Problème de Lagrange de la forme optimale d'une colonne : maximisation de la première valeur propre.

projet proposé par Anna KAZEYKINA
kazeykina@cmap.polytechnique.fr

1 Introduction

Supposons que nous avons une colonne élastique mince qui est une colonne de révolution de longueur fixe $L = 1$. La forme de la colonne peut alors être décrite par le graphe d'une fonction $f(x)$, $x \in [0, 1]$. La colonne est soumise à une charge axiale de valeur λ. Cette charge crée la déformation transversale $u(x)$, $x \in [0, 1]$, de la colonne qui est décrite par l'équation suivante (équation de Euler-Bernoulli) :

$$(EIu'')'' + \lambda u'' = 0, \tag{1}$$

où I est le moment d'inertie de la colonne (par rapport à l'axe de révolution), et E est le module de Young. A chacune des deux de ses extrémités la colonne peut être soit libre ("free") (pas de condition aux limites prescrite à cet endroit), ou à charnières ("hinged")

$$u(l) = 0, \quad l \in \{0, 1\}, \tag{2}$$

ou encastrée ("clamped")

$$u(l) = u'(l) = 0, \quad l \in \{0, 1\}. \tag{3}$$

La charge maximale de flambage (la charge de flambage de Euler) que la colonne peut supporter est donnée par la valeur propre minimale du problème (1) étant donné les conditions aux limites appropriées.

Supposons que σ mesure l'aire de la section transversale de la colonne, alors le volume de la colonne est donné par $\int\limits_0^1 \sigma(x)dx$. Le problème posé par Lagrange dans [1] consiste en trouver la colonne de révolution de longueur et volume prescrits dont l'efficacité est maximale, c'est à dire la colonne qui possède la resistance maximale au flambage sous compression axiale.

Mathématiquement le problème de Lagrange consiste en maximiser la première valeur propre du problème (1) étant donné les conditions aux limites appropriées.

Dans le problème de Lagrange il est courant de supposer que EI est proportionnel à une certaine puissance de l'aire de la section transversale, c'est à dire $EI = \sigma^p$. Notez également que la forme de la colonne est donnée par la racine carrée de σ.

2 Aperçu historique

La colonne est à la fois un élément essentiel dans la conception architecturale et l'un des premiers corps flexibles étudiés par les outils de l'analyse mathématique. Les premiers critères esthétiques pour construire des colonnes idéales ont été formulés dans la Grèce antique. Ces critères exigeaient qu'une colonne ait un renflement à environ un tiers de sa hauteur et une diminution proche de son sommet. Lagrange a été le premier à dénoncer le critère esthétique pour la construction des colonnes et à proposer à sa place un critère scientifique basé sur la stabilité de la colonne plutôt que sur son apparence ([1]). Cependant, en 1773, en résolvant le problème de la construction de la colonne la plus stable, il a commis plusieures erreurs de calcul qui l'ont fait conclure que la plus forte colonne à charniéres était d'une forme uniforme cylindrique. Cette erreur a été corrigée seulement en 1851 par T.Clausen ([2]). En 1960 J.Keller et I.Tadjbakhsh ont repris le résultat de Clausen et ils l'ont généralisé au cas d'autres conditions aux limites ([3]). Cependant, leurs résultats étaient étonnants : ils impliquaient que la plus forte colonne devait avoir des points où sa section s'annulait.

La raison de ce résultat contre-intuitif a été révélé dans des œuvres ultérieures, où il a été noté que l'approche de Keller et Tadjbakhsh était fondée sur l'hypothèse de la différentiabilité continue de la charge de flambage de Euler par rapport à la forme de la colonne. Toutefois, si la multiplicité de la valeur propre minimale de l'équation (1) est supérieure à un (ce qui peut d'ailleurs arriver), alors cette hypothèse de régularité est difficile à justifier. Partant de ce constat, dans les années 90 S.J. Cox et M.Overton ont proposé des outils d'analyse non lisse pour étudier le problème de Lagrange ([4], [5]). Les colonnes obtenues via leur approche avaient des formes physiquement pertinentes et soutenaient des charges de flambage plus grandes que les colonnes trouvées dans les travaux de Keller et Tadjbakhsh.

L'objectif de ce projet est de réaliser une étude théorique du problème aux valeurs propres pour la colonne serrée à ses deux extrémités, puis d'utiliser une version non lisse de la méthode du gradient pour trouver numériquement la forme optimale de la colonne avec des différents types de conditions aux limites.

3 Etude théorique du problème pour une colonne encastrée

Pour fixer les idées, nous nous limiterons dans l'analyse théorique à l'étude de la colonne qui satisfait les conditions aux limites "clamped-clamped" :

$$\begin{aligned} &(\sigma^p(x)u''(x))'' + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ &u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Le problème de Lagrange consiste en trouver la fonction $\sigma(\cdot)$ satisfaisant la condition $\int_0^1 \sigma(x)dx = 1$, telle que la première valeur propre du problème (4) est maximale.

Question 1. *En considerant une colonne uniforme ($\sigma(x) \equiv \hat{\sigma}$) trouver la premiere valeur propre réele et la fonction propre correspondante pour le problème (4), $u \in C^4(0,1)$.*

La formulation variationnelle de (4) s'écrit comme suit : trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $u \in H_0^2(0,1)\backslash\{0\}$ tel que

$$\int_0^1 \sigma^p(x)u''(x)v''(x)dx = \lambda \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad \forall v \in H_0^2(0,1). \tag{5}$$

Supposons que σ appartient à l'espace suivant

$$ad = \left\{ \sigma \in L^{\infty} \colon 0 < \alpha \leqslant \sigma(x) \leqslant \beta, \int_0^1 \sigma(x)dx = 1 \right\}. \tag{6}$$

Question 2. *Prouver que les valeurs propres de (5) forment une suite croissante de réels positifs et qu'il existe une base hilbertienne de fonctions propres associées. Comment s'écrit la condition d'orthogonalité des fonctions propres ?*

Montrer que la première valeur propre est donnée par

$$\lambda_1(\sigma) = \min_{u \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 \sigma^p(x)(u''(x))^2 dx}{\int_0^1 (u'(x))^2 dx}. \tag{7}$$

Question 3. *Pour $\forall u \in H_0^1(0,1)$ prouver que la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré est $\frac{1}{\pi^2}$, i.e. prouver l'inégalité de Wirtinger suivante :*

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx. \tag{8}$$

(Indice : démontrer ce résultat pour $u \in C_0^{\infty}(0,1)$ en considérant la série de Fourier de u et la formule de Parseval, après utiliser le fait que $C_0^{\infty}(0,1)$ est dense dans $H_0^1(0,1)$ pour obtenir (8)). Utiliser le même genre de raisonnement pour prouver la version suivante de l'inégalité de Poincaré

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |u''(x)|^2 dx \quad \forall u \in H_0^2(0,1). \tag{9}$$

Utiliser (9) pour trouver la première valeur propre de (5), quand $\sigma(x) \equiv \hat{\sigma}$.

Question 4. *Utiliser (5) et le fait que $H_0^2(0,1) \subset C^1(0,1)$ pour prouver que $\sigma^p u_k'' \in C^1(0,1)$, où u_k est une fonction propre de (5), et*

$$(\sigma^p u_k'')(x) = (\sigma^p u_k'')'(0)x + (\sigma^p u_k'')(0) - \lambda_k(\sigma) u_k(x).$$

Indice : démontrer que (5) implique que $\sigma^p u_k'' + \lambda_k u_k$ est une fonction linéaire p.p.

Question 5. *En utilisant le résultat précédent prouver que la multiplicité maximale d'une valeur propre du problème (5) est égale à deux. Indice : montrer que si la multiplicité de $\lambda_k(\sigma)$ est égale à trois, alors il est possible de construire une fonction v vérifiant l'équation linéaire homogène du seconde ordre avec les conditions initiales zéro :*

$$\sigma^p(x)v''(x) + \lambda_k(\sigma)v(x) = 0, \quad v(0) = v'(0) = 0.$$

4 Résolution numérique

On va utiliser la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de Lagrange, c'est-à-dire on va approximer la solution par des fonctions apartenant à un espace de dimension finie.

On discretise l'interval $[0,1]$: $[0, h, \ldots, (N-1)h = 1]$. On considère l'approximation de l'espace ad par la classe de fonctions ad^h constantes par morceaux :

$$ad^h = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^{N-1} \colon \alpha \leqslant \sigma_k \leqslant \beta,\ \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_k = N-1 \right\}.$$

On considère l'approximation de $V = H_0^2(0,1)$ par un sous-espace V^h de dimension finie telle que la restriction de chaque élement de V^h à $[kh, (k+1)h]$ est un polynome cubique.

Question 6. *Trouver n tel que V^h est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Question 7. *Proposer une base $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ de V^h. Indice : utiliser le fait que chaque élément de V^h est uniquement défini par ses valeurs et les valeurs de sa dérivée dans chaque point du maillage.*

Maintenant la forme discretisée du problème (5) s'ecrit

$$B(\sigma)q = \lambda K q, \quad \sigma \in ad^h, \quad B(\sigma), K \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Question 8. *Calculer la matrice de rigidité $B(\sigma)$ et la matrice de masse K.*

Il est connu que quand $h \to 0$ la valeur propre minimale de (10) tend vers la valeur propre minimale du problème (5) ([6]).

Le problème de Lagrange en dimension finie est formulé comme suit :

$$\max_{\sigma \in ad^h} \lambda_1(\sigma), \tag{11}$$

où λ_1 est la valeur propre minimale du problème (10).

Afin de résoudre numériquement le problème de Lagrange, nous proposons un algorithme qui peut être resumé comme suit : étant donné σ, trouver la valeur propre minimale du problème (10), puis utiliser une version non lisse de la méthode du gradient pour trouver une nouvelle iteration de σ qui augmente λ_1 ([4]).

1. Etant donné σ, trouver les deux valeurs propres minimales $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$ du problème (10) et les vecteurs propres q_1, q_2 correspondants. Normaliser q_1 et q_2 de sorte que $Q^T K Q = I$, où $Q = [q_1 q_2]$ et I est la matrice identité. Définir la multiplicité approximative de λ_1 par $t = 2$, si $\lambda_2(\sigma) - \lambda_1(\sigma) \leqslant \tau \lambda_1(\sigma)$, et $t = 1$ au cas contraire. Noter que la multiplicité plus grande que deux est exclue (voir Question 5).
2. Soit $d = (d_1, d_2, \cdots, d_N) \in \mathbb{R}^n$. Résoudre le programme linéaire suivant

$$\max_{d \in \mathbb{R}^N} d_N,$$
$$Ed = e,$$
$$Fd \leqslant f,$$
$$\alpha - \sigma_k \leqslant d_k \leqslant \beta - \sigma_k, \quad k = 1, \ldots, N,$$
$$|d_k| \leqslant \rho, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Les premières $N-1$ composantes de d représentent les modifications des composantes de σ proposées, tandis que la dernière composante de d est une approximation de la modification de $\lambda_1(\sigma)$ correspondante. Nous écrivons $d = [\eta^T \omega]^T$ avec $\eta \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\omega \in \mathbb{R}$.
Notons $B_k(\sigma) = \frac{\partial B}{\partial \sigma_k}$. Matrices E, F et vecteurs e, f sont définis comme suit.
- Si $t = 1$, alors

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 \\ -q_1^T B_1(\sigma) q_1 & \ldots & -q_1^T B_{N-1}(\sigma) q_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = (0,\ 0)^T,$$
$$F = (-q_2^T B_1(\sigma) q_2 \ldots - q_2^T B_{N-1}(\sigma) q_2), \quad f = \lambda_2(\sigma) - \lambda_1(\sigma).$$

- Si $t = 2$, alors

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 \\ -q_1^T B_1(\sigma) q_1 & \ldots & -q_1^T B_{N-1}(\sigma) q_1 & 1 \\ -q_2^T B_1(\sigma) q_2 & \ldots & -q_2^T B_{N-1}(\sigma) q_2 & 1 \\ -q_1^T B_1(\sigma) q_2 & \ldots & -q_1^T B_{N-1}(\sigma) q_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = (0,\ 0,\ \lambda_2(\sigma) - \lambda_1(\sigma),\ 0)^T,$$

  F et f sont vides.

3. Si $\lambda_1(\sigma + \eta) > \lambda_1(\sigma)$, remplacer σ par $\sigma + \eta$, sinon diviser ρ par deux et retourner au pas 2.
   Le processus est terminé quand $\| d \| \leqslant \varepsilon$, la tolérance de convergence.

Question 9. *En supposant que $\lambda_i(\sigma)$ est differentiable, montrer que $\frac{\partial \lambda_i(\sigma)}{\partial \sigma_k} = q_i^T B_k(\sigma) q_i$.*

Question 10. *Dans le cas $t = 1$ proposer une interprétation des conditions $Ed = e$ et $Fd \leqslant f$.*

Puisque ω est maximisé, la solution du programme linéaire donne la direction de la plus grande pente pour $\lambda_1(\sigma)$ projetée pour satisfaire les contraintes différentes. La longueur du pas doit être suffisamment petite pour que la valeur linéarisée de $\lambda_2(\sigma+\eta)$ ne descende pas en dessous de celle de $\lambda_1(\sigma+\eta)$. Si $t = 2$, les lignes 2-4 de la matrice E donnent une linéarisation de l'ensemble approprié de trois équations non linéaires qui imposent la coalescence de $\lambda_1(\sigma + \eta)$ and $\lambda_2(\sigma + \eta)$ ([7]).

Question 11. *Ecrire un programme mettant en œuvre l'algorithme proposé pour résoudre le problème de Lagrange. Essayer des différentes valeurs pour les paramètres du programme : N (le nombre de points de maillage), τ (la tolérance de multiplicité* *relative), σ_0 (la valeur initiale de σ), ρ_0 (la valeur initiale du rayon de confiance), ε (la tolérance de convergence), p (la puissance de σ), α, β (les bornes inférieures et supérieures de σ). Tracer $\sqrt{\sigma}$, $-\sqrt{\sigma}$ pour visualiser la forme optimale de la colonne. Commenter les résultats.*

Question 12. *Ecrire les formulations variationnelles du problème de Lagrange pour les colonnes "clamped-hinged", "hinged-hinged", "clamped-free". Reprendre les questions 6-8, 11 pour ces types de conditions aux limites.*

Références

[1] Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurinensia. 5, 125-170 (1770-1773)

[2] Clausen T. Über die Form architektonischer Säulen. Bull. cl. physico-math. Acad. St. Petersbourg. 9, 369-380 (1851)

[3] Tadjbakhsh I., Keller J. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. J. Appl. Mech. 29, 159-164 (1962)

[4] Cox S.J., Overton M.L. On the optimal design of columns against buckling. SIAM J. Math. Anal. 23(2), 287-325 (1992)

[5] Cox S.J. The shape of the ideal column. Mathematical Intelligencer. 14, 16-24 (1992)

[6] Strang G., Fix G.J. An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1973)

[7] Friedland S., Nocedal J., Overton M.L. The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. SIAM J. Numer. Anal. 24, 634-667 (1987)