Gamma : \Gamma_m])$

(Convergence de "Benjamini - Schramm").

3) <u>Exemples</u> ① G gpe de Lie linéaire affine et $\Gamma < G$ un réseau arithmétique. Si Γ_m est un ssgpe de congruence avec $[\Gamma : \Gamma_m] \to +\infty$, le critère de Farber s'applique (par exemple $\Gamma_0(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \ c \equiv 0 \ [m] \right\}$)

<u>Rq</u> : pour $m \geq 3$ et $\Gamma = SL_m(\mathbb{Z})$ alors toute suite de ssgpe d'indice fini satisfait le critère de Farber.

② $\Gamma = \mathbb{F}_r, \ \pi_1(\Sigma_g), \ \mathbb{Z}^d$

$\forall \gamma \neq 1, \quad \mathbb{E}_{\mu_n}(\mathrm{Fix}_{\Gamma/H}(\gamma)) = O(1)$ si μ_n = mesure unitaire sur les ss-gpes d'indice n

Exposé de Pierre

Trois trucs en cohomologie L^2

1) Compléments et exemples sur les $b_i^{(2)}$

Si $\Gamma = \pi_1(X)$ avec X complexe fini et asphérique, on définit
$b_i^{(2)}(\Gamma) = b_i^{(2)}(\widetilde{X})$ (et ça ne dépend que de Γ)

Si $\Gamma = \pi_1(M)$, M compacte asphérique alors $b_i^{(2)}(\Gamma) = b_{i,dR}^{(2)}(\widetilde{M})$

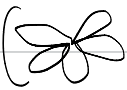
Dans ce cadre, on a "en général" $b_i^{(2)}(\Gamma) = 0$ sauf pour un i.

On peut aussi définir $b_i^{(2)}(\Gamma)$ pour Γ gpe dénombrable (Cheeger-Gromov, Gaboriau) mais là on peut avoir des comportements différents $\Rightarrow$ par ex. $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_n)$ (Gaboriau).

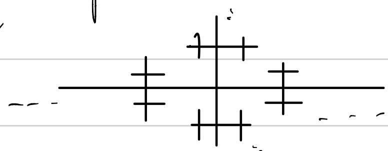
Exemples : (0) $b_0^{(2)}(\Gamma) = \dfrac{1}{|\Gamma|}$ $\quad (= 0$ si $\Gamma = \infty)$

(1) gpes de surfaces $(g \geq 2)$: $b_0^{(2)}(\pi_1 \Sigma_g) = b_2^{(2)}(\pi_1 \Sigma_g) = 0$
$b_1^{(2)}(\pi_1 \Sigma_g) = 2g - 2$ (caract. d'Euler)

(2) groupes libres : $b_0^{(2)}(\mathbb{F}_n) = b_i^{(2)}(\mathbb{F}_n) = 0$ $(i \geq 2)$

et à nouveau avec $\chi\Big($  $\Big) = 1 - n$ donne
n cercles
$b_1^{(2)}(\mathbb{F}_n) = n - 1$.

On peut en donner une démonstration directe :

$\widetilde{X}$ 

$$d : \begin{cases} C^0_{(2)}(\widetilde{X}) \longrightarrow C^1_{(2)}(\widetilde{X}) \\ \ell^2(\mathbb{F}_n) \qquad\quad \bigoplus_{i=1}^{n} \ell^2(\mathbb{F}_n) \end{cases}$$

et d est injectif, d'image fermée (non moyennabilité de $\mathbb{F}_n$)

on a $b_1^{(2)}(\mathbb{F}_n) = \dim_{\mathbb{F}_n}\left(C^1_{(2)}(\tilde{X})\right) - \dim_{\mathbb{F}_n}\left(C^0_{(2)}(\tilde{X})\right)$

$= n-1.$

Rq: on peut aussi utiliser le th. de Lück !

3) Si $X_1 \xrightarrow[d:1]{} X$ avec $d \geq 2$ et $\pi_1(X_1) \simeq \pi_1(X)$ (abstraitement)

alors $b_i^{(2)}(\pi_1 X_1) = d\, b_i^{(2)}(\pi_1 X) \Rightarrow b_i^{(2)}(\pi_1(X)) = 0$

par ex: $\Gamma = \mathbb{Z}^n$

2) Caractéristique d'Euler

M = compacte orientée

si $\dim M \equiv 1\ [2]$ alors $\chi(M) = 0$.

Conjecture (Hopf-Chern, 1932) : $\dim M = 2d$ et si M porte une métrique à courbure <0 (≤ 0) alors $(-1)^d \chi(M) > 0$ (≥ 0)

OK pour $d=1$, des produits de courbes, des fibrés type surfaces de Kodaira.

Motivation: $\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \text{Pfaffien}(R_g)$

courbure de g vue comme une 2-forme à valeurs $\text{End}(T_M)$

Question: le signe de $\text{Pf}(R_g)$ est-il constant si R_g a 1 signe?

↳ Réponse: oui en dim 4 (Chern) mais à partir de la dim ≥ 6 ce n'est plus nécessairement vrai (Geroch, 1976)

Conjecture de Singer : si M asphérique compacte alors

$$b_i^{(2)}(\tilde{M}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim(M) \equiv 1\ [2] \\ 0 & \text{si } \dim(M) = 2d \text{ et } i \neq d \end{cases}$$

Rq : Singer $\Rightarrow (-1)^d \chi(M) = b_d^{(2)}(\tilde{M}) \geq 0$.

3) Cas des espaces symétriques de type non compact

G = gpe de Lie 1/2 simple, connexe, à centre fini, non compact

K = compact max. $\tilde{M} = G/K$ riemannienne à courbure ≤ 0.

Ex : • $Sl_n(\mathbb{R})$, SO_n $\delta \neq 0$ si $n \geq 3$ • $SU(n,1)$, $S(U(n) \times U(1))$ $\delta = 0$

• $O(p,q)$, $O(p) \times O(q)$ --- δ ça dépend

$\mathfrak{g}$ = algèbre de Lie 1/2-simple réelle alors

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \underbrace{\mathfrak{h}_0}_{\text{alg. de Cartan}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \qquad \Delta \subseteq \mathfrak{h}_0^*, \ \Delta = -\Delta$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) - \dim(\mathfrak{h}_0)$ est paire $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G) - rg_{\mathbb{C}}(G)$ est pair !

On a aussi $\dim(G/K) - \underbrace{(rg_{\mathbb{C}} G - rg_{\mathbb{C}} K)}_{\delta(G)}$ est pair

Th (Borel) : • si $\delta(G) \neq 0$ alors $\forall j$, $H^j_{(2)}(G/K) = 0$

donc si Γ est un réseau cocompact ss-torsion, $b_j^{(2)}(\Gamma) = 0 \ \forall j$.

• si $\delta(G) = 0$ alors $\dim(G/K) = 2d$ et

$H^j_{(2)}(G/K) = 0$ pour $j \neq d$, $H^d_{(2)}(G/K)$ est de dim ∞

Cas de l'espace hyperbolique réel : si g métrique et $\lambda^2 g$ une métrique conforme alors 1) $vol_{\lambda^2 g} = \lambda^n vol_g$

2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\lambda^2 g} = \lambda^{-2q} \langle \cdot , \cdot \rangle_g$ sur les q-formes

3) $*_{\lambda^2 g} = \lambda^{n-2q} *_g$ sur les q-formes.

D'où, si $n = 2q$, $\Delta \alpha = 0 \iff d\alpha = 0$ et $d(*\alpha) = 0$

donc être $\begin{bmatrix} \text{harmonique} \\ L^2 \end{bmatrix}$ ne dépend que de la classe conforme pour les q-formes !

Or, si $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^{2q}$ la boule unité, $g_{hyp} = \dfrac{g_{euc}}{(1 - \|x\|^2)^2}$

donc on peut travailler avec g_{euc} !

$$\alpha = d(h \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{q-1}) = \sum_{i=q}^{2q} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{q-1}$$

avec $h(x_q \dots x_{2q})$ harmonique sur $\mathbb{R}^q$.

On a $d\alpha = 0$ et $*\alpha = \sum_{j=q}^{2q} (-1)^{j-1} \dfrac{\partial h}{\partial x_j} dx_q \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_{2q}$

d'où $d(*\alpha) = \sum_{j=q}^{2q} (-1)^q \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} dx_q \wedge \dots \wedge dx_{2q} = 0$ si $\Delta h = 0$

et donc $\left\{ \text{harmoniques sur } \mathbb{R}^q / \text{cste} \right\} \hookrightarrow \mathcal{H}^q_{(2)}(\mathbb{H}^{2q}_{\mathbb{R}})$.

Pour les autres degrés, on utilise $\exp_o : T_o M \longrightarrow M$ et on suppose que c'est un difféo et que toute isométrie de $T_o M$ est induite par une isométrie qui fixe $o \in M$.

$$\exp_o^*(g) = dr^2 \oplus f(r)^2 g_{sph} \quad \text{sur } T_o M \setminus \{0\}.$$

Les espaces de formes harmoniques sont donnés par :

$$\mathcal{H}^0_{(2)} = \mathcal{H}^n_{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \int_0^{+\infty} f(r)^{n-1}\,dr = +\infty \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $q \neq 0, n$ et $n/2$, $\mathcal{H}^q_{(2)} = \{0\}$

et $\mathcal{H}^{n/2}_{(2)} \neq \{0\} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dr}{f(r)} < +\infty$

(Dodziuk, 1979).

Exposé de Philippe

Deux variantes du th d'approximation de Lück

1) Opérateurs différentiels d'ordre 1

(M,g) riemannienne complète | (E,h_E) et (F,h_F) deux fibrés vectoriels hermitiens sur M. On peut considérer $L^2(M,E)$ complétion de $\mathcal{C}^\infty_c(M,E)$ pour $\langle u,v\rangle = \int_M \langle u(x),v(x)\rangle_{h_E} d\mathrm{vol}_g(x)$

On considère aussi :

$$D : \mathcal{C}^\infty(M,E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,F) \text{ opérateur diff d'ordre 1}$$

qui s'écrit localement $D = \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i} + B(x)$

avec $A_i, B \in M_{rg(E),rg(F)}(C^\infty)$

<u>Ex</u>: • M cplexe, g hermitienne, E hol et $D=\bar\partial$ avec $F=E\otimes\Omega^{0,1}$

• $E' = E \otimes \bigoplus_{q\equiv 0[2]} \Omega^{0,q}$, $F' = E\otimes\bigoplus_{q\equiv 1[2]}\Omega^{0,q}$

et $D : C^\infty_c(E'\oplus F') \circlearrowleft$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & \bar\partial^* \\ \bar\partial & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(D) = \bigoplus_q H^{0,q}(M,E)$ (si M compacte).

On code D par son symbole $\sigma_D : E\otimes_{\mathbb{R}} T^*M \longrightarrow F$

$$\sigma_D(e\otimes df) = D(fe) - fDe \qquad f\in\mathcal{C}^\infty \text{ et } e\in\mathcal{C}^\infty(M,E)$$

En coordonnées locales, on a :

$$\sigma_D(e\otimes\xi) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i A_i(x)(e)$$

<u>Def</u>: D est <u>elliptique</u> $\iff \forall \xi\neq 0$, $\sigma_D(\cdot\otimes\xi)$ est inversible

$$\sigma_D(\cdot\otimes\xi) : E_x \longrightarrow F_x$$

Def : D est à symbole borné si $\exists C>0$ $\forall \xi \in T^*_M$, $|\xi|_g = 1$
alors $\|\sigma_D(-\otimes \xi)\| \leq C$.

Exemple: M = revêt d'une variété compacte X et D = image réciproque d'un opérateur sur X. $\Rightarrow$ D à symbole borné.

Lemme de Gaffney : si D à symbole borné alors l'opérateur fermé à domaine dense $\mathbb{D}$: $\begin{cases} \mathrm{Dom}(\mathbb{D}) = \{u \in L^2(M,E) \mid Du \in L^2\} \longrightarrow L^2(M,F) \\ u \longmapsto Du \end{cases}$

est la clôture de $D : \mathcal{C}^\infty_c(M,E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_c(M,F)$
et son adjoint $\mathbb{D}^*$ est la clôture de D^* adjoint formel de D.

Rappel: adjoint formel défini par la relation
$$\int_M (Du, v)\, d\mathrm{vol} = \int_M (u, D^* v)\, d\mathrm{vol} \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty_c.$$

Conséquence: si $E = F = \xi$ et $D : \mathcal{C}^\infty(M,\xi) \circlearrowleft$ formellement auto-adjoint alors $\mathbb{D}$ est auto-adjoint et c'est l'unique extension auto-adjointe de D (on dit que D est essentiellement auto-adjoint)

Corollaire: $\exists\ (E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ mesure spectrale de $\mathbb{D}$
tq $\mathbb{D} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE(\lambda)$

Si de plus $\mathbb{D}$ est elliptique, on a alors :

(i) $\forall\ a < b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b dE(\lambda)$ est un projecteur sur un sous-espace contenu dans $\mathcal{C}^\infty(M,\xi) \cap L^2$

(ii) Si M est compacte, le spectre est discret et les espaces propres sont de dimension $<+\infty$ (constitués de sections lisses)

(iii) M = revêt^t de X compacte, galoisien de groupe Γ, D (elliptique) sur X $\Rightarrow$ $\tilde{D}$ sur M

$E([a;b]) = \int_a^b dE(\lambda)$ est un espace de Hilbert contenu dans un Γ-Hilbert modèle de $\dim_\Gamma < +\infty$.

2) Equation des ondes (Chernoff, JFA, 1973)

$L : \mathcal{C}^\infty(M, \xi) \circlearrowleft$ formell^t autoadjoint de symbole borné

et on regarde $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = iLu \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \xi)$ ou L^2

Solution donnée par :

$$u_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \, dE(\lambda)\right) u_0 = e^{it\mathbb{L}} u_0$$

ss-gpe à 1 paramètre dans $U(L^2)$

Th : si $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \xi)$ alors u_t aussi et
$\text{Supp}(u_t) \subseteq \{x \in M \mid d(x, \text{Supp}(u_0)) \leqslant Ct\}$

On considère le noyau des ondes : $U_t(x,y) \in \mathcal{D}(M \times M, \xi \boxtimes \xi^*)$ le noyau de Schwartz de $e^{it\mathbb{L}}$ qui vérifie

$$e^{it\mathbb{L}} u_0(x) = \int_M U_t(x,y) u_0(y) \, d\mathrm{vol}_g(y).$$

et $\text{Supp}(U_t) \subseteq \{(x,y) \in M \times M \mid d(x,y) \leqslant Ct\} = \{d_M \leq Ct\}$.

Si M = revêt^t de X compacte $(\pi : M \xrightarrow{\Gamma} X)$, L sur X et $\tilde{L} = \pi^* L$ sur M. La Γ-équivariance s'écrit $U_t^{\tilde{L}}(\gamma x, \gamma y) = U_t^{\tilde{L}}(x,y)$

En fait $U_t^{\tilde{L}} \in \mathcal{D}({}_{\Gamma}\backslash M \times M, {}_{\Gamma}\backslash \xi \boxtimes \xi^*)$

et $\mathrm{Supp}(U_t^{\tilde{L}}) \subseteq \{d_M \leq Ct\}$

(d_M descend à ${}_{\Gamma}\backslash M \times M$). Or $X \hookrightarrow {}_{\Gamma}\backslash M \times M$ (diagonale)

$$\begin{array}{c} {}_{\Gamma}\backslash M \times M \\ \downarrow \text{revêt} \\ X \times X \end{array}$$

<u>Fait</u> : 1) pour $t \ll 1$, on a $\{d_M \leq Ct\} \xrightarrow{\sim} \{d_X \leq Ct\}$

$t \leq \frac{\lambda}{2}$ avec $\lambda = \inf\limits_{\tilde{x} \in M} \inf\limits_{\gamma \neq 1} d(\tilde{x}, \gamma \tilde{x}) > 0$

2) Pour $t \leq \frac{\lambda}{2C}$, $U_t^L = U_t^{\tilde{L}}$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subseteq \left[-\frac{\lambda}{2C} ; \frac{\lambda}{2C}\right]$

alors $f(L) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, U_\xi \, e^{ix\xi} \frac{d\xi}{2\pi}$

donc les noyaux de Schwartz de $f(L)$ et $f(\tilde{L})$ sont les mêmes

$\mathrm{tr}(f(L))$ = intégrale sur la diagonale $= \mathrm{tr}_\Gamma(f(\tilde{L}))$

Exposé de Claudio

Propriétés de finitude et invariants L^2

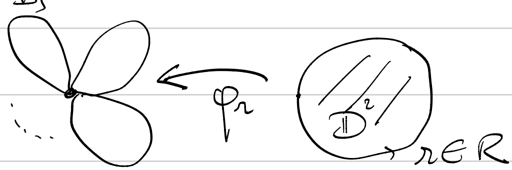
1. Propriétés de finitude

$G = \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$

<u>Def</u> (espace classifiant) $X = K(G,1)$ CW-Cx tq
$\pi_1(X) \simeq G$ et $\pi_i(X) = 0 \ \forall i \geq 2$ ($\Leftrightarrow \tilde{X}$ contractile)
(existe et est unique à homotopie près).

$X^{(0)} = \{*\}$, $X^{(1)} = \bigvee_{s \in S} \mathbb{S}^1_s$ $X^{(2)}$: on colle des disques pour tuer les élém^{ts} de R.

$\mathbb{S}^1_s$



et on continue pour tuer les groupes d'homotopie supérieurs.

<u>Rq</u>: G de type $< +\infty$ (resp. de présentation $< +\infty$) $\Leftrightarrow$
$\exists X = K(G,1)$ avec $X^{(1)}$ fini (2-sq. fini)

<u>Def</u>:
- G est $\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \exists X = K(G,1)$ avec n-squelette fini
- G est $\mathcal{F}_\infty \Leftrightarrow G$ est $\mathcal{F}_n \ \forall n$
- G est $\mathcal{F} \Leftrightarrow \exists K(G,1)$ fini

(1) si $G = \pi_1(X)$ avec X compacte asphérique $\Rightarrow G$ est $\mathcal{F}$.
$\mathbb{F}_n$, $\pi_1(\Sigma_g)$, $\mathbb{Z}^n$

(2) si $|G| < +\infty$ mais $G \neq 1$ alors G est $\mathcal{F}_\infty$ mais pas $\mathcal{F}$.
($G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}P^\infty$)

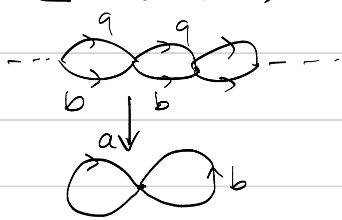
(3) si G est hyperbolique ou CAT(0) $\Rightarrow G \in \mathcal{F}_\infty$

<u>Obstructions</u> : si $H_n(G,R)$ pas de type $<+\infty \Rightarrow$ alors G n'est pas $\mathcal{F}_n$.

<u>Ex</u>: $G = \mathbb{F}_\infty = \pi_1\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} S^1\right)$ vérifie $\dim_{\mathbb{Z}} H_1(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{Z}) = +\infty$

donc G n'est pas $\mathcal{F}_1$!

$$\mathbb{F}_\infty = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a,b & \longmapsto & 1 \end{array}\right)$$



<u>Variation</u>: $SB_2 = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a_i, b_i & \longmapsto & 1 \end{array}\right)$ est $\mathcal{F}_1$ mais pas $\mathcal{F}_2$

<u>Plus généralement</u> : Stallings (63) - Bieri (76)

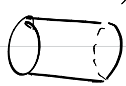
$$SB_n = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2^{(1)} \times \cdots \times \mathbb{F}_2^{(n)} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a_1, b_1 \ \cdots \ a_n, b_n & \longmapsto & 1 \end{array}\right)$$

est $\mathcal{F}_{n-1}$ mais pas $\mathcal{F}_n$.

<u>démo</u> (Bridson, 01) $SB_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{F}_2^{(n)} = \langle a_n \rangle * \langle b_n \rangle$

donc $SB_n = p_n^{-1}(\langle a_n \rangle) *_{p_n^{-1}(1)} p_n^{-1}(\langle b_n \rangle)$

Or $p_n^{-1}(1) = SB_{n-1}$, $p_n^{-1}(\langle a_n \rangle) \simeq \mathbb{F}_2^{\times(n-1)} *_{SB_{n-1}} \mathbb{F}_2^{\times(n-1)}$

donc $K(SB_n, 1) = K(\mathbb{F}_2^{\times(n-1)}, 1) \leftarrow$  $\longrightarrow K(\mathbb{F}_2^{\times(n-1)}, 1)$

$[0;1] \times K(SB_{n-1}, 1)$

et par récurrence, on constate que $K(SB_n, 1)$ a un $(n-1)$-squelette fini.

Avec Mayer-Vietoris, on constate que $H_n(SB_n, \mathbb{Q})$ est de dim ∞ et donc SB_n n'est pas $\mathcal{F}_n$. $\square$

Propriétés de finitude homologique

Def: G est $FP_n(R)$ [R anneau commutatif] si $\exists$ résolution projective de R $\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to R$ avec P_k de type fini pour $k \leq n$ (comme $R[G]$-mod)

Rq:
- $G \in \mathcal{F}_n \Rightarrow G$ est FP_n $(\forall R)$
  - FP_∞ si P_k de type fini $\forall k$.
  - FP si $\exists$ résolution $< +\infty$ avec P_k de type fini.
- $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow FP_1(R)$ $(\forall R)$
- $\mathcal{F}_2 + FP_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathcal{F}_n$
- Mais $\forall n \geq 2$, $\exists G$ $FP_n(\mathbb{Z})$ mais pas $\mathcal{F}_n$ (Bestvina-Brady, 99)

2.) Nombres de Betti L^2 comme obstructions

Rappel / Prop: si X est un $K(G,1)$ à p-squelette fini, on peut définir $b_p^{(2)}(G) = b_p^{(2)}(X)$ et $b_p^{(2)}(G) \leq \#\{p\text{-cellules de } X\}$

Th (Lück, 94): Si $1 \to N \to G \to A \to 1$ avec $N \in \mathcal{F}_d$ et A abélien ∞ de type fini alors $b_p^{(2)}(G)$ $\forall p \leq d$.

$(n \geq 2)$ $\quad g \geq 2$

Application : • $b_1^{(2)}(\mathbb{F}_n) \neq 0 \neq b_1^{(2)}(\pi_1(\Sigma_g))$

alors $\forall \phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^k$, $\mathrm{Ker}(\phi)$ n'est pas $\mathcal{F}_1$.

• $\Gamma < PO(2n,1)$ réseau alors $\forall \phi : \Gamma \to \mathbb{Z}^k$, $\mathrm{Ker}(\phi)$ pas $\mathcal{F}_n$

Démo: on se ramène à $A \simeq \mathbb{Z}$ car un gpe abélien est $\mathcal{F}_d$ pour tout d : $1 \to N \to G \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \to 1$

donc $G \simeq N \rtimes \mathbb{Z} = \pi_1(T_f)$ "mapping torus" avec $f : Y \to Y$

$(Y = K(N,1))$ et $f_* : N \to N$ donné par conjugaison par $\psi(1)$

$$T_f : \left([0;1] \times Y\right) \Big/ (0,y) \sim (1, f(y)) = K(G,1)$$

et $G_n = \mathrm{Ker}(\pi_n : G \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ correspond à T_{f^n}

et les nombres de p-cellules de $T_{f^n} \leqslant$ # p-cell de Y + # (p-1)-cell de Y

Comme $b_p^{(2)}(G_n) = \underbrace{[G : G_n]}_{= n} b_p^{(2)}(G) \leqslant$

donc $b_p^{(2)}(G) = 0$ $\square$

Ex: si $G = \pi_1(X)$ avec X asphérique compacte et $\chi(X) \neq 0$ $\quad b_n^{(2)}(X) \neq 0$

$\Rightarrow \nexists\, \phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Ker}\,\phi \in \mathcal{F}_\infty$ $\quad \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \nexists\, X \to S^1$ local^t triviale

Question : 1) $\exists ?\ G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Ker}(\phi) \in \mathcal{F}_{n-1}$

2) $\exists ?\ f : X \to S^1$ de Morse parfaite (avec des sing d'indice $n = \dim X/2$)