Université Paris-Saclay

universite PARIS-SACLAY

LES FONCTIONS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Amaury Freslon

Département de Mathématiques d'Orsay

2020 – 2021

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

À propos de ce texte

Ce document a été rédigé pour servir de support à une série de cours sur les fonctions dans le cadre du Master MEEF de l'Université Paris-Saclay. Support est ici à entendre au double sens de notes sur lesquelles l'auteur s'est appuyé pour son cours, qui consistait en deux séances de quatre heures, et de document pérenne distribué aux étudiants.

Précisons d'emblée que ce ne sont pas des notes de cours à destinations d'enseignants du secondaire, ni à destination d'élèves du secondaire. Ce document ne prétend ni à l'exhaustivité dans son contenu (le traitement algébrique des fonctions polynômes, par exemple, manque) ni à l'adéquation parfaite avec la lettre ou l'esprit des programmes. Ce document est en fait lié au cours pour lequel il a été rédigé, qui répondait à trois objectifs :

1) Offrir aux étudiants préparant le concours du CAPES un aperçu des programmes d'analyse du lycée à travers la notion de fonction;

2) Consolider leurs connaissances, notamment en ce qui concerne la cohérence logique des résultats et les démonstrations;

3) Commencer à préparer les épreuves orales en réfléchissant à l'organisation des résultats et au choix des exercices.

Enseigner les fonctions

La notion de fonction est fondamentale non seulement en mathématiques, mais aussi dans toutes leurs applications. Par exemple, tout phénomène évoluant dans le temps est décrit par une fonction d'une variable réelle, généralement notée t. Voici quelques exemples :

- Physique : position, vitesse, énergie, température;
- Biologie : concentration, population, corrélations;
- Économie : prix, cours boursiers, coûts marginaux;

Par conséquent, beaucoup d'élèves devront les utiliser dans leurs études supérieures voir dans leur futur travail. Il s'agit d'un élément extrêmement important de la formation de l'enseignement secondaire.

Toutefois, la notion de fonction et son utilisation relèvent d'un degré d'abstraction qui peut être difficile à acquérir par les élèves. Pour cette raison, l'étude des fonctions au collège et au lycée se fait de façon progressives suivant trois axes :

1) Appréhender la notion de fonction (à travers des définitions d'abord informelles et des exemples),

2) Acquérir un “répertoire” de fonctions importantes,

3) Développer des outils pour étudier les fonctions et en extraire des informations (dérivation et intégration par exemple).

Ces trois axes ne s'abordent pas l'un après l'autre mais simultanément tout au long de la scolarité. Et même plus : beaucoup d'élèves seront confrontés dans leurs études supérieures à de nouveau types de fonctions (holomorphes, de plusieurs variables, variables aléatoires) qui nécessiteront des notions plus abstraites et plus rigoureuses.

L'idée générale des programmes est, depuis longtemps maintenant, la *progressivité*. Cela signifie que les notions seront introduites dans des cas particuliers, ou de façon intuitives sans leur cadre formel. Avec le temps, certains notions deviendront plus précises tandis que de nouvelles s'ajouteront. Il est néanmoins essentiel que l'enseignant, lui, maîtrise de bout en bout le cadre formel et sache quelles sont les subtilités ou les abus que recèlent les définitions. D'une part parce qu'il faut maîtriser une notion pour l'enseigner, fusse de façon imprécise et d'autre part parce que les difficultés des élève proviennent parfois, sans qu'ils en soient conscient, des non-dits des notions qui leurs sont proposés.

Nous commencerons donc par rappeler la définition mathématique rigoureuse d'une fonction, même si elle ne sera pas utilisé dans la suite.

Définition. Une *fonction* f d'un ensemble A vers un ensemble B est une partie $f \subset A \times B$ telle que pour tout $a \in A$, il existe au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$. On note généralement

$$f : A \longrightarrow B.$$

Profitons en pour faire quelques rappels de terminologie et de notations :

- On appelle A *l'ensemble de départ* de f,
- On appelle B *l'ensemble d'arrivée* de f,
- Étant donné $a \in A$, on note $f(a) \in B$ l'unique élément tel que $(a, f(a)) \in f$ et on l'appelle *l'image de a par f*.
- Étant donné $b \in B$, on appelle *antécédent* de b par f tout élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Il s'agit de définitions formelles et très générales et ce n'est bien sûr pas de cette façon que les fonctions sont introduites dans le secondaire. On partira plutôt de l'idée que f associe à tout élément $a \in A$ un élément $b \in B$.

Remarque. On pourra remarquer que formellement, une fonction est en fait définie par son graphe. Ainsi, le représentation graphique d'une fonction n'est pas un outil auxiliaire de la théorie mais bien un aspect fondamental.

Si l'étude des fonctions est difficile, c'est en partie parce qu'elle nécessite de jongler en permanence entre toutes les incarnations possibles de ces objets, c'est-à-dire entre divers **registres** :

- Le registre numérique ;
- Le registre graphique ;
- Le registre schématique ;
- Le registre algébrique.

Ces différents registres devront être mobilisés les uns à la suite des autres ou simultanément en fonction de la nature du problème à étudier. Indépendamment, il y a une autre distinction important dans la façon dont on aborde les fonctions, c'est celle du **point de vue**, à savoir :

- Le point de vue ponctuel ;
- Le point de vue local ;

- Le point de vue global.

Les programmes introduisent les fonctions via le point de vue ponctuel, mais lui associent immédiatement le point de vue global. Assez naturellement, le point de vue local n'apparaîtra que plus tard, puisqu'il est le plus difficile à appréhender.

CHAPITRE 1

COLLÈGE

1.1 Les programmes

Au collège le cycle 4 (qui couvre les classes de 5^e, 4^e et 3^e) est composé en mathématiques de cinq thèmes. Le second (Thème B) est intitulé : « Organisation et gestion des données, fonctions. » En voici le détail :

Contenus

- Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image ;
- Différents modes de représentation d'une fonction (expression symbolique, tableau de valeurs, représentation graphique, programme de calcul) ;
- Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$;
- Fonction linéaire, fonction affine.

Compétences associées

- Passer d'un mode de représentation d'une fonction à l'autre ;
- Déterminer, à partir d'un mode de représentation, l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction ;
- Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
- Modéliser un phénomène continu par une fonction ;
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire ;
- Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

Plus précisément, on attend qu'à la fin de l'année scolaire un élève de 4^e *soit capable de*

- Produire une expression littérale représentant la dépendance de deux grandeurs ;
- Représenter la dépendance de deux grandeurs par un graphique ;
- Utiliser un graphique représentant la dépendance de deux grandeurs pour lire et interpréter différentes valeurs sur l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées ;

Et qu'un élève de 3^e *soit capable de*

- Utiliser les notations et le vocabulaire fonctionnels ;
- Passer d'un mode de représentation d'une fonction à une autre ;

- Déterminer, à partir de n'importe quel mode de représentation, l'image d'un nombre ;
- Déterminer un antécédent à partir d'un tableau de valeurs ou d'une représentation graphique ;
- Déterminer de manière algébrique un antécédent, dans des cas se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré ;
- Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine ;
- Interpréter les paramètres d'une fonction affine suivant l'allure de sa représentation graphique ;
- Modéliser un phénomène continu par une fonction ;
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire ;
- Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions en utilisant un ou plusieurs modes de représentation.

1.2 Une première approche des fonctions

Avant toute chose, il faudra introduire le mot “fonction” d'une façon qui permette à la fois d'en saisir le concept et de s'en servir efficacement. Voici une définition possible de la notion de fonction au collège :

Définition 1.1. Une fonction est un **processus** qui à un nombre fait correspondre un autre nombre.

Si f est le nom d'une fonction, et x un nombre, alors le nombre auquel f fait correspondre x est noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est *l'image* de x et que x est *un antécédent* de $f(x)$.

Remarque. À partir de ce moment s'engage un combat de longue haleine pour faire saisir la différence entre le fait qu'il n'y a qu'une seule image tandis qu'il peut y avoir plusieurs antécédente. La confusion mène à des erreurs à tous les niveaux du secondaire (et même au-delà).

La notion de processus est bien sûr vague, et il est préférable de la faire manipuler avant d'introduire cette définition. Voici un exemple d'exercice destiné à appréhender concrètement l'idée de fonction comme définie ci-dessus :

Exercice 1.2.1. *On considère un programme de calcul f qui fonctionne de la façon suivante :*

i) Choisir un nombre ;

ii) Élever ce nombre au carré ;

iii) Retrancher 5 au résultat.

1) *Vérifier qu'en choisissant le nombre 4, obtient à la fin le nombre 11.*
2) *On appelle* antécédent *par f le nombre de départ et* image *par f le nombre d'arrivée. Dire, en justifiant la réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*
   (a) *L'image de -2 par f est -1.*
   (b) *Un antécédent de 20 par f est -5.*
   (c) *Le nombre 20 n'a qu'un seul antécédent par f.*
3) *Quelle est l'image d'un nombre x quelconque par la fonction f ?*
4) *Le nombre -10 a-t-il un antécédent par f ?*

Correction. 1) Nous allons appliquer une par une les étapes du processus :

$$4 \rightsquigarrow 4^2 = 16 \rightsquigarrow 16 - 5 = 11.$$

Ainsi, le processus appliqué au nombre 4 mène bien au nombre 11 et la réponse est Vraie.

2) (a) Il nous faut suivre les étapes en partant de -2 :

$$-2 \rightsquigarrow (-2)^2 = 4 \rightsquigarrow 4 - 5 = -1.$$

On obtient -1, ce qui veut dire que l'image de -2 par f est -1 et la réponse est Vraie.

(b) Il nous faut suivre les étapes en partant de -5 :

$$-5 \rightsquigarrow (-5)^2 = 25 \rightsquigarrow 25 - 5 = 20.$$

Obtient 20, ce qui veut dire que -5 est un antécédent de 20 et la réponse est Vraie.

(c) On peut observer, dans le calcul précédent, qu'à cause du carré on aurait trouvé le même résultat en partant de 5 plutôt que de -5. Autrement dit, 5 est également un antécédent de 20 par f et la réponse est Fausse.

3) Partant du nombre x, on commence par l'élever au carré, ce qui nous donne le nombre x^2. Ensuite, on lui retranche 5, ce qui donne le nombre $x^2 - 5$. Ainsi, l'image de x par f est $x^2 - 5$.

4) Cherchons un antécédent potentiel de -10 et notons le x. D'après la question précédente, on devrait alors avoir $x^2 - 5 = -10$, ce qui donne $x^2 = -5$. Or un carré est toujours positif, donc -10 n'a pas d'antécédent.

■

Remarque. L'exercice tel qu'il est présenté ci-dessus est certainement assez difficile pour des élèves de collège et demande à être accompagné dans sa résolution. On pourrait par exemple suggérer de faire un schéma pour mieux visualiser le processus de calcul.

Pour mieux saisir l'aspect algorithmique du problème, il peut être intéressant dans un exercice comme celui-ci d'utiliser des outils numériques, par exemple :

- Un tableur (Excel, GeoGebra) pour calculer les images en utilisant une colonne pour chaque étape du processus ;
- Un programme informatique (Scratch) dans lequel les étapes du processus apparaîtront comme autant d'instructions ou de “boîtes”.

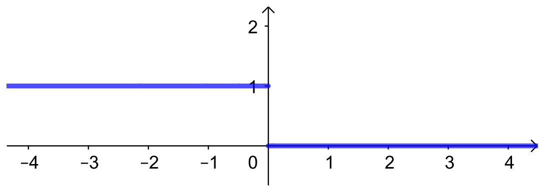
Cette approche permet de plus de faire un lien avec l'informatique. Attention toutefois ! En informatique, une fonction est un nom générique désignant un sous-programme (et même des fois abusivement un programme entier). En particulier, une fonction informatique peut avoir plusieurs arguments (pouvant être eux-mêmes des fonctions) ou n'en avoir aucun.

Comme l'illustre l'exercice précédent, la définition de fonction comme processus fait la part belle aux aspects algorithmique et calculatoire, mais laisse dans l'ombre l'aspect géométrique pourtant important, notamment dans l'étude des fonctions linéaires et affines. Il faut donc la compléter en introduisant la représentation graphique.

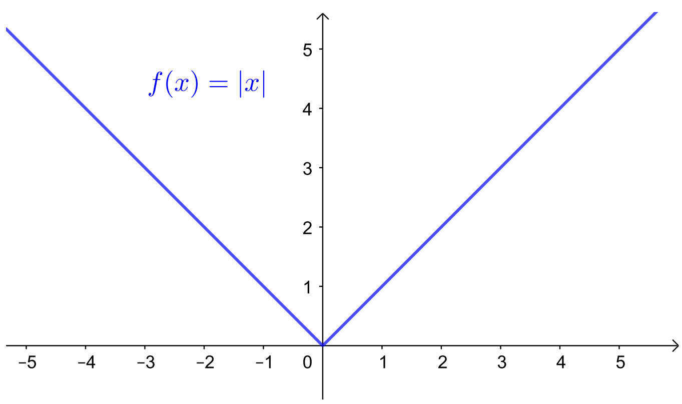
Définition 1.2. Soit f une fonction. Sa *représentation graphique* est la courbe constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x))$.

Remarque. Encore une fois, la définition est volontairement vague. Elle n'est cependant pas sans danger, en particulier à cause du terme “courbe”. Un élève curieux peut en effet assez facilement parvenir à des questions embarrassantes, par exemple :

- Construire des fonctions dont la représentation graphique ne mérite pas le nom de courbe, comme la fonction f qui renvoie 1 si le nombre x est négatif et 0 si le nombre x est positif ou nul.



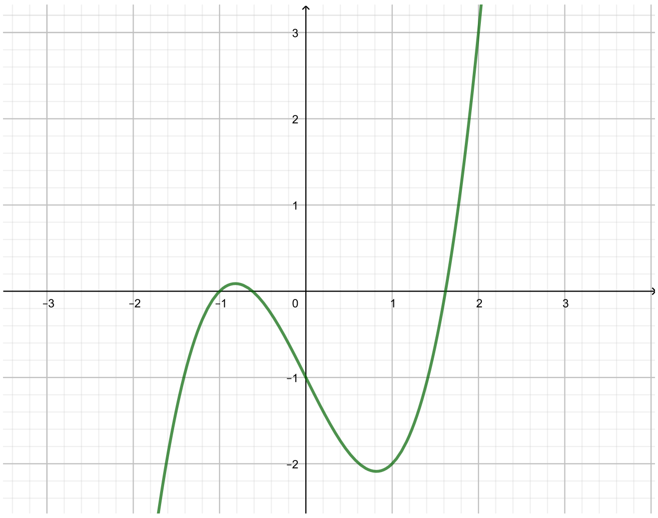
- Construire des fonctions dont la représentation graphique peut être appelée courbe mais n'est pas lisse et ne correspond donc pas forcément au sens commun du mot "courbe", comme la fonction valeur absolue.



Ce problème se clarifiera en fait partiellement au lycée quand les notions de continuité et de dérivabilité seront abordées.

La définition ci-dessus est intrinsèquement liée à la méthode de lecture graphique des images et des antécédents. Voici un exemple d'exercice mettant en jeu ces notions :

Exercice 1.2.2. *On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :*

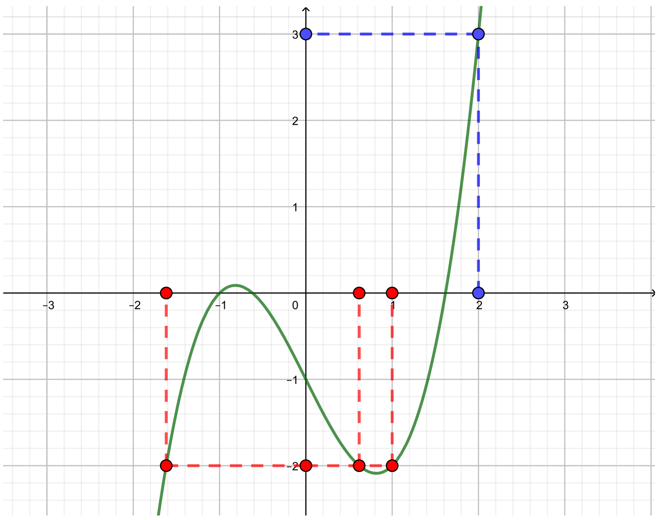


1) *Donner l'image de 2 par f.*

2) *Donner un antécédent de -1 par f.*

Correction. 1) On procède par lecture graphique de la façon suivante (indiquée par les traits bleus sur la figure) : on repère 2 sur l'axe des *abscisses*, puis on trace un trait *vertical* jusqu'à la courbe. On lit ensuite l'*ordonnée* de ce point et on obtient 3.

2) On procède par lecture graphique de la façon suivante (indiquée par les traits rouges sur la figure) : on repère -1 sur l'axe des *ordonnées*, puis on trace un trait *horizontal* jusqu'à la courbe. On lit ensuite l'abscisse de l'un des points et on obtient par exemple 0.



■

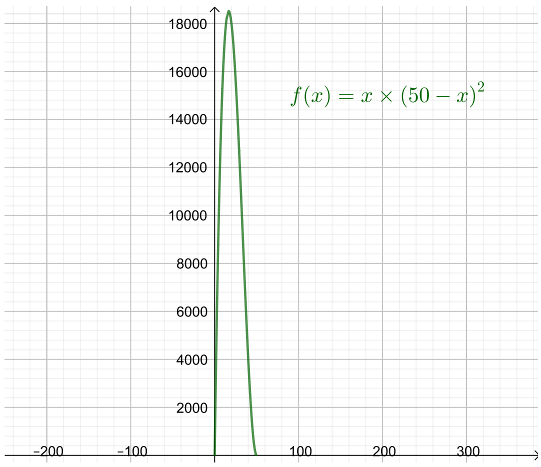
L'intérêt d'un tel exercice est d'appuyer (par la correction) l'aspect “méthodique” de la lecture graphique. Il met également en lumière, de façon très visuelle, la pluralité des antécédents. On peut aussi être plus ambitieux et proposer des problèmes ouverts comme le suivant :

Exercice 1.2.3. *On souhaite fabriquer des corbeilles en carton ouvertes à partir d'un carré de* 50cm *de côté en ôtant quatre carré de côté x à chaque coin du carton. Pour quelle valeur de x le volume de la corbeille sera-t-il maximal ?*

Correction. On exprimera toutes les longueurs en cm et les aires en cm^2. La base de la boîte obtenue sera un carré de côté $(50-x)$ tandis que sa hauteur sera égale à x. Ainsi, le volume V de la boîte en fonction de x est

$$V(x) = (50-x)^2 \times x.$$

Il est impossible pour un élève de collège de trouver le maximum d'une telle fonction, ni même de savoir ou de démontrer qu'un tel maximum existe. On peut cependant commencer par tracer la représentation graphique de cette fonction, en remarquant qu'elle est définie pour $0 \leqslant x \leqslant 50$:



Une première difficulté ici est de trouver une échelle des axes rendant le graphique lisible (ce que GeoGebra fait automatiquement avec la fonction `recadrer`). On observe alors qu'il semble y avoir un maximum pour une valeur de x entre 15 et 20. On peut affiner ce résultat en cherchant par balayage une approximation du maximum, disons, au mm près. En utilisant un tableur, on trouve 16,7 comme valeur approchée de x :

x	16	16,1	16,2	16,3	16,4	16,5
$V(x)$	18496	18502,28	18507,53	18511,75	18514,94	18517,13

x	16,6	16,7	16,8	16,9	17
$V(x)$	18518,3	18518,46	18517,63	18515,81	18513

■

À noter que ce problème répond également à l'objectif de modélisation par les fonctions.

1.3 Fonctions linéaires et affines

1.3.1 Fonctions linéaires

Au-delà de l'observation de fonctions données qui restent un peut mystérieuses, comme dans les exercices précédents, le collège est aussi l'occasion de découvrir et d'étudier les premières familles générales de fonctions. Cela commence avec les fonctions linéaires, pour une raison évidente : le lien avec la notion de proportionnalité !

Définition 1.3. Une fonction f est *linéaire* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé. Autrement dit, s'il existe un nombre a tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f.

Remarque. Les deux formulations de la définition sont utiles. La première donne l'idée de la notion, mais l'expression « nombre fixé » peut manquer de clarté dans l'esprit des élèves. C'est pourquoi il est important de la compléter par la reformulation qui est, elle, parfaitement rigoureuse.

Le lien mentionné avec la proportionnalité doit être mis en valeurs, par exemple sous la forme de propriétés.

> **Propriété 1.4** Si f désigne une fonction linéaire de coefficient directeur a, alors tout tableau de valeurs de f est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est a.

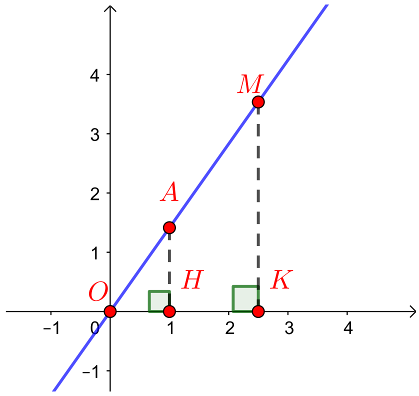
Démonstration. Par définition d'une fonction linéaire, la deuxième ligne d'un tableau de valeurs, qui est la ligne des images, s'obtient en multipliant la première ligne par a. C'est donc bien un tableau de proportionnalité. ■

Remarque. La réciproque est également vraie ! Si f est une fonction dont tout tableau de valeur est un tableau de proportionnalité de même coefficient de proportionnalité a, alors f est une fonction linéaire.

En plus des proportionnalités, les fonctions linéaires ont un lien fort avec la géométrie, via leur représentation graphique. Ce point est essentiel car, une fois généralisé aux fonctions affines, il est un outil important pour l'étude des droites dans le plan.

> **Théorème 1.5** Si f désigne une fonction linéaire, alors la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine et distincte de l'axe des ordonnées.
>
> Réciproquement, si f est une fonction dont la représentation graphique est une droite passant par l'origine distincte de l'axe des ordonnées, alors f est linéaire.

Démonstration. Considérons une fonction linéaire de coefficient directeur a et soit A le point du plan de coordonnées $(1, a)$. Comme $a = f(1)$, le point A appartient à la représentation graphique de f. Nous allons prouver que la représentation graphique de f est la droite (OA) (qui n'est pas l'axe des ordonnées car A a une abscisse non-nulle). Notons que si cette démonstration est hors programme, c'est en particulier parce qu'il n'est pas facile au collège de prouver que des points sont alignés. Ceci est néanmoins faisable en exploitant des outils de trigonométrie et de géométrie du plan. Pour cela, considérons un point M de la représentation graphique de f distinct de O et de A. Ses coordonnées s'écrivent $(x, f(x))$. Il nous faut montrer que les points O, A et M sont alignés. En notant H le point de coordonnées $(1, 0)$ et K le point de coordonnées $(x, 0)$, on peut considérer les triangles OAH et OMK. Ils sont tous les deux rectangles (en H et K respectivement).



La définition de la tangente d'un angle aigu donne alors

$$\tan(\widehat{AOH}) = \frac{HA}{OH} = \frac{a}{1} = \frac{ax}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{KM}{OK} = \tan(\widehat{MOK})$$

Ainsi, les droites (OA) et (OM) forment un même angle avec la droite $(OH) = (OK)$. Elles sont par conséquent parallèles. Comme elles ont de plus le point O en commun, elles sont confondues. Par conséquent, les points O, A et M sont alignés.

Réciproquement, considérons une fonction f dont la représentation graphique est une droite distincte de l'axe des ordonnées et soit A le point de la droite d'abscisse 1 (ce point existe parce que la droite n'est pas l'axe des ordonnées). On note a l'ordonnée de A. Soit M un point de la droite distinct de O et A. Ses coordonnées sont de la forme $(x, f(x))$. En utilisant les même notations qu'au début de la preuve, on a que les droites (HA) et (KM) sont parallèles car elles sont toutes deux orthogonales à l'axe des abscisses. Par conséquent [1], d'après le Théorème de Thalès (en notant que comme la droite n'est pas l'axe des ordonnées, les points H et K sont distincts de O),

$$\frac{x}{1} = \frac{OK}{OH} = \frac{MK}{AH} = \frac{f(x)}{a},$$

d'où

$$f(x) = a \times x.$$

Ainsi, f est une fonction affine de coefficient directeur a. ■

Remarque. La preuve n'est pas au programme. Elle est cependant intéressante puisqu'elle fait intervenir le Théorème de Thalès et permet donc de montrer que les divisions usuelles des mathématiques (algèbre/géométrie/analyse) sont d'ordre pédagogique mais que tout est en réalité lié.

Même si la preuve n'est pas faite en cours, il est important de mentionner la façon de retrouver le coefficient directeur à partir de la représentation graphique :

> **Propriété 1.6** Soit f une fonction linéaire et soit A un point de sa représentation graphique distinct de l'origine. Si les coordonnées de A sont (x, y), alors le coefficient directeur de f est
>
> $$a = \frac{y}{x}.$$
>
> Autrement dit, c'est la *pente* de la droite.

1. Nous n'avons envisagé ici qu'un seule des configurations possibles des points O, A et M. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la preuve fonctionne également dans les autres cas.

Démonstration. Par définition, si (x, y) sont les coordonnées d'un point de la représentation graphique de f, alors $y = f(x)$. Si a est le coefficient directeur de f, on sait que $f(x) = a \times x$, d'où (puisque $x \neq 0$)

$$a = \frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x}.$$

■

Voici un exemple d'exercice permettant de mettre en jeu les divers aspects des fonctions linéaires :

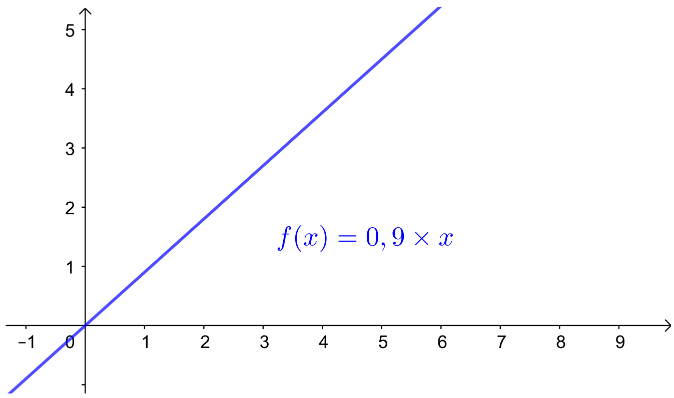
Exercice 1.3.1. *Collées sur une vitrine, de grandes affiches annoncent une réduction de* 10% *sur toute une boutique.*

1) *Soit x le prix d'un produit en euros, exprimer le prix* $p(x)$ *du même produit après le réduction.*
2) *À l'aide d'un outil informatique, tracer la représentation graphique de la fonction p.*
3) *Une jupe coûtait* 50 € *avant la réduction. Combien coûte-t-elle après ?*
4) *Un pantalon coûte* 27 € *avec la réduction. Combien coûtait-il avant ?*

Correction. 1) Réduire de 10%, c'est multiplier par 0,9. Ainsi,

$$p(x) = 0,9 \times x$$

2) Voici un tracé obtenu avec GeoGebra :



3) On cherche l'image de 50 par la fonction p qui s'obtient donc en multipliant par 0,9 :

$$p(50) = 50 \times 0,9 = 45.$$

Ainsi, la jupe coûte maintenant 45 euros.

4) On cherche un antécédent de 27 par p. Un tel nombre x doit vérifier

$$0,9 \times x = p(x) = 27,$$

donc

$$x = \frac{27}{0,9} = 30.$$

Ainsi, le pantalon coûtait initialement 30 euros.

■

Remarque. Cet exercice peut être l'occasion d'insister sur le fait que le calcul littéral permet d'obtenir les résultats exacts, tandis qu'une simple lecture graphique ne donnera jamais qu'une réponse approximative.

Remarque. Un point qui peut sembler anodin dans cet énoncé, mais qui est en fait important, est que la fonction ne s'appelle pas f mais p. Ceci peut perturber les élèves, mais il est indispensable de savoir jongler entre les notations et ce qu'elles représentent. Il est donc bon d'exposer les élèves à diverses notations pour les fonctions dès le collège.

1.3.2 Fonctions affines

La notion de fonction linéaire se généralise à celle de fonction affine. Cette dernière n'est, en soi, pas plus difficile que la première. Mais elle représente souvent un saut conceptuel important pour les élèves.

Définition 1.7. Une fonction f est *affine* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé, puis en ajoutant un second nombre fixé. Autrement dit, s'il existe deux nombres a et b tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x + b.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f et le nombre b est appelé *l'ordonnée à l'origine* de la fonction f.

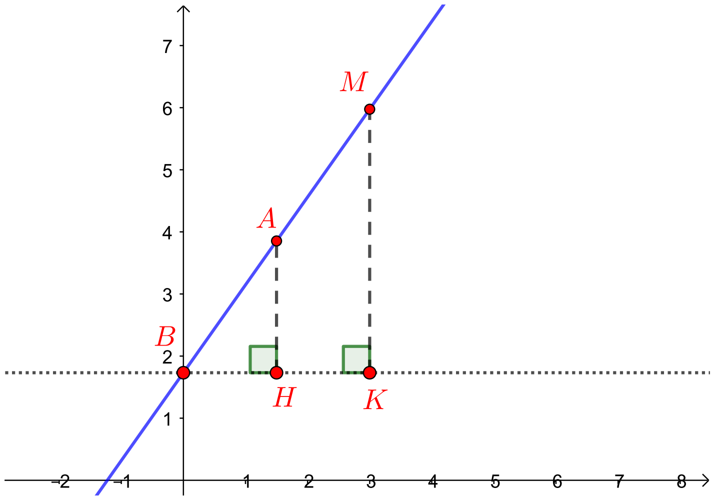
Remarque. Cette définition est calquée sur celle de fonction linéaire, même si la version informelle est moins claire dans ce cas. Donner les dénominations techniques de a et b n'est certes pas nécessaire à ce stade, mais cela peut aider les élèves à deviner intuitivement le lien avec la représentation graphique.

Les fonctions affines, dans la définition ci-dessus, généralisent les fonctions linéaires du point de vue de l'expression formelle. Il est donc naturel de se demander comment elles les généralisent du point de vue géométrique.

Théorème 1.8 Si f désigne une fonction affine, alors la représentation graphique de f est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Réciproquement, si f est une fonction dont la représentation graphique est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, alors f est affine.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du cas affine. Considérons une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine B, soit A le point du plan de coordonnées $(1, a)$ et soit B le point du plan de coordonnées $(0, b)$. Comme $a = f(1)$ et $b = f(0)$, les points A et B appartiennent à la représentation graphique de f. Nous allons prouver que la représentation graphique de f est la droite (BA), qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées puisque les points A et B ont des abscisses différentes. Pour cela, considérons un point M de la représentation graphique de f distinct de A et de B. Ses coordonnées s'écrivent $(x, f(x))$. Il nous faut montrer que les points B, A et M sont alignés. En notant H le point de coordonnées $(1, b)$ et K le point de coordonnées (x, b), on peut considérer les triangles BAH et BMK. Ils sont tous les deux rectangles (en H et K respectivement).



La définition de la tangente d'un angle aigu donne alors

$$\tan(\widehat{ABH}) = \frac{HA}{BH} = \frac{a}{1} = \frac{ax}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{KM}{BK} = \tan(\widehat{MBK})$$

Ainsi, les droites (BA) et (BM) forment un même angle avec la droite $(BH) = (BK)$. Elles sont par conséquent parallèles. Comme elles ont de plus le point B en commun, elles sont confondues. Par conséquent, les points B, A et M sont alignés.

Réciproquement, considérons une fonction f dont la représentation graphique est une droite, soit A le point de la droite d'abscisses 1 et soit B le point de la droite d'abscisse 0 (l'existence de ces points provient du fait que la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées). On note a l'ordonnée de A et b l'ordonnée de B. Soit M un point de la droite distinct de A et B. Ses coordonnées sont de la forme $(x, f(x))$. En utilisant les même notations qu'au début de la preuve, on a que les droites (HA) et (KM) sont parallèles car elles sont toutes deux orthogonales à la droite $(BH) = (BK)$. Par conséquent [2], d'après le THÉORÈME DE THALÈS (en notant que comme la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, les points H et K sont distincts de O),

$$\frac{x}{1} = \frac{BK}{BH} = \frac{MK}{AH} = \frac{f(x) - b}{a - b},$$

d'où $f(x) - b = (a - b) \times x$ et finalement

$$f(x) = (a - b) \times x + b.$$

Ainsi, f est une fonction affine de coefficient directeur $a - b$ et d'ordonnée à l'origine b. ■

On remarquera que contrairement au cas des fonctions linéaires, il n'existe pas de critère simple permettant de repérer une fonction affine à partir d'un tableau de valeurs. Il est cependant possible, si l'on sait que la fonction est affine, de trouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine à partir d'un tableau de valeurs.

PROPRIÉTÉ 1.9 Si f est une fonction affine et si x_1 et x_2 sont deux nombres distincts, alors le coefficient directeur a de f est donné par

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. Nous n'avons encore une fois envisagé ici qu'un seule des configurations possibles des points B, A et M. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la preuve fonctionne également dans les autres cas.

et l'ordonnée à l'origine est donnée par

$$b = f(x_1) - a \times x_1 = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_1.$$

Démonstration. Par définition, $f(x) = a \times x + b$, donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{(a \times x_2 + b) - (a \times x_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \times x_2 - a \times x_1}{x_2 - x_1} \\ & \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a. \end{aligned}$$

De même,

$$f(x_1) - a \times x_1 = (a \times x_1 + b) - a \times x_1 = b.$$

■

Remarque. Cette propriété est importante, parce qu'elle permet d'introduire sans le nommer le *taux d'accroissement*, qui sera central dans l'étude de la notion de dérivée. Elle permet aussi de comprendre pourquoi le coefficient directeur apparaissant dans le preuve du Théorème 1.8 est $b - a$ et non pas a.

À nouveau, les questions de prix offrent des possibilités d'exercices assez complets sur le sujet. En voici un exemple :

Exercice 1.3.2. *Dans un magasin, une cartouche d'encre coûte* 15 €*. La même cartouche coûte* 10€ *sur internet, mais avec des frais de livraison fixes de* 40 € *quelque soit le nombre de cartouches achetées.*

1) *Compléter le tableau suivant (les prix sont exprimés en euros) :*

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	40
Prix à payer en magasin		75		
Prix à payer sur internet		90		

2) *On note x le nombre de cartouches achetées.*

   (a) *On note $P_m(x)$ le prix de x cartouches achetées en magasin. Exprimer $P_m(x)$ en fonction de x.*

   (b) *On note $P_i(x)$ le prix de x cartouches achetées sur internet. Exprimer $P_i(x)$ en fonction de x.*

3) *Dans un repère orthogonal dont on choisira soigneusement les unités, tracer les droites (d) et (d') représentatives respectivement des fonctions $x \mapsto 15 \times x$ et $x \mapsto 10 \times x + 40$.*

4) *En utilisant le graphique précédent,*

   (a) *Déterminer le mode d'achat le plus avantageux pour un lot de* 6 *cartouches. On laissera apparents les traits de construction.*

   (b) *Déterminer le mode d'achat permettant d'obtenir le plus de cartouches pour* 80 €*. On laissera apparents les traits de construction.*

5) *À partir de combien de cartouches le prix sur internet est-il inférieur au prix en magasin ? Justifier la réponse.*

Correction. 1) Voici le tableau complété :

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	40
Prix à payer en magasin	20	75	165	600
Prix à payer sur internet	60	90	150	440

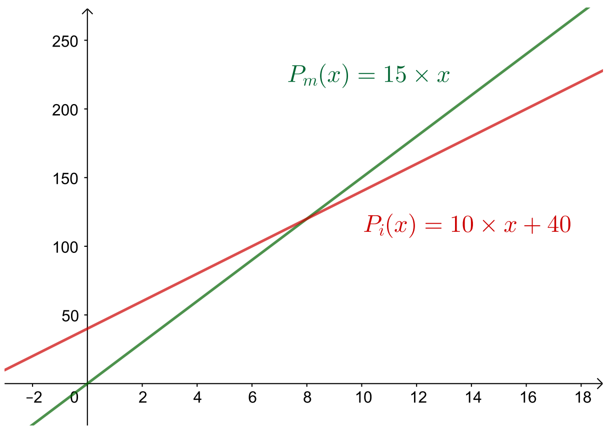
2) (a) Chaque cartouche coûte 15 €, il suffit donc de multiplier x par 15, autrement dit

$$P_m(x) = 15 \times x.$$

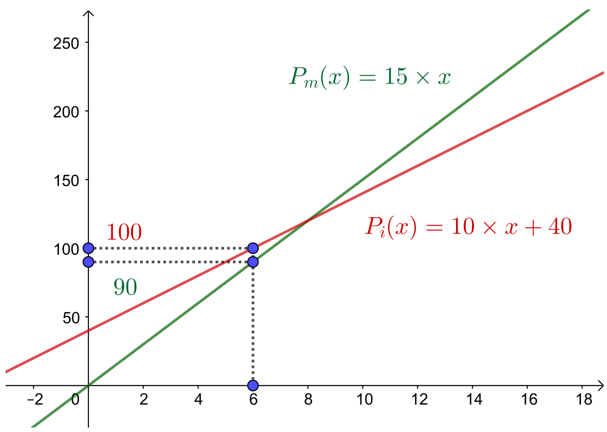
(b) Chaque cartouche coûte 10 €, il faut donc multiplier x par 10. Puis il faut ajouter les 40 € de frais de livraison. Autrement dit,

$$P_i(x) = 10 \times x + 40.$$

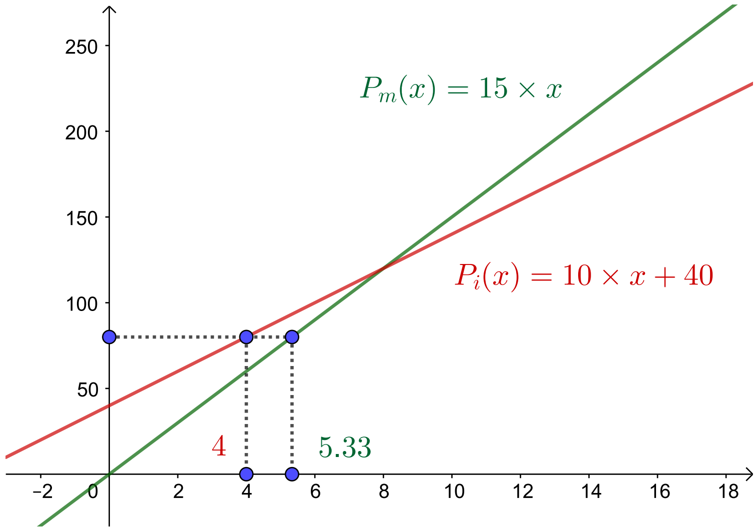
3) Voici la figure avec des axes pour lesquels une unité suivant l'axe des abscisses correspond à vingt-cinq unités suivant l'axe des ordonnées :



4) (a) On part du point 6 sur l'axe des abscisses, puis on remonte jusqu'aux droites pour lire l'ordonnée des points d'intersection. On trouve 100 pour la droite représentative de P_i et 90 pour celle de P_m. Par conséquent, il est plus intéressant d'acheter les cartouches en magasin.



(b) On part du point 80 sur l'axe des ordonnées, puis on avance horizontalement jusqu'aux droites pour lire l'abscisse des points d'intersection. On trouve 4 pour la droite représentative de P_i et un nombre compris entre 5 et 6 pour celle de P_m. Ainsi, il vaut mieux aller au magasin, où l'on pourra acheter cinq cartouche pour ce prix alors qu'on n'en aurait que quatre sur internet.



5) Le nombre de cartouches à partir duquel il est plus intéressant d'acheter sur internet est l'abscisse du point d'intersection des deux droites, c'est-à-dire 8. On peut d'ailleurs vérifier que
$$P_m(8) = 120 = P_i(8).$$

■

On pourrait aussi envisager des exercices faisant apparaître les fonctions affines à partir de problèmes géométriques.

CHAPITRE 2

SECONDE

2.1 Le programme

Le programme de mathématiques de seconde s'organise en cinq parties, dont l'une est entièrement consacrée aux fonctions. Cette dernière se subdivise en trois sous-parties dont nous suivrons l'ordre dans la suite.

(1) Se constituer un répertoire de fonctions de références : fonctions carré, cube, racine carré et inverse.
Contenus

- Définition ;
- Courbe représentative ;

Capacités attendues

- Tableau de variation ;
- Savoir comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement ;
- Savoir résoudre algébriquement ou graphiquement l'équation $f(x) = k$ et l'inéquation $f(x) < k$.

(2) Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions.
Contenus

- Fonction définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles ;
- Courbe représentative ;
- Notion de fonction paire et impaire ;

Capacités attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées ;
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques ou d'autres disciplines ;
- Résoudre une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation du type $f(x) < k$ en choisissant la méthode adaptée : graphique, algébrique ou logicielle.
- Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique l'équation $f(x) = g(x)$ ou l'inéquation $f(x) < g(x)$.

(3) Étudier les variations et les extrema des fonctions.
Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et tableau de variations ;
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle ;
- Variations des fonctions affines et interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement ;
- Variations des fonctions de référence.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations ;
- Déterminer graphiquement les extrema d'une fonction sur un intervalle ;
- Exploiter un outil numérique pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule ;
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Ces points ne sont pas du tout indépendants, bien au contraire ! Chaque notion ou outil doit être appliqué à titre d'illustration aux fonctions de références, dont font également partie les fonctions linéaires et affines vues au collège.

2.2 Fonctions de référence

Notons tout d'abord un point très important du point de vue conceptuel. Au collège, une fonction était une procédure s'appliquant a priori à n'importe quel nombre. En Seconde, la définition se précise puisque l'on va considérer des fonctions qui n'ont pas de sens pour tout réel. On introduit donc la notion d'*ensemble de définition*. Le terme "ensemble" est ici à comprendre au sens des "ensemble de nombres" introduits en Seconde.

Définition 2.1. L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Dans cette définition, l'expression « on peut calculer » doit être comprise de façon intuitive, mais ne pose normalement pas de problème dans le cadre du lycée. On en profite pour introduire la notation :

$$f : D \to \mathbf{R},$$

où D est l'ensemble de définition de la fonction f.

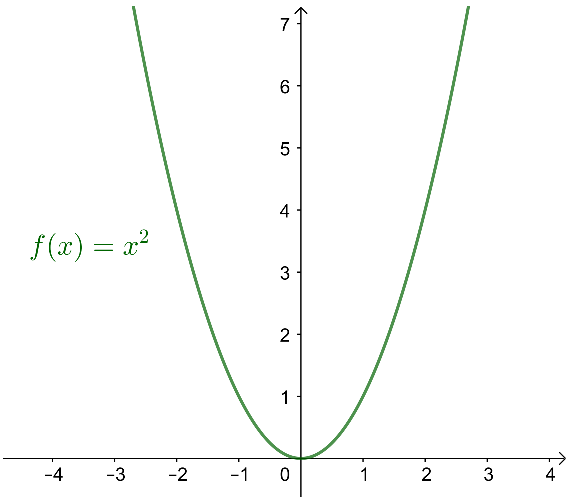
Rien de mieux que des exemples pour illustrer une nouvelle notion. C'est donc le bon moment pour introduire les nouvelles fonctions de référence.

Définition 2.2. On définit les nouvelles fonctions de référence suivantes :

- La *fonction carrée* est la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

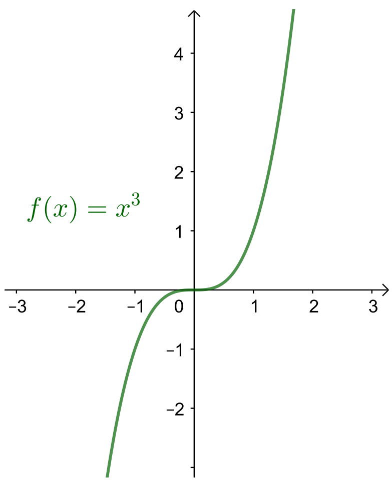
Voici sa représentation graphique :



- La *fonction cube* est la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x^3.$$

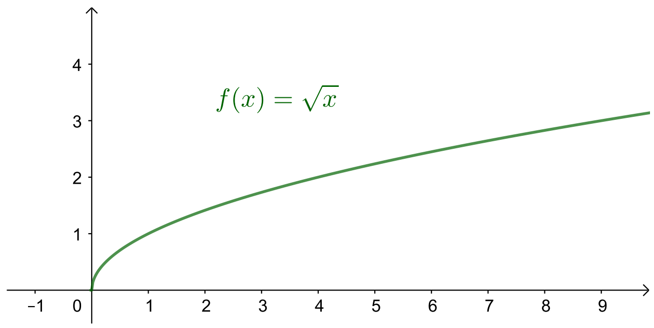
Voici sa représentation graphique :



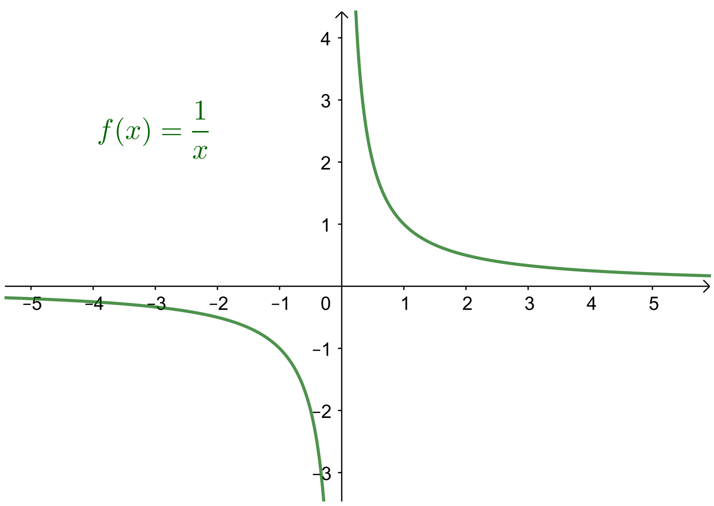
- La *fonction racine carrée* est la fonction $f : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Voici sa représentation graphique :



- La *fonction inverse* est la fonction $f :]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ définie par
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$
Voici sa représentation graphique :

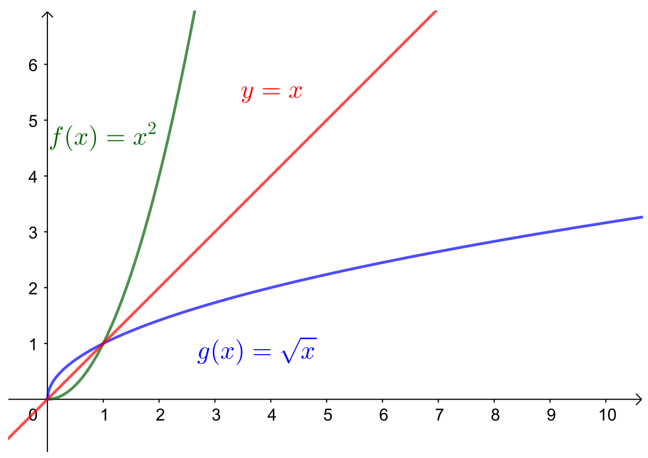


Les restrictions sur les ensembles de définition des fonctions racine carrée et inverse se justifient très bien algébriquement. Cette explication peut se compléter par l'observation de leurs représentations graphiques. D'ailleurs, cette observation montre un similarité entre les courbes représentatives des fonctions carré et racines carrées qui traduit l'idée qu'il s'agit d'opérations inverses l'une de l'autre (c'est-à-dire que ce sont des fonctions *réciproques*).

Propriété 2.3 La courbe représentative de la fonction racine carrée est la symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de la courbe représentative de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$.

Démonstration. Soit M un point de la courbe représentative de la fonction carré sur $\mathbf{R}^+$. Ses coordonnées sont donc de la forme (x, x^2) avec $x \geqslant 0$. En posant $y = \sqrt{x}$, ces coordonnées deviennent $(\sqrt{y}, y)$. Le symétrique M' de M par rapport à la première bissectrice des axes a donc pour coordonnées $(y, \sqrt{y})$, qui appartient bien à la courbe représentative de la fonction racine carrée.

Réciproquement, soit N est un point de la courbe représentative de la fonction racine carrée de coordonnées $(y, \sqrt{y}$ avec $y \geqslant 0$. Alors en posant $x = y^2$, le symétrique de N par rapport à la première bissectrice des axes a pour coordonnées $(\sqrt{y}, y) = (x, x^2)$, qui appartient bien à la courbe représentative de la fonction carré. ∎



Les propriétés de ces fonctions seront détaillées comme exemples des définitions générales, mais rien n'empêche de les aborder par le biais d'exercices pour familiariser les élèves avec ces objets. Par exemple :

Exercice 2.2.1. *Soit f la fonction carré.*

1) *Pour deux nombres réels a et b, comparer $f(a)$ et $f(b)$.*
2) *Résoudre l'équation $f(x) = k$, où k est un nombre réel.*
3) *Résoudre l'inéquation $f(x) < k$, où k est un nombre réel.*

Correction. 1) Telle quelle, la question peut être difficile pour des élèves de secondes. On peut ajouter une indication suggérant de considérer la différence $f(b) - f(a)$. En effet, on a une identité remarquable

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

On constate alors que $f(b) \geqslant f(a)$ si et seulement si

- Soit $b \geqslant -a$ et $b \geqslant a$, c'est-à-dire $b \geqslant |a|$;
- Soit $b \leqslant -a$ et $b \leqslant a$, c'est-à-dire $b \leqslant -|a|$.

Ces deux conditions ensembles peuvent s'écrire $|b| \geqslant |a|$.

2) Il faut distinguer suivant le signe de k :
   - Si $k < 0$, comme tout carré est positif, il n'y a pas de solution ;
   - Si $k > 0$, les solutions sont $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.

3) Il faut distinguer suivant le signe de k :
   - Si $k < 0$, comme tout carré est positif, il n'y a pas de solution ;
   - Si $k > 0$, il suit des deux première questions que $f(x) < k$ si $|x| < |\sqrt{k}|$. Les solutions sont donc l'intervalle $]-\sqrt{k}; \sqrt{k}[$.

■

Remarque. Cet exercice est difficile, il ne faut donc pas hésiter à l'adapter ou à le développer. Il est intéressant car il fait travailler beaucoup d'outils et de notions (identités remarquables, valeur absolue, racine carrée).

Le programme suggère également de comparer les fonctions de référence entre elles, notamment via une démonstration [1]. Voici une possibilité pour inclure cet élément sous forme de problème ouvert :

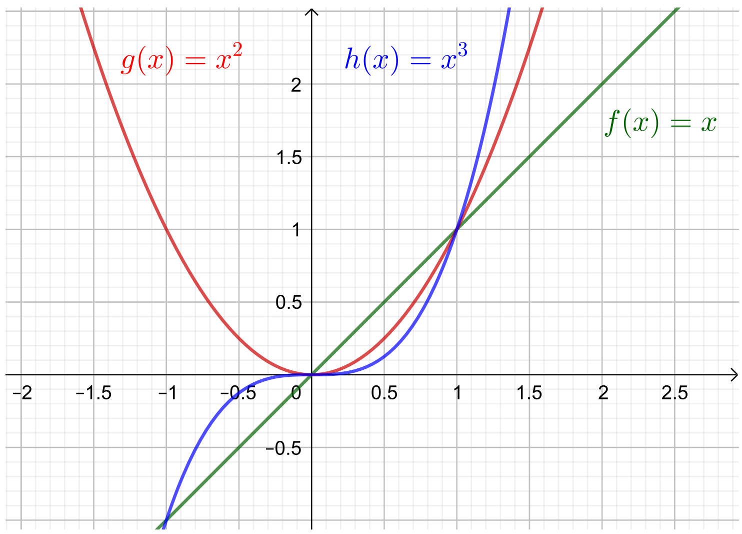
Exercice 2.2.2. *On considère les trois fonctions* $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$f(x) = x,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = x^3.$$

1) Déterminer graphiquement la position relative des courbes représentatives de ces fonctions.

2) Démontrer le résultat précédent en utilisant les expressions des fonctions.

Correction. 1) Voici un graphique comprenant les courbes représentatives des trois fonctions :



On voit donc qu'il y a quatre possibilités :

- Si $x \leqslant -1$, alors $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$;
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$;
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$;
- Si $1 \leqslant x$, alors $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;

2) Commençons par comparer les fonctions f et g. On a

$$g(x) - f(x) = x^2 - x = x(x-1).$$

On peut établir un tableau de signes pour déterminer le signe de cette expression :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Le programme n'est pas limpide sur ce point, la démonstration est-elle exigée, recommandée, conseillée, suggérée ? Elle n'est en tout cas pas exigible des élèves.

Comparons maintenant f et h. On a

$$h(x) - f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

On peut établir un tableau de signes utilisant le précédent pour déterminer le signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Comparons enfin g et h. On a

$$h(x) - g(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$

Ici, pas besoin de tableau de signe puisque x^2 est toujours positif. Ainsi, $h(x) \geqslant g(x)$ si et seulement si $x \geqslant 1$.

■

2.3 Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions

Dans cette section se trouvent les éléments du programme qui concernent l'étude des fonctions, soit à partir de leur représentation graphique soit à partir de leur expression algébrique. Il s'agit d'étendre progressivement les notions abordées au collège. Nous avons par exemple déjà vu la notion d'ensemble de définition. On précise également l'idée de "courbe" avec la définition suivante :

Définition 2.4. La *courbe représentative* d'une fonction f est la courbe d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. Cette courbe est souvent notée $\mathcal{C}_f$.

Remarque. Cette définition n'apporte en soi rien pour les applications concrètes, mais permet d'une part de relier directement la notion de courbe à celle de fonction (c'est par exemple ainsi que sera défini dans le supérieur un *arc paramétré*, qui est une notion rigoureuse de courbe) et elle introduit l'équation $y = f(x)$ en toute généralité. Elle suggère de plus directement l'approche graphique pour l'étude de telles équations.

Nous avons déjà vu dans le cas des fonctions de référence qu'il était possible de résoudre des équations et des inéquations à l'aide de la représentation graphique. Pour aller plus loin dans cette direction, on peut introduire les notions de fonction paire ou impaire.

Définition 2.5. Une fonction f est *paire* si pour tout x dans son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition et

$$f(-x) = f(x).$$

Une fonction f est *impaire* si pour tout x dans son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition et

$$f(-x) = -f(x).$$

Une telle définition doit s'accompagner de son interprétation graphique :

Propriété 2.6 Considérons une fonction f. Alors,

1) f est paire si et seulement si la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;

2) f est impaire si et seulement si la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration. 1) Notons σ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et rappelons que si M est un point de coordonnées (x, y), alors son image $\sigma(M)$ a pour coordonnées $(-x, y)$. Supposons f paire et considérons un point M de coordonnées $(x, f(x))$ de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Comme $f(-x) = f(x)$, le point de coordonnées $(-x, f(x))$ appartient également à $\mathcal{C}_f$. Or, il s'agit de $\sigma(M)$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si x est dans l'ensemble de définition de f, alors le point M de coordonnées $(x, f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Il en est donc de même du point $\sigma(M)$ de coordonnées $(-x, f(x))$. Par conséquent, $-x$ appartient au domaine de définition de f et $f(-x) = f(x)$.

2) Notons s la symétrie de centre l'origine, et rappelons que si M est un point de coordonnées (x, y), alors son image $s(M)$ a pour coordonnées $(-x, -y)$. Supposons f impaire et considérons un point M de coordonnées $(x, f(x))$ appartenant à $\mathcal{C}_f$. Comme $f(-x) = -f(x)$, le point de coordonnées $(-x, -f(x))$ appartient également à $\mathcal{C}_f$. Or, il s'agit de $s(M)$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. Si x est dans l'ensemble de définition de f, alors le point M de coordonnées $(x, f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Il en est donc de même du point $s(M)$ de coordonnées $(-x, -f(x))$. Par conséquent, $-x$ appartient au domaine de définition de f et $f(-x) = -f(x)$.

■

Remarque. Encore une fois, cette propriété illustre les interactions entre les fonctions et d'autres chapitres du programme comme la géométrie du plan (symétrie axiale et symétrie centrale).

À titre d'exemples, les fonctions de références sont bien sûr à considérer. Cela peut se faire sous la forme d'un exercice, qui sera aussi l'occasion d'insister sur l'importance de l'ensemble de définition.

Exercice 2.3.1. *Déterminer, parmi les fonctions de référence, lesquelles sont paires et lesquelles sont impaires.*

Correction. Traitons les fonctions de référence dans l'ordre de leur définition.

- La fonction carrée est définie pour tout nombre x. De plus,

$$(-x)^2 = x^2,$$

donc c'est une fonction paire.

- La fonction cube est définie pour tout nombre x. De plus,

$$(-x)^3 = -x^3,$$

donc c'est une fonction impaire.

- La fonction racine carrée n'est définie que pour x positif. En particulier, si x est dans l'ensemble de définition alors $-x$ n'y est pas. Par conséquent, cette fonction n'est ni paire ni impaire.

- La fonction inverse est définie pour tout nombre non-nul. En particulier, si x est dans l'ensemble de définition alors $-x$ également. De plus,

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x},$$

donc c'est une fonction impaire.

■

Au-delà de ce bagage théorique, les capacités attendues en seconde concernent surtout la résolution d'équations et d'inéquations à l'aide de fonctions, soit graphiquement soit en utilisant d'un logiciel. Il est en fait difficile (et au fond probablement peut souhaitable) de tenter de formaliser toutes les méthodes de résolution. Il vaut mieux travailler sur des exemples. Voici donc simplement quelques éléments de réflexion :

- Les équations de la forme $f(x) = k$ peuvent se résoudre explicitement quand f est une des fonctions de référence, comme dans l'exercice 2.2.1. Il est important de le faire remarquer aux élèves qui peuvent être tentés de croire que la méthode graphique est la seule méthode disponible.

- Dans le même ordre d'idée, on peut facilement produire des situations où la méthode graphique ne permet pas d'obtenir la solution exacte alors que le calcul direct le peut (par exemple $x^2 = 2$).

- Les inéquations peuvent être résolues explicitement quand elles font intervenir des fonctions de référence ou quand elles se ramènent à une forme factorisée qui permet d'établir un tableau de signe (comme dans l'exercice 2.2.2).

- La recherche algorithmique de solution approchée est l'occasion d'aborder la *méthode par dichotomie*. Cela permet d'un part de faire le lien avec l'outil informatique, d'autre part de faire sentir la valeur “théorique” de cette méthode : c'est avec elle qu'on démontre le Théorème des Valeurs Intermédiaires (voir Théorème 4.25)! Il ne faut cependant pas oublier la *méthode par balayage*, qui a aussi son intérêt.

Voici un exemple de recherche de solution approchée par dichotomie :

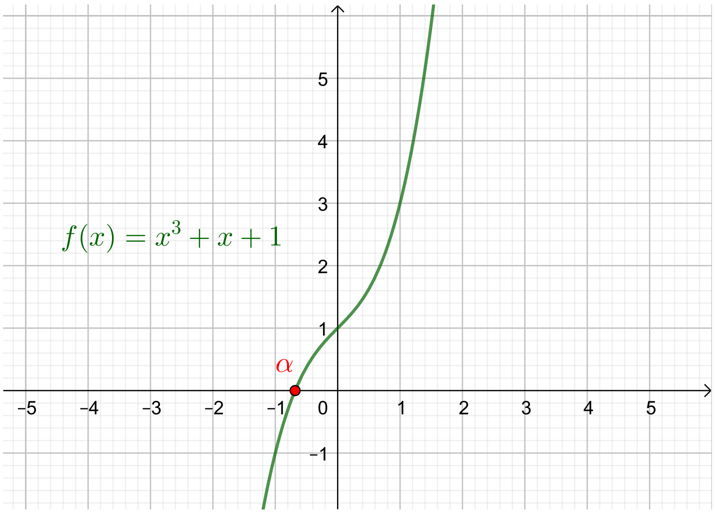
Exercice 2.3.2. *On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par*

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

1) *À l'aide de la courbe représentative de f,expliquer pourquoi f ne s'annule qu'une seule fois en un point noté α. Déterminer graphiquement un entier n tel que $n < \alpha < n+1$.*

2) *En utilisant un programme, obtenir une valeur approchée à $0,01$ près de α.*

Correction. 1) Voici la représentation graphique de f obtenue avec GeoGebra :



On observe sur cette représentation que f est croissante et qu'elle coupe exactement une fois l'axe des abscisses. Ceci signifie que f ne s'annule qu'une seule fois. On observe également que $-1 < \alpha < 0$.

2) Nous appliquons un algorithme de recherche par dichotomie, en partant des points -1 et 0. Voici par exemple l'algorithme en Python :

```
def f(x):
   return x**3+x+1
A=-1
B=0
E=0.01
while B-A>=E :
   C=(A+B)/2.
   if f(A)*f(C)<=0 :
      B=C
   else :A=C
alpha=round(A,2)
print(alpha)
```

■

2.4 Variations et extrema

Cette troisième partie du programme constitue en un sens (avec la notion de parité) la première approche *globale* des fonctions, par opposition à l'approche *ponctuelle* du calcul d'images et d'antécédents. Nous allons commencer par le sens de variation, qui nécessite une remarque préliminaire très importante : cette notion n'a de sens ici que pour une fonction définie sur un intervalle ! Cette subtilité est souvent source de difficulté et de confusion pour les élèves. La fonction inverse peut être un exemple utile pour faire comprendre le problème.

Définition 2.7. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite

- *Croissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$;
- *Décroissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$;
- *Monotone* sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Il est bien sûr essentiel de donner des exemples aussi bien de fonctions monotones que de fonctions non-monotones. Les fonctions de référence sont pour cela parfaitement adaptées.

Exercice 2.4.1. *Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quels intervalles elle est monotone :*

1) *La fonction carré ;*
2) *La fonction racine carrée ;*
3) *La fonction inverse.*
4) *On considère deux réels a et b,*
   (a) *Montrer que*
   $$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2).$$
   (b) *En déduire les variations de la fonction cube. On pourra distinguer suivant que a et b sont ou non de même signe.*

Correction. 1) Notons f la fonction carré. Nous avons vu dans l'exercice 2.2.1 que $f(b) \geqslant f(a)$ si et seulement si $|b| \geqslant |a|$. En particulier, si a et b sont positifs, alors cela signifie que pour $b \geqslant a$, $f(b) \geqslant f(a)$. Ainsi, f est croissante sur $[0;+\infty[$. Si maintenant a et b sont négatifs, alors $|b| \geqslant |a|$ signifies $b \leqslant a$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;0]$.

2) Notons g la fonction racine carrée. Soient a et b des réels positifs. Alors,
$$g(b) - g(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \geqslant 0.$$
Ainsi, la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

3) Notons h la fonction inverse. Soient a et b des réels de même signe strict, de sorte que $ab > 0$, et tels que $b \geqslant a$. Alors,
$$h(b) - h(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} \leqslant 0.$$
Ainsi, la fonction inverse est décroissante à la fois sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

4) (a) Il suffit de développer et de réduire le membre de droite :
$$(b-a)(b^2+ab+a^2) = b^3 + ab^2 + ba^2 - ab^2 - a^2b - a^3 = b^3 - a^3.$$
   (b) Notons k la fonction cube et soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si a et b sont de même signe, alors $ab \geqslant 0$, donc
$$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2) \geqslant 0$$
   donc $k(b) \geqslant k(a)$. Si a et b sont de signes différents, alors $a \leqslant 0$ donc $k(a) = a^3 \leqslant 0$ tandis que $b \geqslant 0$ donc $k(b) = b^3 \geqslant 0$. Ainsi, on a encore $k(b) \geqslant k(a)$. En conclusion, la fonction k est croissante sur $\mathbf{R}$.

■

Les fonctions affines sont aussi des fonctions de référence et leur sens de variation s'interprète facilement à l'aide de leur coefficient directeur. Pour le prouver, il est pratique d'introduire le lien avec le taux d'accroissement. Rappelons qu'un taux d'accroissement d'une fonction f est une quantité de la forme
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Propriété 2.8 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors, f est croissante si et seulement si tous ses taux d'accroissements sont positifs et elle est décroissante si et seulement si tous ses taux d'accroissement sont négatifs.

Démonstration. Supposons f croissante. Si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0.$$

De même, si $a > b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ donc le taux d'accroissement est également positif. Réciproquement, supposons que tous les taux d'accroissement de f sont positifs. Alors, quels que soient a et b dans I tels que $a < b$,

$$f(b)-f(a) = (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$$

donc f est croissante.

Supposons f décroissante. Si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0.$$

De même, si $a > b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ donc le taux d'accroissement est également négatif. Réciproquement, supposons que tous les taux d'accroissement de f sont négatifs. Alors, quels que soient a et b dans I tels que $a < b$,

$$f(b)-f(a) = (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0$$

donc f est décroissante. ■

Nous pouvons maintenant en déduire le cas des fonctions affines :

Propriété 2.9 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction affine, définie par $f(x) = a \times x + b$. Alors,

- f est croissante si et seulement si $a \geqslant 0$;
- f est décroissante si et seulement si $a \leqslant 0$;
- f est constante si et seulement si $a = 0$.

Démonstration. Nous avons déjà démontré que tous les taux d'accroissement de f sont égaux au coefficient directeur a. Le résultat suit donc de la **Propriété** 2.8. ■

Pour résumer les variations d'une fonction, on introduit le *tableau de variations*, qui sera un outil essentiel dans l'étude des fonctions. Plutôt qu'une définition abstraite, cette notion s'assimile par des exemples, à commencer par les fonctions de références [2] :

- Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2. Nous incluons ici les limites, bien qu'elles ne soient pas vues en seconde, afin d'avoir un tableau de variations complet pour mémoire.

- Le tableau de variations de la fonction cube est :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Le tableau de variations de la fonction racine carrée est

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Le tableau de variations de la fonction inverse est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Le tableau de variations permet de faire "apparaître" assez naturellement les extrema locaux d'une fonction, et donc de motiver leur définition :

Définition 2.10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un maximum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I,
$$f(x) \leqslant f(a);$$
- On dit que f admet un minimum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I,
$$f(x) \geqslant f(a);$$
- On dit que f admet un extremum en un nombre a de I si elle admet soit un maximum, soit un minimum en a.

Les fonctions de référence fournissent des exemples de choix pour illustrer cette définition.

Exercice 2.4.2. *Déterminer les extrema des fonctions suivantes :*

1) *La fonction carré sur* $[-2;2]$*;*
2) *La fonction cube sur* $[-2;2]$*;*
3) *La fonction racine carrée sur* $[0;4]$*;*
4) *La fonction inverse sur* $[-2;-1[$*;*

Correction. Nous allons utiliser les tableaux de variations des fonctions de référence établis précédemment.

1) La fonction carrée a un minimum en 0 sur $[-2;2]$ et un maximum en -2 et en 2.

2) La fonction cube a un minimum en -2 et un maximum en 2 sur $[-2;2]$.

3) La fonction racine carrée a un minimum en 0 et un maximum en 4 sur $[0;4]$.

4) La fonction inverse a un maximum en -2 et pas de minimum sur $]-2;-1[$.

■

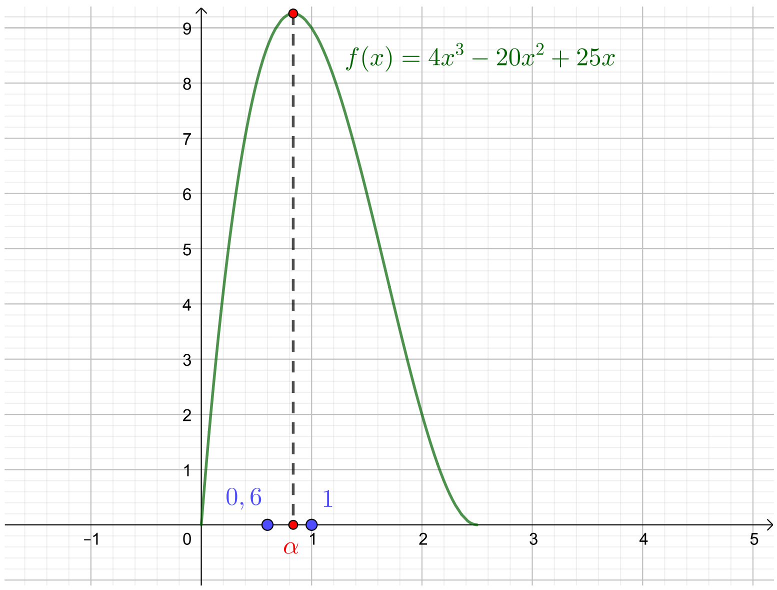
En l'absence de l'outil de dérivation, il est en général impossible de déterminer les extrema d'une fonction. On pourra cependant chercher à les approcher à l'aide de l'outil informatique. Voici un exemple sous forme de problème ouvert.

Exercice 2.4.3. *On considère la fonction* $f : [0;2,5] \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x.$$

Déterminer une valeur approchée de l'abscisse α *de son maximum avec une précision de* $0,01$. *En déduire une approximation du maximum.*

Démonstration. Commençons par tracer la courbe représentative de f à l'aide de GeoGebra :



On observe alors que l'abscisse α du maximum se trouve entre $0,6$ et 1. Pour obtenir une approximation de α, nous allons maintenant procéder par balayage[3]. Voici un exemple de programme en Python pour cela :

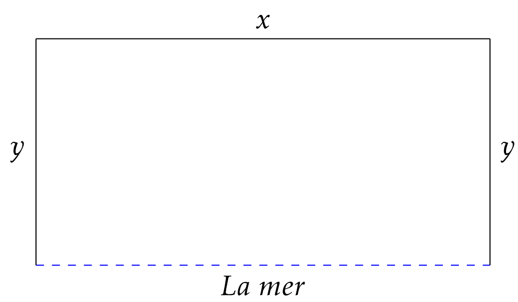
```
def f(x):
    return 4*x**3 - 20*x**2 + 25*x
def max:
alpha=0.6
x=0.6
    while x<1:
        x=x+0.01
        if f(x)>f(alpha):
            alpha=x
    return alpha
```

3. On pourrait aussi procéder par dichotomie, mais cela nous permet de changer un peu.

En l'utilisant, on obtient l'approximation $\alpha \approx 0,33$, ce qui mène à l'approximation du maximum[4] $f(\alpha) \approx 4,04$. ■

Voici un autre exemple très intéressant où une conjecture peut être démontrée rigoureusement grâce à une identité remarquable.

Exercice 2.4.4 (La piscine de Saint-Malo)**.** *Au bord d'une plage de Saint-Malo a été construite une bordure en pierres afin de délimiter une piscine de mer de forme rectangulaire. La bordure en pierre n'a été construite que sur trois cotés car il existait déjà une délimitation naturelle : la plage. On sait que la superficie de cette piscine est de 3200 m^2. On cherche les valeur x et y des cotés pour lesquelles la longueur de la bordure sera minimale. Voici une figure :*



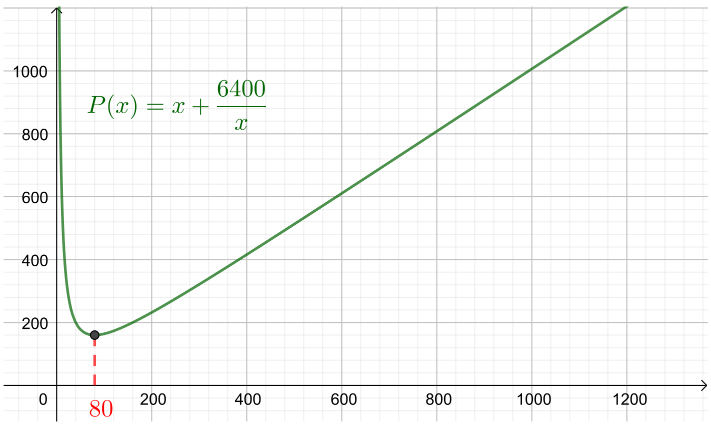
1) *Exprimer la superficie S de la piscine en fonction de x et y.*
2) *Exprimer la longueur P de la bordure en pierre en fonction de x et y, puis en fonction de x seul.*
3) *Représenter graphiquement P et formuler une conjecture concernant ses extrema.*
4) *On considère la fonction $f : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par*
$$f(x) = x + \frac{6400}{x} - 160.$$
Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$f(x) = \frac{(x-80)^2}{x}.$$
5) *En déduire un preuve de la conjecture précédente.*

Correction. 1) La superficie de la piscine est
$$S = x \times y.$$

2) D'après la figure, la bordure consiste en un côté de longueur x et deux côtés de longueur y, d'où
$$P = x + 2y.$$
De plus, d'après la première question,
$$y = \frac{S}{x} = \frac{3200}{x},$$
donc
$$P(x) = x + \frac{6400}{x}.$$

4. Remarquons que le terme approximation est ici trompeur, car rien ne garantit que $f(\alpha)$ approche le maximum à $0,01$ près par exemple.

3) En traçant la courbe représentative de la fonction P, ici avec GeoGebra, on s'aperçoit qu'elle admet un minimum en $x = 80$:



La valeur correspondante de P est alors 160.

4) On réduit au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 + 6400 - 160x}{x} = \frac{(x-80)^2}{x}.$$

5) Comme un carré est toujours positif et que x lui-même, désignant une longueur, est positif, la fonction f est à valeurs positives. Autrement dit, pour tout x,

$$P(x) - 160 = f(x) \geqslant 0,$$

ce qui s'écrit également $P(x) \geqslant 160$. Ceci signifie que le minimum de la fonction P est au moins égal à 160. Or, $P(80) = 160$, donc c'est bien le minimum.

■

CHAPITRE 3

PREMIÈRE

En classe de Première, les fonctions deviennent omniprésentes. Elles dépassent le cadre de la partie analyse pour intervenir à la fois en probabilités (variables aléatoires) et en algèbre (fonctions polynômes, suites vues comme fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$). Dans ce document, nous nous restreindrons, pour des raisons de temps et de place, à ce qui est explicitement étiqueté comme appartenant à la partie “analyse”.

3.1 Le programme

Le programme d'analyse de Première se divise en trois points :

1) Dérivation.
Contenus
Point de vue local

- Taux de variation, sécante à la courbe représentative d'une fonction en un point donné ;
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, notation $f'(a)$;
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, pente, équation.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée ;
- Fonctions dérivées des fonctions carré, cube, racine carrée et inverse ;
- Opérations sur les fonctions dérivables ;
- Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}$;
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation et la pente d'une sécante ;
- Interpréter le nombre dérivée ;
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente, construire la tangente ;
- Déterminer l'équation de la tangente en un point ;
- Dans des cas simples, calculer le nombre dérivée à partir de la définition ou calculer la dérivée en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.

2) Variations et courbes représentatives des fonctions.
Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable et le signe de sa fonction dérivée et caractérisation des fonctions constantes ;
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction, déterminer les extrema ;
- Résoudre un problème d'optimisation ;
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité, étudier la position relative de deux courbes ;
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extrema, allure de la courbe.

3) Fonction exponentielle.
Contenus

- Définition de la fonction exponentielle via l'équation différentielle $f' = f$;
- Propriétés de l'exponentielle : $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$, nombre e et notation e^x ;
- Pour tout réel a, la suite $(e^{an})_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique ;
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle ;
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$;
- Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle.

3.2 Dérivation

La dérivation est sans conteste la nouveauté la plus difficile du programme d'analyse en classe de Première. Ceci est en grande partie dû à deux facteurs :

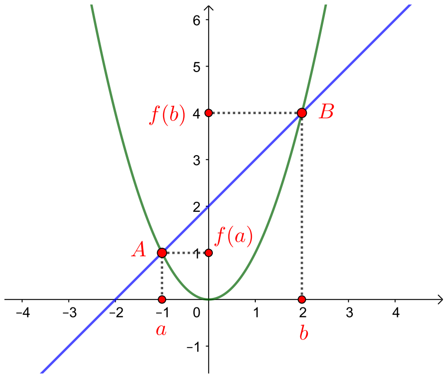
- L'absence de notion précise de limite, qui empêche à la fois de poser des définitions rigoureuses et de démontrer des résultats ;
- L'absence de motivation aisément explicable pour l'introduction du nombre dérivé, autre que « Vous verrez plus tard, ça sera utile ».

Puisqu'il faut donc s'en remettre au « *feeling* », la meilleurs solution est d'utiliser la représentation graphique.

L'idée centrale sera donc le lien entre nombre dérivé en un point et pente de la tangente à la courbe représentative. Or pour calculer la pente d'une droite, il faut en connaître deux points, et nous n'en avons qu'un ! Nous pouvons alors essayer de regarder la pente d'une droite "très proche", par exemple d'une sécante à la courbe.

Définition 3.1. Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Si a et b sont deux points de I, alors la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est appelé une *sécante* à la courbe représentative de f.

Cette définition doit bien évidemment s'accompagner d'une illustration :



En pratique, nous allons considérer deux point très proches, de sorte que la pente de la sécante soit “proche” de la pente de la tangente. On considérera donc la sécante correspondant aux points a et $a+h$ pour h “petit”. La pente de cette sécante est alors une quantité importante pour l'étude de la fonction f, ce qui justifie qu'on lui donne un nom :

DÉFINITION 3.2. Soit I un intervalle ouvert, soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit a un point de I. La pente de la sécante à la courbe représentative de f correspondant à a et $a+h$ est appelée *taux d'accroissement* et est égale à

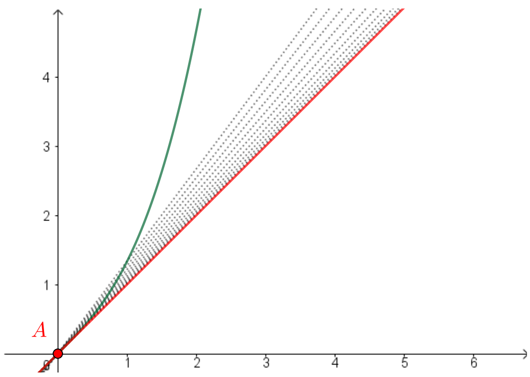
$$T = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque. Cette définition manque de rigueur en ce qu'elle occulte le problème de l'existence même de $f(a+h)$. En effet, celle-ci n'est garanti que pour h suffisamment petit et uniquement à condition que a soit à l'intérieur de l'intervalle de définition et pas au bord.

Avec tous ces outils en main, nous pouvons donner une idée intuitive de la dérivabilité : s'il existe une droite dont les sécantes se rapprochent quand h devient petit, alors cette droite doit être la tangente à la courbe représentative. Voici un exemple, pour la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$$

avec $a = 1$ et h variant par pas de $0,1$ de 1 à 0, les sécantes successives sont en pointillés.



En conséquence, le taux d'accroissement devrait lui s'approcher d'un nombre qui sera la pente de la tangente, ce qu'on peut observer ici en le calculant :

h	1	$0,9$	$0,8$	$0,7$	$0,6$	$0,5$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,1$
T	$1,33$	$1,27$	$1,21$	$1,16$	$1,12$	$1,08$	$1,05$	$1,03$	$1,01$	1

On observe que le taux d'accroissement tend vers 1 (la dernière entrée étant égale à un à cause d'un arrondi à deux décimales). Forts de l'intuition acquise, il est à présent possible d'introduire les notions fondamentales de la dérivation.

Définition 3.3. Soit I un intervalle ouvert. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est *dérivable* en un point a de I s'il existe un nombre $f'(a)$ dont le taux d'accroissement s'approche de plus en plus quand h devient de plus en plus petit. Le nombre $f'(a)$ est appelé *nombre dérivé* de f en a.

La droite de pente $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ est appelée *tangente* à la courbe représentative de f en a.

Remarque. La notion de limite n'est pas explicitement au programme de Première, mais sera vue en Terminale. Nous renvoyons donc à la Définition 4.6 pour une possible définition rigoureuse du nombre dérivé.

Le calcul d'une équation de la tangente est l'occasion de réactiver les connaissances des années précédentes sur les droites et les fonctions affines.

Propriété 3.4 Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point a de I. Alors, la tangente à la courbe représentative de f en a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration. On sait qu'étant donné un nombre réel et un point du plan, il existe une unique droite de pente ce nombre réel et passant par ce point. Or, la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est de pente $f'(a)$ et passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$ puisque

$$f(a) + f'(a)(a - a) = f(a).$$

C'est donc bien la tangente à la courbe représentative de f en a. ■

S'il peut être utile de faire quelques calculs concrets de nombre dérivé pour se familiariser avec la notion, cela doit rester extrêmement simple dans la mesure où les calculs de limite sont faits de façon intuitive.

Exercice 3.2.1. *On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par*

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6.$$

1) *Pour un réel h, calculer le taux d'accroissement entre 4 et $4 + h$.*

2) *En déduire que f est dérivable en 4 et calculer son nombre dérivé.*

Correction. 1) On calcule

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{2(16 + 8h + h^2) + 16 + 4h - 6 - 42}{h} = \frac{16h + 2h^2}{h} = 16 + 2h.$$

2) La quantité $16 + 2h$ devient aussi proche de 16 que l'on veut si on prend h très petit. Par conséquent, elle tend vers 16 quand h tend vers 0. Ceci signifie que f est dérivable en 4 et que

$$f'(4) = 16.$$

■

Cette approche locale du nombre dérivée est importante puisqu'elle sera la clef du lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Cependant, du point de vue du calcul, c'est l'approche globale qui est la plus performante.

Définition 3.5. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Elle est dite *dérivable* si elle est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Sinon, on appelle *ensemble de dérivabilité* de f l'ensemble des points de son intervalle de définition auxquels elle est dérivable. La fonction

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

est appelée *fonction dérivée* de f.

Comme toujours, on illustrera en priorité la notion à l'aide des fonctions de référence :

Propriété 3.6 1) La fonction affine $x \mapsto \lambda x + \mu$ est dérivable et sa dérivée est donnée par
$$x \mapsto \lambda.$$

2) La fonction carré est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée par
$$x \mapsto 2x.$$

3) La fonction cube est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée par
$$x \mapsto 3x^2.$$

4) La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est donnée par
$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5) La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est donnée par
$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}.$$

Démonstration. 1) Pour un réel donné a, on calcule
$$\frac{\lambda(a+h)+\mu-(\lambda a+\mu)}{h} = \frac{\lambda h}{h} = \lambda.$$

Cette quantité étant constante, elle converge vers λ. Ceci signifie que la fonction est dérivable en a est que son nombre dérivé est λ.

2) Pour un réel donné a, on calcule
$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$

La quantité $2a+h$ devient aussi proche de $2a$ que l'on veut si on prend h très petit. Par conséquent, elle tend vers $2a$ quand h tend vers 0. Ceci signifie que la fonction carré est dérivable en a et que son nombre dérivé est $2a$.

3) Pour un réel donné a, on calcule
$$\frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h} = \frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} = 3a^2+3ah+h^2.$$

La quantité $3a^2+3ah+h^2$ devient aussi proche de $3a^2$ que l'on veut si on prend h très petit. Par conséquent, elle tend vers $3a^2$ quand h tend vers 0. Ceci signifie que la fonction cube est dérivable en a et que son nombre dérivé est $3a^2$.

4) Pour un réel strictement positif donné a, calculons d'abord
$$\sqrt{a+h}-\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{h}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

On en déduit que
$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

La quantité $\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ devient aussi proche de $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ que l'on veut si on prend h très petit. Par conséquent, elle tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0. Ceci signifie que la fonction racine carrée est dérivable en a et que son nombre dérivé est $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Remarquons que ce raisonnement ne fonctionne pas si $a = 0$.

5) Pour un réel non-nul a, calculons d'abord

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = -\frac{h}{a(a+h)}.$$

On en déduit que

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

La quantité $-\frac{1}{a(a+h)}$ devient aussi proche de $-\frac{1}{a^2}$ que l'on veut si on prend h très petit. Par conséquent, elle tend vers $-\frac{1}{a^2}$ quand h tend vers 0. Ceci signifie que la fonction inverse est dérivable en a et que son nombre dérivé est $-\frac{1}{a^2}$.

■

Remarque. Il peut être intéressant de transformer tout ou partie de cette propriété en exercice, à condition d'ajouter des indications ou des questions intermédiaires pour certaines fonctions.

Remarque. Ces exemples, tout en permettant de faire explicitement les calculs, illustrent plusieurs subtilités de la dérivation, notamment le fait que l'ensemble de dérivation peut être strictement plus petit que l'ensemble de définition (fonction racine carrée). On pourra aussi faire remarquer que les quatre exemples se ramènent à une même formule : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Pour aller plus loin, il n'est pas nécessaire d'établir une longue liste de cas particuliers, mais plutôt de savoir calculer la dérivée d'une fonction en la décomposant en plusieurs morceaux plus simples. C'est ce que permettent de faire les opérations dont parle le programme :

Propriété 3.7 Soient f et g des fonctions définies sur un même intervalle ouvert sur lequel elles sont dérivables, alors

1) $f+g$ est dérivable et
$$(f+g)' = f' + g'$$

2) $f \times g$ est dérivable et
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

3) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable et
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

4) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}.$$

5) Si a et b sont des nombres réels fixés, alors la fonction $k : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable et
$$k'(x) = af'(ax+b).$$

Démonstration. Ces résultats devraient découler des opérations sur les limites. Celles-ci n'étant pas encore introduites, nous utiliserons sans justification le fait que la somme de deux quantités tend vers la somme des limites et que leur produit tend vers le produit des limites.

1) On a
$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h},$$
d'où le résultat.

2) On a
$$\begin{aligned}\frac{(f\times g)(a+h)-(f\times g)(a)}{h}&=\frac{(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\&=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}f(a),\end{aligned}$$
d'où le résultat puisque $g(a+h)$ tend vers $g(a)$ quand h tend vers 0 [1].

3) On a
$$\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}=\frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a)g(a+h)}=\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\times\frac{-1}{g(a)g(a+h)},$$
d'où le résultat.

4) Ce résultat découle immédiatement des deux précédents.

5) On a
$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h}=a\times\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}.$$
la dernière fraction tend vers $f'(ax+b)$ quand ah tend vers 0, donc également quand h tend vers 0, d'où le résultat.

■

À ce stade, ces notions se prêtent essentiellement à des exercices d'application directe par le calcul de dérivées de sommes, de produits et de quotients de fonctions de références. En voici un exemple parmi une infinité :

Exercice 3.2.2. *Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et donner sa dérivée.*

1) $f : x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$ *;*

2) $g : x \mapsto (x^2+1)(x^3-2x)$ *;*

3) $h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.

Correction. 1) La fonction f est définie sur $\mathbf{R}_*$ est y est dérivable comme somme de fonctions dérivables. De plus, la propriété des sommes de fonctions dérivables donne :
$$f'(x)=15x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

2) La fonction g est définie sur $\mathbf{R}$ et y est dérivable comme produit de fonctions dérivables. De plus, la propriété des produits de fonctions dérivables donne :
$$g'(x)=2x(x^3-2x)+(x^2+1)(3x^2-2)=5x^4-3x^2-2.$$

1. Notons que nous admettons ici implicitement que toute fonction dérivable est continue.

3) La fonction h est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, la propriété des quotients de fonctions dérivables donne :

$$h'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

■

Le répertoire des fonctions de référence s'enrichit en première des fonctions polynômes, qui sont traitées dans la partie d'algèbre du programme. Par la propriété concernant la somme de deux fonctions dérivables, il suffit pour savoir dériver un polynôme de savoir dériver les fonctions puissance.

Propriété 3.8 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction x^n est dérivable de dérivée

$$x \mapsto nx^{n-1}.$$

Démonstration. Il est possible de prouver ce résultat "à la main" comme pour le cas des fonctions carré et cube, en utilisant la factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

On peut aussi proposer une démonstration par récurrence "intuitive", c'est-à-dire sans la formaliser puisque la récurrence ne sera abordée qu'en Terminale. En effet, en écrivant $x^{n+1} = x \times x^n$ et en admettant que le résultat est vrai pour x^n, on voit que

$$(x^{n+1})' = x' \times x^n + x \times (x^n)' = x^n + (n-1)x^n = nx^n.$$

■

Pour conclure cette partie, le programme demande de traiter en détail l'un des cas les plus simples de fonction non-dérivable en un point, à savoir la fonction valeur absolue. Celle-ci se prête bien à un traitement sous forme d'exercice.

Exercice 3.2.3. *On considère la fonction $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |x|$.*

1) *Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre réel.*
2) *Soit $x > 0$, et h un réel tel que $|h| < \frac{x}{2}$.*
   (a) *Calculer*
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$
   (b) *En déduire la valeur de $f'(x)$.*
3) *Calculer de même $f'(x)$ pour $x < 0$.*
4) *Soit $\epsilon > 0$, trouver deux réels h_1, h_2 tels que*
   - *$|h_1| < \epsilon$ et $|h_2| < \epsilon$,*
   - $\dfrac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} = 1$ *et* $\dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} = -1$.
5) *En déduire que f n'est pas dérivable en 0.*

Correction. 1) La valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif.

2) (a) L'inégalité $|h| < \frac{x}{2}$ peut s'écrire

$$-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{2} < x + h < \frac{3x}{2}.$$

Comme $x > 0$, on en déduit que $x + h > 0$ et donc que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

(b) D'après la question précédente, le taux d'accroissement est égal à 1 dès que h est assez petit. Par conséquent, f est dérivable en x et son nombre dérivé vaut $f'(x) = 1$.

3) Considérons $|h| < \frac{x}{2}$. Alors,

$$-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{2} < x + h < \frac{3x}{2}.$$

Comme $x < 0$, on en déduit que $x + h < 0$ et donc que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

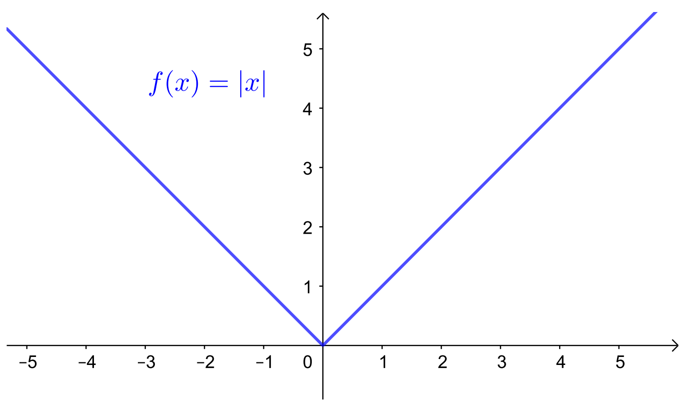
D'après ce qui précède, le taux d'accroissement est égal à -1 dès que h est assez petit. Par conséquent, f est dérivable en x et son nombre dérivé vaut $f'(x) = -1$.

4) En s'inspirant de ce qui précède, il suffit de prendre $h_1 = \frac{\epsilon}{2}$ et $h_2 = -\frac{\epsilon}{2}$.

5) La question précédente montre que pour des h aussi petit qu'on veut, il y a des taux d'accroissement en 0 égaux à 1 et d'autres égaux à -1. Par conséquent, le taux d'accroissement n'a pas de limite quand h tend vers 0. Autrement dit, f n'est pas dérivable en 0.

■

Un dessin est bien sûr nécessaire pour comprendre d'où vient le défaut de dérivabilité en 0 :



3.3 Variations et courbes représentatives des fonctions

L'intérêt de la dérivation réside dans son utilisation pour l'étude globale des fonctions, notamment leur sens de variation et leurs extrema. Il ne faut pas masquer le caractère surprenant de ce phénomène : une propriété locale (le nombre dérivé) permet d'obtenir des informations globales (sens de variation, extrema). C'est là l'un des plus grands miracles de l'analyse !

Les démonstrations de ces deux résultats fondamentaux sont hors programme. La condition nécessaire pour les extrema ne nécessitant pourtant que des outils du programme de Première, nous la donnerons donc à titre indicatif.

Contrairement à ce que suggère le programme dans l'ordre de sa rédaction, il faut commencer par étudier les extrema. La preuve du résultat est tout à fait élémentaire et faisable en classe.

> **Propriété 3.9** Soit $f :]a;b[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Si f a un extremum en un point c de $]a;b[$, alors
> $$f'(c) = 0.$$

Démonstration. Supposons que f a un maximum au point c. Alors, pour tout $h > 0$, $f(c) \geqslant f(c+h)$ donc

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0.$$

Par conséquent, la limite de cette quantité, qui n'est autre que $f'(c)$, est un nombre négatif. De même, pour tout $h < 0$, $f(c) \geqslant f(c+h)$ donc

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0.$$

Par conséquent, la limite de cette quantité, qui n'est autre que $f'(c)$, est un nombre positif. Ainsi, $f'(c)$ doit être à la fois positif et négatif, c'est donc qu'il est nul. ∎

Remarque. Il est important d'insister sur le fait que l'annulation de la dérivée est une condition *nécessaire* d'existence d'un extremum, mais pas une condition *suffisante*.

Les fonctions carré et cube fournissent de bons exemples élémentaires pour illustrer ce résultat (on pourra aussi regarder l'Exercice 3.3.3) :

Exercice 3.3.1. *Déterminer les éventuels extrema des fonctions carré et cube sur* $\mathbf{R}$.

Correction. Notons f la fonction carré. Alors, $f'(x) = 2x$ ne s'annule qu'en 0. Ainsi, le seul extremum possible de f est $0 = f(0)$. Comme

$$f(x) = x^2 \geqslant 0$$

pour tout réel x, il s'agit bien d'un minimum.

Notons g la fonction cube. Alors, $f'(x) = 3x^2$ ne s'annule qu'en 0. Ainsi, le seul extremum possible de f est $0 = f(0)$. Or, $f(-1) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc 0 n'est pas un extremum. Ainsi, la fonction cube n'a pas d'extremum sur $\mathbf{R}$. ∎

Remarque. L'intérêt de l'exercice est bien évidemment de mettre en lumière le fait que l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire mais non suffisante d'existence d'un extremum.

Le second résultat important de cette partie du programme relie la dérivée au sens de variation.

> **Théorème 3.10** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$. Alors,
>
> - f est croissante si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $]a;b[$;
> - f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]a;b[$.

Démonstration. Commençons par le sens direct, qui est démontrable en classe. Si f est croissante, alors tous ses taux d'accroissements sont positifs d'après la **Propriété** 2.8. Comme le nombre dérivé est une limite de taux d'accroissements, il suit que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x. Le même argument donne bien sûr, *mutatis mutandis*, le cas où f est décroissante.

Intéressons nous maintenant au sens réciproque. Si la preuve de ce résultat est hors programme, c'est parce qu'elle repose sur le THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS. En effet, d'après ce dernier, si f est dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Par conséquent, si la dérivée de f est de signe constant, les taux d'accroissement le sont aussi, d'où le résultat par la Proposition 2.8. ■

Remarque. Détaillons un peu plus les liens avec le programme. Le THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS est une conséquence immédiate du THÉORÈME DE ROLLE. Ce dernier est facile à démontrer à partir de la **Propriété** 3.9, à condition de savoir que toute fonction continue sur un segment admet un extremum. C'est donc l'absence de la notion de continuité, pourtant logiquement antérieure à celle de dérivabilité, qui force d'admettre ce résultat et surtout nous prive du THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS qui est bien plus utile et nous fera encore défaut (voir par exemple la Section 4.3.2 du programme de Terminale sur la convexité).

À l'aide du THÉORÈME 3.10, il est possible de caractériser les fonctions de dérivée nulle :

PROPRIÉTÉ 3.11 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a;b[$. Alors, f est constante si et seulement si pour tout x de $]a;b[$, $f'(x) = 0$.

Démonstration. Remarquons que pour démontrer que la dérivée d'une fonction constante s'annule, le THÉORÈME 3.10 n'est pas nécessaire. C'est même l'inverse, puisque ce résultat est utilisé dans la preuve du THÉORÈME DE ROLLE, sur lequel repose la preuve du THÉORÈME 1.8 ! De ce point de vue, l'ordre du programme est encore une fois trompeur. De fait, si f est une fonction constante, il suffit de calculer le taux d'accroissement en un point x :

$$T = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

puisque $f(x+h) = f(x)$. La limite de cette quantité est 0 d'où le résultat.

Réciproquement, si f est une fonction de dérivée identiquement nulle, alors elle est à la fois croissante et décroissante d'après le THÉORÈME 3.10. Donc, pour tous x et y dans $]a;b[$ tels que $x < y$,

$$f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x).$$

Autrement dit, f est constante. ■

Les exercices sur le sujet sont pléthore : il suffit de définir une fonction à l'aide de sommes et de produits de fonctions de référence et de la faire étudier aux élèves. Mais tant qu'à faire, on peut essayer de choisir une fonction obtenue à partir d'un problème concret. En voici un exemple :

Exercice 3.3.2. *Un industriel souhaite fabriquer des boîtes de 1 L, c'est-à-dire 1 dm^3, en forme de parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté x et dont la hauteur est h. Son but est d'économiser les matériaux de fabrication en produisant une boîte dont la surface est la plus petite possible. Toutes les longueurs sont comprises en dm.*

1) *Justifier que*
$$h = \frac{1}{x^2}.$$

2) *En déduire que l'aire totale de la boîte est*
$$f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}.$$

3) *Étudier la fonction f et tracer son tableau de variations.*

4) *En déduire la plus petite aire possible de la boîte.*

Correction. 1) Le volume de la boîte est donné par $V = h \times x^2$. Le résultat suit donc du fait que la boîte est de volume 1.

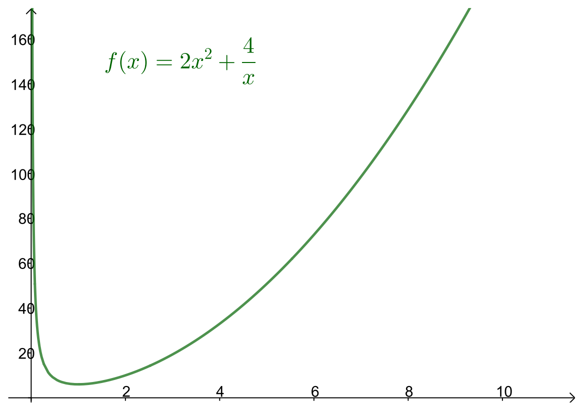
2) La boîte possède deux faces carrées d'aire x^2 et quatre faces rectangulaires d'aire $h \times x$, d'où
$$f(x) = 2x^2 + 4h \times x = 2x^2 + 4\frac{x}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}.$$

3) Calculons la dérivée de f :
$$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2}.$$
Comme $x^2 > 0$, cette expression est du signe de $x^3 - 1$. Or, on sait que la fonction x^3 est croissante sur $\mathbf{R}$ et que $1^3 = 1$. Par conséquent, $x^3 - 1 \leqslant 0$ pour $x \leqslant 1$ et $x^3 - 1 \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) D'après la question précédente, l'aire minimale de la boîte est
$$f(1) = 2 + 4 = 6 \text{ dm}^2$$

Voici à titre indicatif l'allure de la fonction f :



∎

Le programme suggère également d'utiliser les résultats sur la dérivation pour décrire les solutions d'un trinôme. Cela peut par exemple se faire sous forme d'exercice.

Exercice 3.3.3. *On considère trois réels a, b et c avec a non nul, ainsi que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1) *En fonction du signe de a, dresser le tableau de variations de f.*

2) *En déduire la valeur de l'unique extremum de f.*

3) *À l'aide des questions précédentes, montrer que si*

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

alors f ne s'annule jamais.

4) *Montrer de même que si $\Delta = 0$, alors f ne s'annule qu'une seule fois et dire pour quelle valeur de x.*

5) *Que se passe-t-il si $\Delta > 0$?*

Correction. 1) Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Cette quantité s'annule si $x = -\frac{b}{2a}$. De plus, si $a > 0$, alors $f'(x) \leqslant 0$ pour $x < -\frac{b}{2a}$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x > -\frac{b}{2a}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Enfin, si $a < 0$, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour $x < -\frac{b}{2a}$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x > -\frac{b}{2a}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

2) Dans les deux cas, on observe que l'extremum est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$ et a donc pour valeur

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

3) Supposons $\Delta < 0$. Si $a > 0$, alors son minimum vaut
$$\frac{-\Delta}{4a} > 0$$
donc d'après le tableau de variations, f est tout le temps strictement positive. En particulier, elle ne s'annule pas. De même, si $a < 0$, alors son minimum vaut
$$\frac{-\Delta}{4a} < 0$$
donc d'après le tableau de variations, f est tout le temps strictement négative. En particulier, elle ne s'annule pas.

4) Si $\Delta = 0$, alors l'extremum de f vaut 0, donc f s'annule exactement une fois. De plus, elle s'annule au point $x = -\frac{b}{2a}$.

5) Si $\Delta > 0$, le tableau de variations suggère que f s'annule deux fois. Pour le prouver cependant, il faudrait le Théorème des valeurs intermédiaires, qui ne sera vu qu'en Terminale.

■

3.4 Fonction exponentielle

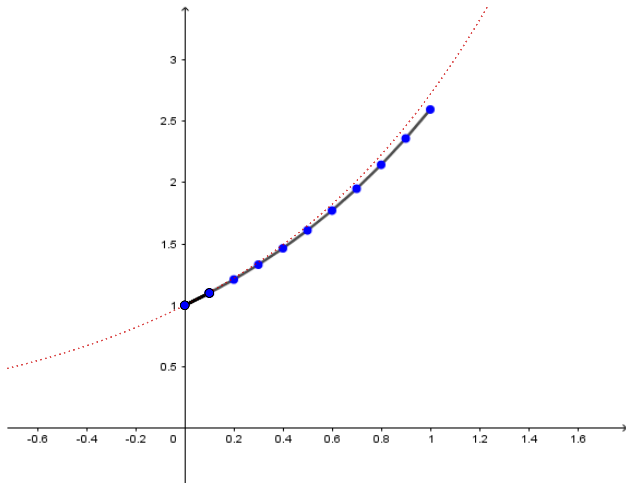
L'introduction de la fonction exponentielle comme solution d'une équation différentielle possède une certaine cohérence avec le développement de la dérivation. Cependant, la preuve de l'existence de l'exponentielle est très difficile (mais pas impossible) au niveau du lycée. C'est pourquoi elle sera admise, bien qu'il soit important de tenter de convaincre l'auditoire du bien fondé de cette assertion !

Rappelons comment on peut essayer d'approcher une solution de l'équation différentielle $y' = y$ à l'aide de la *méthode d'Euler*. On part de l'égalité
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right)$$
et en remarquant que le terme entre parenthèses tend vers 0 quand h tend vers 0 par définition de la dérivabilité, on voit que peut faire l'approximation
$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$
Cette approximation sera bien sûr d'autant meilleure que h est petit.

Étant donné maintenant un réel x, nous allons diviser l'intervalle $[0;x]$ en petits morceaux de taille h et approcher sur chaque intervalle de la forme $[kh;(k+1)h]$ la solution f recherchée par une droite de pente $f'(kh)$. Dans notre cas, on a $f' = f$ et $f(0) = 1$. Nous partons donc du point $(0,1)$ et utilisons une droite de pente $f(0) = 1$, ce qui nous donne au point d'abscisse h l'ordonnée $1+h$. De même, en partant du point $(h, 1+h)$ on utilise la droite de pente h pour obtenir au point d'abscisse $2h$ l'ordonnée
$$(1+h) + h(1+h) = 1 + 2h + h^2 = (1+h)^2.$$
En continuant ainsi, on obtient pour le point d'abscisse kh une ordonnée égale à $(1+h)^k$. Si maintenant, pour un entier naturel n, on pose $h = \frac{x}{n}$, on obtient une approximation de $f(x)$ donnée par
$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Il est possible de montrer que cette suite converge [2] et que la limite est une fonction dérivable [3] égale à sa propre dérivée. Ces preuves sont cependant difficiles et hors du programme. Ce qui n'empêche pas d'essayer de visualiser le résultat graphiquement. Voici par exemple l'approximation de la fonction exponentielle entre 0 et 1 pour $n = 10$:

2. Ceci se fait habituellement en montrant qu'elle est adjacente à la suite de terme général $u_n(-x)^{-1}$.
3. Ici les choses deviennent subtiles.



Ainsi que quelques valeurs de la suite $u_n(x)$:

x	1	5	10	20	100
$u_n(x)$	2	$2,49$	$2,59$	$2,65$	$2,7$

Une fois les élèves convaincus que cette méthode justifie l'existence d'une solution à l'équation différentielle $y' = y$, il ne reste plus qu'à l'affirmer.

Théorème 3.12 Il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée *fonction exponentielle* et notée exp.

Démonstration. L'existence comme l'unicité sont admises. Cependant, l'unicité est tout à fait démontrable avec les outils de Première, voici comment. Il faut commencer par montrer qu'une telle fonction f ne s'annule jamais. Pour cela, posons

$$h : x \mapsto f(x) \times f(-x).$$

La fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x).$$

Comme $f' = f$, on obtient finalement $h'(x) = 0$ pour tout x. D'après la **Propriété** 3.11, on peut donc affirmer que la fonction h est constante. Comme de plus $h(0) = f(0)^2 = 1$, h ne s'annule jamais. Par conséquent, f ne s'annule jamais non plus.

Considérons maintenant deux fonctions f et g telles que $f' = f$, $g' = g$ et $f(0) = 1 = g(0)$. Alors, g ne s'annule pas donc on peut considérer la fonction $k = \frac{f}{g}$. Elle est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et

$$k'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Ainsi, k est constante et comme $k(0) = 1$, on a $k(x) = 1$ pour tout x. Il suit que pour tout x,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

c'est-à-dire $f(x) = g(x)$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

La preuve de l'unicité est intéressante parce qu'elle montre comment exploiter la définition de la fonction exponentielle pour en déduire des propriétés (comme le fait qu'elle ne s'annule pas par exemple). Ceci sera à nouveau illustré par l'énonce suivant.

Propriété 3.13 Soient x et y deux nombres réels, alors

1) $\exp(x) > 0$;
2) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
3) $\exp(x)\exp(-x) = 1$;

Démonstration. 1) Ce résultat est admis, parce que sa preuve provient de la continuité de la fonction exp. En effet, exp étant dérivable sur $\mathbf{R}$, elle est continue. Comme elle ne s'annule pas, le Théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle est de signe constant. Comme

$$\exp(0) = 1 > 0,$$

la fonction exp n'a que des valeurs strictement positives.

2) Fixons y et considérons la fonction

$$h : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)},$$

qui est bien définie parce que $\exp(y) \neq 0$. La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = h(x).$$

Comme de plus $h(0) = 1$, $h = \exp$ par unicité de la fonction exponentielle. Ainsi,

$$\exp(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3) Ceci suit de la propriété précédente en se rappelant que $\exp(0) = 1$.

■

En particulier, pour un réel a fixé, on a

$$\exp((n+1)a) = \exp(a)\exp(na),$$

donc la suite $(\exp(na))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\exp(a)$. En considérant le cas encore plus particulier où $a = 1$, on a pour tout entier n,

$$\exp(n) = \exp(1)^n.$$

Ceci motive l'introduction d'une nouvelle notation pour la fonction exponentielle :

Définition 3.14. On pose $e = \exp(1)$ et on note, pour tout nombre x,

$$\exp(x) = e^x.$$

Remarque. On peut faire remarquer que, par la **Propriété** 3.7, la dérivée de $x \mapsto e^{ax}$ est la fonction $x \mapsto ae^{ax}$. Par conséquent, la même preuve que pour le Théorème 3.12 montre que $x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction telle que $f' = af$ et $f(0) = 1$.

Pour conclure, la fonction exponentielle doit rejoindre le répertoire des fonctions de référence, il faut donc l'étudier et donner ses variations.

Propriété 3.15 La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que exp est strictement positive. Comme c'est aussi la dérivée de la fonction exponentielle, on en déduit qu'elle est croissante sur **R** d'après le Théorème 3.10. Si de plus il existait $x < y$ tels que $e^x = e^y$, alors pour tout $x < z < y$, on aurait

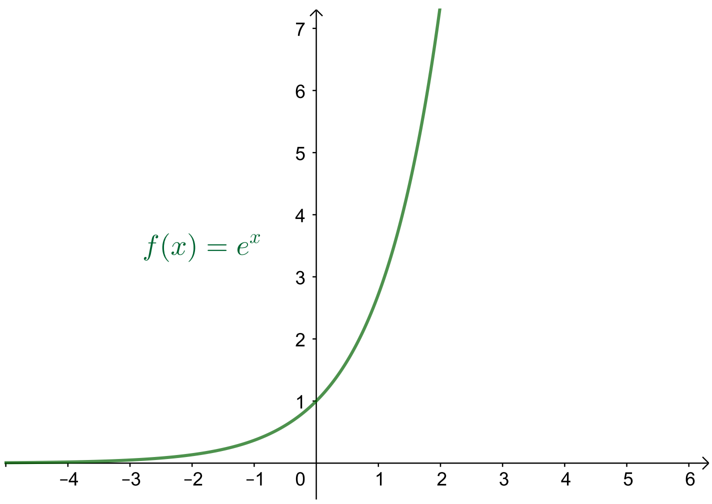
$$e^x \leqslant e^z \leqslant e^y = e^x$$

par croissance de l'exponentielle, donc $e^z = e^x$. Ainsi, la fonction exponentielle serait constante sur $]x;y[$. Mais alors, sa dérivée devrait être nulle par la **Propriété 3.11**, ce qui est impossible. Ainsi, l'exponentielle est strictement croissante sur **R**. ■

Ceci nous permet de donner son tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$

ainsi que de tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Pour conclure, voici un exemple de problème faisant intervenir la fonction exponentielle.

Exercice 3.4.1. *La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Le taux de vasopressine dans le sang est considéré comme normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie. On utilisera dans la suite la modélisation suivante :*

$$f(t) = 3te^{-\frac{t}{4}} + 2,$$

où $f(t)$ désigne le taux de vasopressine dans le sang (en μg/mL) au bout d'un temps t (en minutes) après le début d'une hémorragie.

1) (a) *Quel est le taux à $t = 0$?*
   (b) *Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.*
   (c) *Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a*

$$f(t) = 12 \times \frac{1}{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\frac{t}{4}}} + 2.$$

2) *Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que*

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{t}{4}}.$$

3) (a) *Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations (en incluant la limite en $+\infty$).*
   (b) *À quel instant le taux de vasopressine dans le sang est-il maximal ? Donner alors une approximation de ce taux à 10^{-2} près.*

Correction. 1) (a) Un calcul immédiat donne $f(0) = 2$.

(b) Douze secondes correspondent à un cinquième de minute, donc il faut calculer

$$f(0,2) = 0,6e^{-0,05} + 2 \approx 2,57.$$

Cette valeur est strictement supérieure à 2,5, donc le taux de vasopressine est anormal.

(c) On a

$$12 \times \frac{1}{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\frac{t}{4}}} + 2 = 12 \times \frac{1}{\frac{4e^{\frac{t}{4}}}{t}} + 2 = 12 \times \frac{t}{4} \times \frac{1}{e^{\frac{t}{4}}} + 2 = 3te^{-\frac{t}{4}}.$$

2) La fonction f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables. De plus,

$$f'(t) = 3e^{-\frac{t}{4}} - \frac{t}{4} \times 3te^{-\frac{t}{4}} = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{t}{4}}.$$

3) (a) L'expression précédente montre, comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, que la fonction f' est du signe de $4-t$. Ainsi, elle est croissante sur $[0;4]$ puis décroissante sur $[4;+\infty[$. De plus, f est la composée de la fonction

$$12 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} + 2$$

avec la fonction $t \mapsto \frac{t}{4}$. Comme $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 et par composition des limites on en déduit que

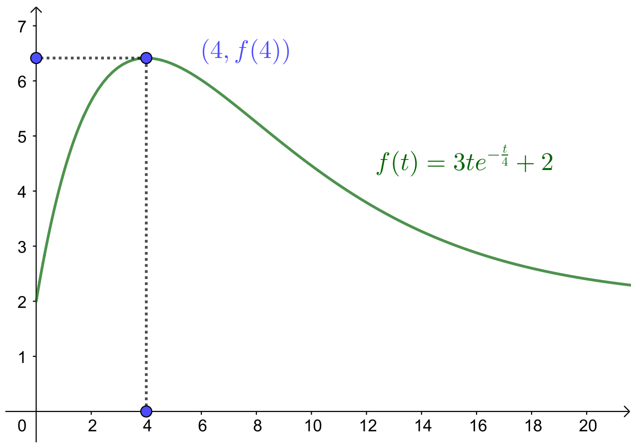
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 2.$$

Nous pouvons donc maintenant donner le tableau de variations de f :

t	0	4	$+\infty$
$f(t)$	2 ↗	$f(4)$	↘ 2

(b) D'après le tableau de variations, la fonction f atteint son maximum en $t = 4$. L'énoncé ne précisant pas de méthode pour obtenir une valeur approchée, nous pouvons nous contenter de calculer la valeur à la calculatrice, ce qui donne

$$f(4) \approx 6,42.$$



■

CHAPITRE 4

TERMINALE

4.1 Le programme

Le programme de Terminale concernant les fonction est riche. Pour simplifier, nous omettrons la partie concernant les suites. Rappelons qu'il y a, en plus de la spécialité mathématiques, deux options concernant les mathématiques en classe de Terminale. L'option "Mathématiques complémentaires" ne comporte pas de contenu concernant les fonctions distinct de celui de spécialité, mais va plus loin sur certains points en donnant des idées de démonstrations et en considérant des exemples plus poussés. Quant à l'option "Mathématiques expertes", elle ne comporte pas d'analyse. Nous nous contenterons donc de parcourir le programme de spécialité.

1) Limites des fonctions.
Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$ ou en un point, asymptote parallèle à un axe de coordonnées ;
- Limites des fonctions de référence ;
- Limites et comparaison ;
- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une fonction en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations, encadrements ou la factorisation du terme prépondérant ;
- Faire un lien entre asymptote parallèle à un axe et limite.

2) Compléments sur la dérivation.
Contenus

- Composée de deux fonctions, dérivée ;
- Dérivée seconde d'une fonction ;
- Fonction convexe sur un intervalle : position relative de la courbe et des sécantes, équivalence avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f' et la positivité de f'' ;
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée ;

- Calculer la dérivée, étudier les limites et dresser le tableau de variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence ;
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction ;
- Esquisser l'allure de la courbe représentative de f à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'' ;
- Lire sur une représentation graphique de f, f' ou f'' les intervalles où f est convexe, concave ou ses points d'inflexion.

3) Continuité des fonctions d'une variable réelle.
Contenus

- Fonction continue en un point, sur un intervalle, toute fonction dérivable est continue ;
- Image d'une suite convergente par une fonction continue ;
- Théorème des valeurs intermédiaires, cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation $f(x) = k$, existence, unicité, encadrement ;
- Pour une fonction f continue d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

4) Fonction logarithme.
Contenus

- Fonction logarithme construite comme réciproque de la fonction exponentielle ;
- Propriétés algébriques du logarithme ;
- Limites en 0 et en $+\infty$, variations et courbe représentative ;
- Croissance comparée avec $x \mapsto x^n$.

Compétences attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation ou une inéquation ;
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.

5) Fonctions sinus et cosinus.
Contenus

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- Résoudre une équation de la forme $\cos(x) = a$ ou une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi;\pi]$;
- Dans le cadre de la résolution d'un problème, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques.

6) Primitives, équations différentielles.
Contenus

- Équation différentielle $y' = f$, notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle, différence de deux primitives d'une même fonction ;

- Primitives des fonctions de référence ;
- Équation différentielle $y' = ay$, équation différentielle $y' = ay + b$.

Compétences associées

- Calculer une primitive en utilisant des fonctions de référence et des fonctions de la forme $v \times (u' \circ v)$;
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$), déterminer une solution particulière constante et en déduire toutes les solutions.

7) Calcul intégral.
Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment comme aire sous la courbe et notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
- Lien avec les primitives de F ;
- Toute fonction continue sur un segment admet des primitives ;
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue quelconque par les primitives ;
- Linéarité, positivité, relation de Chasles ;
- Valeur moyenne d'une fonction ;
- Intégration par parties.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne ;
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties ;
- Majorer ou minorer une intégrale à partir d'une majoration ou d'une minoration de fonction ;
- Calculer l'aire délimitée par deux courbes ;
- Étudier une suite d'intégrales ;
- Interpréter une intégrale dans des contextes issus d'autres disciplines.

Comme nous le verrons, l'année de Terminale est l'occasion d'introduire enfin tous les outils nécessaires à l'étude des fonctions d'une variable réelle. Grâce à cela, il sera possible de donner des démonstrations de la plupart des résultats admis les années précédentes.

4.2 Limites des fonctions

La notion la plus fondamentale de l'analyse est celle de limite. C'est une notion difficile à saisir, aussi est-il important de l'introduire progressivement et avec force exemples pour l'illustrer.

4.2.1 Les différents types de limite

On pourra par exemple commencer par les limites à l'infini, pour lesquelles la notion a déjà été introduite dans le cadre des suites.

Définition 4.1 (Limite infinie à l'infini). Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si f peut prendre des valeurs positives arbitrairement grandes quand x est grand. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il existe $b \geqslant a$ tel que $f(x) \geqslant M$ pour tout $x \geqslant b$. On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si f peut prendre des valeurs négatives arbitrairement grandes quand x eſt grand. Plus précisément, si pour tout $M < 0$, il exiſte $b \geqslant a$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \geqslant b$. On note alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Soit g une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b[$.

- On dit que $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si f peut prendre des valeurs arbitrairement grandes quand x prend de grandes valeurs négatives. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il exiſte $b \leqslant a$ tel que $f(x) \geqslant M$ pour tout $x \leqslant b$. On note alors
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si f peut prendre des valeurs négatives arbitrairement grandes quand x prend de grandes valeurs négatives. Plus précisément, si pour tout $M < 0$, il exiſte $b \leqslant a$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \leqslant b$. On note alors
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Remarque. La définition précise à l'aide des intervalles n'eſt pas vraiment exigible. Rien n'empêche cependant de la donner. D'une part pour que les élèves comprennent que la définition n'eſt pas une "arnaque", ce qui eſt souvent le cas quand on utilise des expressions du type "arbitrairement grand" ou "aussi grand qu'on veut". D'autre part parce que cela permet de traiter rigoureusement quelques exercices simples (voir ci-dessous) plutôt que de tout admettre.

Les fonctions de référence permettent, comme toujours, d'illuſtrer la notion :

Exercice 4.2.1. *Démontrer les assertions suivantes :*

1) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$;
2) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$;
3) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
4) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Correction.

1) Fixons $M > 0$. Alors, pour tout $x \geqslant \sqrt{M}$, $x^2 \geqslant M$, d'où la première limite. De plus, pour tout $x \leqslant -\sqrt{M}$, $x^2 \geqslant M$, d'où la seconde limite.
2) Fixons $M > 0$. Alors, pour tout $x \geqslant \sqrt[3]{M}$, $x^3 \geqslant M$, d'où la première limite. De plus, si $M < 0$, alors pour tout $x \leqslant \sqrt[3]{M}$, $x^3 \leqslant M$, d'où la seconde limite.
3) Soit $M > 0$. Alors, pour tout $x \geqslant M^2$, $\sqrt{x} \geqslant L$, d'où le résultat.
4) Posons $f(x) = e^x - x$. Alors,
$$f'(x) = e^x - 1.$$
Comme la fonction exponentielle eſt croissante et que $e^0 = 1$, on voit que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x$. En particulier, étant donné $M > 0$, $e^x \geqslant M$ pour tout $x \geqslant M$, d'où le résultat.

■

L'absence de la fonction inverse dans l'exercice précédent peut permettre de susciter l'interrogation des élèves et de les mener à deviner qu'il doit exiſter d'autres notions de limite. C'eſt alors le moment de les introduire.

Définition 4.2 (Limite finie à l'infini). Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$. On dit que f tend vers un réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche arbitrairement près de ℓ quand x prend de grandes valeurs positives. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b \geqslant a$ tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ quand $x \geqslant b$. On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, a]$. On dit que f tend vers un réel ℓ quand x tend vers $-\infty$ si $f(x)$ se rapproche arbitrairement près de ℓ quand x prend de grandes valeurs négatives. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b \leqslant a$ tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ quand $x \leqslant b$. On note alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell.$$

Remarque. Ici, la définition avec des ϵ est moins limpide que dans le cas des limites infinies. Nous la donnons tout de même pour montrer qu'il est possible d'être rigoureux en Terminale.

Il est maintenant possible de traiter la fonction inverse.

Exercice 4.2.2. *Montrer que*

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$;

2) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$

Correction. 1) Soit $\epsilon > 0$. Alors, pour $x \leqslant -\frac{1}{\epsilon}$, on a

$$-\epsilon < \frac{1}{x} < 0 < \epsilon,$$

d'où le premier résultat. De même, pour $x \geqslant \frac{1}{\epsilon}$, on a

$$-\epsilon < 0 < \frac{1}{x} < \epsilon,$$

d'où le second résultat.

2) Soit $\epsilon > 0$. Comme l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $M > 0$ tel que $e^x > \frac{1}{\epsilon}$ dès que $x > M$. Mais alors, en utilisant le fait que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on a

$$-\epsilon < 0 < e^{-x} = \frac{1}{e^x} < \epsilon.$$

Par conséquent, dès que $x < -M$, $-x > M$ donc

$$-\epsilon < e^{-(-x)} = e^x < \epsilon,$$

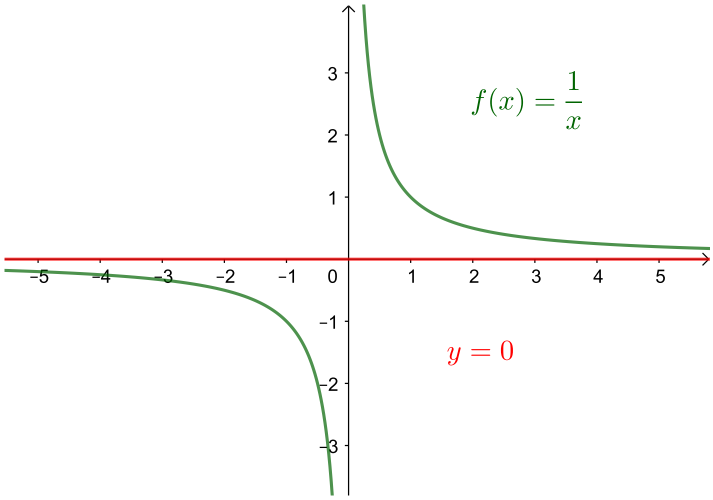
d'où le résultat.

■

Cet exercice est l'occasion d'interpréter graphiquement le résultat pour commencer à introduire le vocabulaire des asymptotes.

Définition 4.3. On dit que la courbe représentative de f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ si f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.

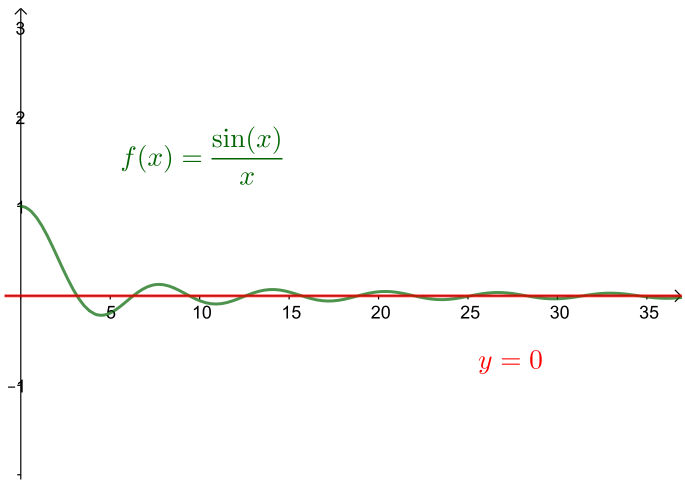
La fonction inverse fournit un exemple de choix avec l'axe des abscisses comme asymptote oblique :



Remarque. Il peut être bon de faire remarquer qu'une asymptote horizontale n'est pas toujours une droite « dont la courbe s'approche sans jamais l'atteindre », comme on le croit parfois. L'exemple suivant le montre bien : il suffit de considérer la courbe représentative de la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On montre en utilisant le Théorème des gendarmes (voir le Propriété 4.10) que f tend vers 0 en $+\infty$, et donc que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. Cependant, on voit que $\mathcal{C}_f$ coupe son asymptote une infinité de fois :



Reste le problème de comprendre, par exemple, le comportement de la fonction inverse autour de 0, qui nécessite une notion différente de limite.

Définition 4.4 (Limite infinie en un point). Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures si $f(x)$ prend des valeurs positives arbitrairement grandes quand x s'approche de a. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) > M$ pour tout $x \in]a;c[$. On note alors
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$
- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures si $f(x)$ prend des valeurs négatives arbitrairement grandes quand x s'approche de a. Plus précisément, si pour tout $M < 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) < M$ pour tout $x \in]a;c[$. On note alors
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers b par valeurs inférieures si $f(x)$ prend des valeurs positives arbitrairement grandes quand x s'approche de b. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) > M$ pour tout $x \in]c;b[$. On note alors

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty.$$

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers b par valeurs inférieures si $f(x)$ prend des valeurs négatives arbitrairement grandes quand x s'approche de a. Plus précisément, si pour tout $M < 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) < M$ pour tout $x \in]c;b[$. On note alors

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty.$$

Nous pouvons ainsi compléter l'étude des limites des fonctions de référence :

Exercice 4.2.3. *Montrer que*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Démonstration. Soit $M < 0$. Alors si $x \in [-\frac{1}{M};0[$,

$$\frac{1}{x} < M,$$

d'où le premier résultat. De même, si $M > 0$ et $x \in]0;\frac{1}{M}[$, alors

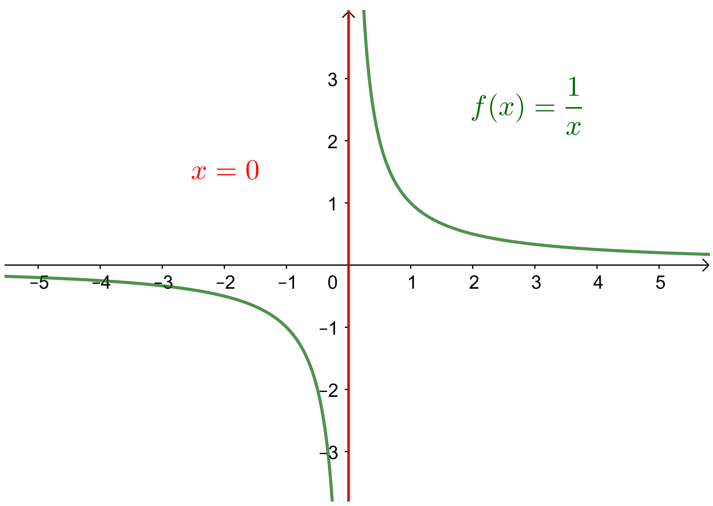
$$\frac{1}{x} > M,$$

d'où le second résultat. ■

Là encore, la visualisation graphique du résultat suggère la notion d'asymptote verticale.

Définition 4.5. On dit que la courbe représentative de f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures ou inférieures.

La fonction inverse fournit à nouveau le cas d'école, l'axe des ordonnées étant asymptote verticale :



Pour terminer la définition des limites, il reste à traiter le cas d'une limite finie en un point. C'est le plus compliqué à écrire, et celui sur lequel les calculs ne porteront jamais. C'est néanmoins en un sens le plus important puisqu'il permet de définir la notion de continuité.

Définition 4.6. Soit $f :]a;b[\to \mathbf{R}$ une fonction et soit ℓ un nombre réel.

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand x s'approche de a. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ dès que $x \in]a;c[$. On note alors
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$
- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers b par valeurs inférieures si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ quand x s'approche de b. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ dès que $x \in]c;b[$. On note alors
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell.$$
- Si $c \in]a;b[$, on dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers c si f a pour limite ℓ quand x tend vers c à la fois par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. On note alors
$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell.$$

À ce stade, il est difficile de donner des exercices puisque les élèves ne sont pas censés calculer des limites directement à partir de la définition. Les exemples des fonctions de référence suffiront pour cela. Par ailleurs, maintenant que nous disposons de la notion de limite, il est possible de compléter les tableaux de variations des fonctions, ce que nous avions déjà fait par anticipation.

4.2.2 Calculer une limite

Pour calculer la limite d'une fonction donnée explicitement, il existe plusieurs méthodes. Celles-ci sont données à la façon d'un catalogue, et sans démonstration en l'absence d'une définition rigoureuse de la limite. Nous donnerons tout de même des éléments de preuve utilisant la définition avec des intervalles.

Propriété 4.7 (Opérations sur les limites) Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et soit a un point de I, ou bien $\pm\infty$. On suppose que f et g tendent respectivement vers ℓ et ℓ' quand x tend vers a, où ℓ et ℓ' peuvent être des nombres réels ou $\pm\infty$. Alors,

1) $f + g$ tend vers $\ell + \ell'$, avec les conventions suivantes :
$$\begin{aligned} \text{fini} + (+\infty) &= +\infty \\ \text{fini} + (-\infty) &= -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

2) $f \times g$ tend vers $\ell \times \ell'$, avec les conventions suivantes :
$$\begin{aligned} \text{fini } \times (+\infty) &= \text{sgn } \infty \\ \text{fini } \times (-\infty) &= -\text{sgn } \infty \\ (+\infty) \times (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) \times (-\infty) &= +\infty \\ (+\infty) \times (-\infty) &= -\infty, \end{aligned}$$

où “*sgn*” désigne le signe de la limite finie.

3) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ tend vers $\frac{1}{\ell'}$, avec les conventions suivantes :

$$\frac{1}{+\infty} = 0\,;\ \frac{1}{-\infty} = 0\,;\ \frac{1}{0^+} = +\infty\,;\ \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

où 0^+ signifie que $f(x)$ est positif quand x est proche de 0 et 0^- signifie que $f(x)$ est négatif quand x est proche de 0.

4) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$ avec les conventions précédentes.

Dans tous les cas qui ne sont pas mentionnés dans les conventions ci-dessus, le résultat dépend de la situation (il peut même ne pas y avoir de limite du tout) et l'on dit qu'on a une *forme indéterminée*.

Démonstration. La preuve de ces résultats ne présente en fait aucune difficulté. Elle est par contre fastidieuse à cause des nombreux cas possibles. Nous laisserons donc au lecteur le soin de les rédiger en détails s'il en ressent la nécessité. ■

Il est également parfois utile de composer deux limites. Comme la notion de composée n'a pas encore été introduite, nous utiliserons directement la définition.

PROPRIÉTÉ 4.8 (Limite d'une composée) Soit f et g deux fonctions. Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et si $g(x)$ tend vers ℓ' quand x tend vers ℓ, alors $g(f(x))$ tend vers ℓ' quand x tend vers a.

Démonstration. Encore une fois, le résultat est naturel et la preuve consiste essentiellement à recopier les définitions des différents types de limite. Toutefois, la distinction des cas en rendrait la rédaction fastidieuse. ■

Dans la **Propriété** 4.7 apparaissent des *formes indéterminées*. Il est important d'insister sur le fait que ce terme ne signifie pas qu'on *ne peut pas* savoir quel est le résultat mais simplement qu'on ne peut pas savoir **sans calcul supplémentaire** quel est le résultat. En fait, une même forme indéterminée peut donner plusieurs résultats différents selon la situation. Voici un exemple :

Exercice 4.2.4. *On considère les deux fonctions $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.*

1) Donner les limites en $+\infty$ de f et g.

2) Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\frac{f}{g}\,;\ \frac{g}{f}\,;\ \frac{f}{f}$$

Correction. 1) On sait, car ce sont des fonctions de référence, que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g}{f} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{f} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

■

La levée de l'indétermination se fait en général en factorisant le terme dominant ... mais encore faut-il savoir lequel c'est ! Pour cela, on utilisera les *croissances comparées*. Pour l'instant, nous n'avons que la fonction exponentielle à comparer :

Théorème 4.9 (Croissance comparée avec la fonction exponentielle) La fonction exponentielle croît plus vite en $+\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

De même, la fonction exponentielle décroît plus vite en $-\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration. Notons que la démonstration de ce résultat est mentionnée dans le programme. L'idée de la preuve sera de comparer la fonction qui nous intéresse à une fonction plus simple. Ceci peut se faire par récurrence avec l'hypothèse de récurrence

$$H_n : e^x \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$

Nous avons déjà démontré H_0 puisque nous avons vu dans l'exercice 4.2.1 que $e^x \geqslant x+1 \geqslant x$. Supposons H_n démontrée et posons

$$g(x) = e^x - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Alors,

$$g'(x) = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui est positif pour $x \geqslant 0$ d'après H_n. Ainsi, g est croissante et comme $g(0) = 1$, on a bien le résultat.

Maintenant, quelque soit $M > 0$, pour $x \geqslant ((n+1)!M)$ on a

$$\frac{e^x}{x^n} \geqslant \frac{x}{(n+1)!} \geqslant M,$$

d'où le résultat. ∎

Au-delà de ces résultats, on peut tenter de comparer l'expression de f à celle de fonctions dont la limite est connue. On dispose pour cela d'un résultat bien utile :

Théorème 4.10 (Théorèmes de comparaison) Soient f, g et h des fonctions définies sur un même intervalle I, et soit a un point de I.

1) Si $\lim\limits_{x\to a} g = +\infty$ et $g \leqslant f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f = +\infty$;
2) Si $\lim\limits_{x\to a} h = -\infty$ et $f \leqslant h$, alors $\lim\limits_{x\to a} f = -\infty$;
3) Si $\lim\limits_{x\to a} g = \ell = \lim\limits_{x\to a} h$ et $g \leqslant f \leqslant h$, alors $\lim\limits_{x\to a} f = \ell$.

La dernière propriété ci-dessus est souvent appelée Théorème des gendarmes.

Démonstration. Afin de ne pas avoir à distinguer si les limites sont par valeurs inférieures ou supérieures à chaque fois, nous utiliserons un vocabulaire plus lâche pour la preuve.

1) Soit $M > 0$. On sait que pour x suffisamment proche de a, $g(x) \geqslant M$, donc pour x suffisamment proche de a,
$$f(x) \geqslant g(x) \geqslant M,$$
ce qu'il fallait démontrer.

2) Soit $M < 0$. On sait que pour x suffisamment proche de a, $g(x) \leqslant M$, donc pour x suffisamment proche de a,
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant M,$$
ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit $\epsilon > 0$. Pour x suffisamment proche de a, on a $g(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ et de même pour $h(x)$. En particulier,
$$\ell - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \epsilon$$
donc pour x suffisamment proche de a, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$, ce qu'il fallait démontrer.

■

Voici à titre d'illustration un exercice utilisant ce résultat :

Exercice 4.2.5. *Pour un réel x, on note $\mathbf{E}(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique nombre entier tel que*
$$\mathbf{E}(x) \leqslant x < \mathbf{E}(x) + 1.$$

1) *Montrer que pour tout réel x,*
$$x - 1 < \mathbf{E}(x) \leqslant x.$$

2) *En déduire que*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(x)}{x} = 1.$$

3) *Calculer*
$$\lim_{x \to 0^+} x\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Correction. 1) On sait déjà par définition de la partie entière que $\mathbf{E}(x) \leqslant x$. De plus, en soustrayant 1 aux deux membres de l'inégalité $x < \mathbf{E}(x) + 1$, on obtient $x - 1 < \mathbf{E}(x)$, ce qui conclut la preuve.

2) D'après la question précédente,
$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} < \frac{\mathbf{E}(x)}{x} \leqslant \frac{x}{x} = 1.$$
Comme les deux extrémités de l'inégalité tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, il en est de même pour le terme du milieu par le Théorème des gendarmes 4.10.

3) On peut écrire
$$x\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right).$$
Comme $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, on en déduit par composition des limites que
$$\lim_{x \to 0^+} x\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

■

4.3 Compléments sur la dérivation

4.3.1 Fonction composée

En classe de Terminale, l'étude de la dérivation est complétée par la formule qui permet de retrouver la plupart des dérivées enseignées en première. Ceci nécessite l'introduction d'une nouvelle opération sur les fonctions : la composition.

Définition 4.11. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $g : J \to \mathbf{R}$ une autre fonction. Si pour tout x de I, $f(x)$ est dans J, alors on définit une fonction $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Elle est appelée *composée* de g et f.

Le seul résultat concernant cette définition est le suivant, qui est crucial à la fois pour de nombreux calculs de dérivées mais aussi pour le calcul intégral, puisque c'est l'origine de l'*intégration par parties* (voir **Propriété** 4.51) :

> **Propriété 4.12** Soient f et g deux fonctions dérivables telles que leur composée est bien définie. Alors, $g \circ f$ est dérivable et
>
> $$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x).$$

Démonstration. Nous devons déterminer la limite quand h tend vers 0 de

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}.$$

Pour cela, posons $k = f(a+h) - f(a)$. Comme f est dérivable, elle est continue [1], donc k tend vers 0 quand h tend vers 0. De plus,

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k}\frac{k}{h}.$$

Par composition des limites (**Propriété** 4.8),

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+h) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)),$$

tandis que

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

La limite d'un produit étant le produit des limites quand les deux limites sont finies (**Propriété** 4.7), on a le résultat. ■

Il est facile d'imaginer des fonctions sur lesquels faire s'entraîner les élèves, en combinant toutes les fonctions de référence. Nous laissons ce soin au lecteur.

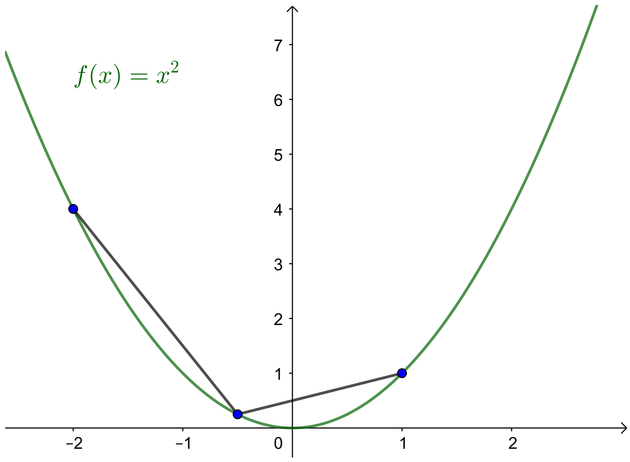
4.3.2 Convexité

Le reste du programme concernant la dérivation ne consiste pas en de nouvelles notions, mais en l'application des outils disponibles à une propriétés très importante des fonctions : la *convexité*. Le programme demande explicitement d'aborder la convexité par sa caractérisation géométrique. Rappelons pour cela qu'une *sécante* à une courbe est un segment reliant deux points de la courbe.

Définition 4.13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* si la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses sécantes.

La fonction carré donne un bon exemple pour visualiser la situation :

1. Nous anticipons ici légèrement sur le chapitre suivant (voir la **Propriété** 4.22)



Si cette définition est visuelle, elle difficile à exploiter en l'état. Il faut donc la réinterpréter de façon calculatoire :

> **Propriété 4.14** Une fonction est convexe si et seulement si pour tous a, b dans I et tout $0 < \lambda < 1$,
> $$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Démonstration. Posons
$$c = \lambda a + (1-\lambda)b,$$
qui est un point de l'intervalle $]a;b[$. Alors, $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ est l'ordonnée du point du segment passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et d'abscisse c. Comme ce segment est une sécante, il est au-dessus de la courbe représentative de f, d'où l'inégalité.

Réciproquement, si cette inégalité est vérifiée pour tous a et b, alors le même raisonnement montre que la courbe représentative de f est en-dessous de toutes ses sécantes, donc que f est convexe. ■

C'est la **Propriété** 4.14 qui est cruciale pour les applications. Elle n'est cependant pas plus facile à vérifier que la définition graphique. Heureusement, la dérivation fournit l'outil adéquate pour caractériser la convexité. L'important est de bien insister sur le fait qu'il faut une hypothèse en plus sur la fonction considérée [2] : la dérivabilité !

> **Théorème 4.15** Soit f une fonction définie sur un intervalle et dérivable. Alors,
>
> 1) f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante ;
>
> 2) f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes ;
>
> 3) Si f' est dérivable, alors f est convexe si et seulement si la dérivée $(f')'$ de f' est positive.

La preuve de ce résultat est admise, pour plusieurs raisons. La principale est qu'elle nécessite le Théorème des accroissements finis. La seconde est qu'il faut également utiliser une autre caractérisation de la convexité, appelée *inégalité des pentes*. Comme elle n'est pas plus difficile que les autres, on peut envisager de la donner en exercice.

2. Rappelons qu'une fonction convexe est automatiquement continue et dérivable à droite et à gauche en tout point. Cela se démontre aisément en utilisant la propriété de l'Exercice 4.3.1

Exercice 4.3.1. *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Pour un point a de I, on définit une fonction $g_a : I \to \mathbf{R}$ par*

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1) *Comparer $g_a(x)$ et $g_x(a)$.*

2) *On suppose que f est convexe.*

   (a) *Soient $a < x < y$, montrer que*

$$f(x) \leqslant \frac{x-a}{y-a} f(y) + \frac{y-x}{y-a} f(a).$$

   (b) *Soient maintenant $x < a < y$, montrer de même que*

$$f(x) \leqslant \frac{a-x}{y-a} f(y) + \frac{y-x}{y-a} f(a).$$

3) *En déduire que g_a est une fonction croissante.*

Correction. 1) On a

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = g_x(a).$$

2) (a) Posons $\lambda = \frac{y-x}{y-a}$. C'est un nombre compris entre 0 et 1 par hypothèse, et

$$\lambda a + (1-\lambda) y = \frac{y-x}{y-a} a + \frac{x-a}{y-a} y = \frac{ya - xa + xy - ya}{y-a} = x.$$

Le résultat suit donc de la convexité de f.

(b) Le raisonnement est le même qu'à la question précédente, excepté qu'il faut cette fois poser $\lambda = \frac{y-x}{y-a}$.

3) Soit $x < y$. Supposons que $a < x$. Alors, d'après une question précédente,

$$\begin{aligned}
g_a(x) &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(a)}{x-a} \\
&\leqslant \frac{f(y)}{y-a} + \frac{y-x}{(y-a)(x-a)} f(a) - \frac{f(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(y)}{y-a} + \frac{y-x-(y-a)}{(y-a)(x-a)} f(a) \\
&= \frac{f(y)}{y-a} - \frac{f(a)}{y-a} \\
&= g_a(y).
\end{aligned}$$

On procède de même dans les cas $x < a < y$ et $x < y < a$.

∎

Démonstration du Théorème 4.15. Si f est une fonction convexe et dérivable, considérons deux points x et y de I tels que $x < y$. Alors, pour tout $a \in]x;y[$, l'inégalité $g_x(a) < g_x(y)$ donne

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Le membre de gauche converge vers $f'(x)$ quand a tend vers x, d'où

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

De même, l'inégalité $g_x(y) = g_y(x) \leqslant g_y(a)$ donne

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(a)-f(y)}{a-y}.$$

Le membre de droite converge vers $f'(y)$ quand a tend vers y, d'où

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'(y)$$

et on conclut donc que f' est croissante.

Réciproquement, supposons f' croissante et considérons deux points a et b de I avec $a < b$. Soit $\lambda \in]0;1[$ et $c = \lambda a + (1-\lambda)b$. Alors, d'après le Théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in]a;c[$ et $\beta \in]c;b[$ tels que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\beta).$$

Par croissance de f', $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$, donc

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

En multipliant par $c-a$ (qui est non-nul) et en agençant les termes, cette inégalité devient

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

D'après la **Propriété** 4.14, ceci implique que f est convexe, ce qu'il fallait démontrer.

L'équivalence du second et du troisième point est, quant à elle, très simple. En effet, si f' est dérivable, alors elle est croissante si et seulement si sa dérivée est positive. ■

La dernière caractérisation est l'occasion d'introduire un peu de vocabulaire concernant la dérivée seconde.

Définition 4.16. Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Si la fonction dérivée f' est elle-même dérivable, on dit que f est *deux fois dérivable* et on note f'' la dérivée de f', appelée *dérivée seconde* de f.

Grâce à ce critère, on peut en particulier traiter le cas des fonctions de référence. Profitons de l'occasion pour introduire la notion de concavité.

Définition 4.17. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *concave* si la courbe représentative de f est en-dessous de toutes ses tangentes. De façon équivalente, f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Exercice 4.3.2. *Pour les fonctions carré, cube, racine carrée et inverse, dire sur quels intervalles elles sont convexes.*

Correction. Commençons par la fonction carré. Elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est $x \mapsto 2$, qui est positive. Ainsi, la fonction carré est convexe sur $\mathbf{R}$.

De même, la fonction racine carrée est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée seconde est

$$x \mapsto \frac{-1}{4\sqrt{x^2}^3},$$

qui est négative. Ainsi, la fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.

La fonction cube est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est $x \mapsto 6x$, qui est positive sur $[0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$. Ainsi, la fonction cube est convexe sur $[0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;0]$.

La fonction inverse est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est

$$x \mapsto \frac{2}{x^3},$$

qui est positive sur $]0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0[$. Ainsi, la fonction inverse est convexe sur $]0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0[$. ■

Cet exercice met en lumière, dans le cas de la fonction cube, le point où la convexité se change en concavité.

Définition 4.18. Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction. S'il existe $a < c < b$ tel que

- f est convexe sur $[a;c]$ et concave sur $[c;b]$;
- Ou bien f est concave sur $[a;c]$ et convexe sur $[c;b]$

alors f est appelé *point d'inflexion de f*.

L'une des applications classiques des fonctions convexes est la démonstrations d'inégalités entre différents types de moyennes. En voici un échantillon sous forme d'exercice, incluant en particulier l'inégalité arithmético-géométrique explicitement mentionnée dans le programme.

Exercice 4.3.3. *1) On se fixe des nombres réels $x_1, \cdots, x_n$.*

(a) Justifier que

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}}{n}.$$

*(b) En déduire l'*inégalité arithmético-géométrique *: pour tous nombres réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,*

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

(c) En déduire les inégalités suivants :

- $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$;
- $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$;
- *Pour tout entier naturel n, $(n!)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n+1}{2}$.*

Correction. 1) On peut procéder par récurrence sur n avec l'hypothèse de récurrence

$$H_n : \text{« L'inégalité est vraie pour } n \text{ réels. »}$$

On remarque que H_2 est vraie par convexité de la fonction exponentielle. Supposons maintenant H_n vraie pour un $n \geqslant 2$. Alors,

$$\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}}{n+1} = \lambda y + (1-\lambda)x_{n+1}$$

avec $\lambda = \frac{n}{n+1}$ et $y = x_1+\cdots+x_n$. Par convexité de la fonction exponentielle, on a alors

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}} \leqslant \frac{n}{n+1}e^y + \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1}.1$$

et il suffit d'appliquer H_n au premier terme de la somme pour conclure.

2) Il faut ici admettre que pour tout nombre réel positif a, il existe un réel x tel que $a = e^x$. En posant alors $a_i = e^{x_i}$ pour tout i, on a alors

$$\begin{aligned}\frac{a_1\cdots a_n}{n} &= \frac{e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}}{n}\\ &\geqslant e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\\ &= (e^{x_1}\cdots e^{x_n})^{\frac{1}{n}}\\ &= (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

3) (a) D'après la question précédente appliquée à a^3, b^3 et c^3, on a

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant (a^3b^3c^3)^{\frac{1}{3}} = abc$$

d'où le résultat en multipliant par 3.

(b) L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui en multipliant par 3 donne $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$. Le résultat suit en élevant au cube.

(c) En posant $a_i = i$ et en appliquant l'inégalité arithémtico-géométrique, on obtient

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1+\cdots+n}{n}.$$

On conclut alors grâce à l'égalité

$$1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

4.4 Continuité des fonctions d'une variables réelle

Le programme de Terminale introduit tous les outils fondamentaux de l'analyse, ce qui permet d'éclairer (à défaut d'avoir pu les démontrer sur le moment) les concepts et résultats vus les année précédentes. L'un de ces outils, central pour le moins, est la notion de continuité.

Définition 4.19. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite *continue en un point* a de I si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Si f est continue en tout point de I, alors elle est dite *continue sur* I.

Comme la dérivabilité, la continuité est important parce qu'elle permet de dire des choses sur la fonction. Encore faut-il cependant savoir que la fonction qu'on étudie est continue. Pour cela, on utilisera les même opérations que sur les limites, ce qui est logique puisque la définition de la continuité repose sur celle de limite.

Propriété 4.20 Soient f et g deux fonctions continues définies sur un *même* intervalle I. Alors,

1) $f+g$ est continue ;
2) $f \times g$ est continue ;
3) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ est continue ;
4) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est continue.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la **Propriété** 4.7 dans chaque cas :

1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$;
2) $\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\times\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(a)\times g(a) = (f\times g)(a)$;
3) $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{g(a)}$;
4) Ce point est une combinaison des deux précédents.

■

Il ne faut pas oublier d'inclure également le cas d'une composée :

> **Propriété 4.21** Soient I et J deux intervalles et soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues telles que la composée $g \circ f$ existe. Alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration. D'après la **Propriété** 4.8,

$$\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(f(a)) = g \circ f(a).$$

■

On peut à l'aide de ce résultat vérifier que certains des fonctions usuelles sont continues : les fonctions polynômes (y compris carré et cube), les fonctions affines et la fonction inverse. Pour la fonction exponentielle et la fonction racine carrée, les choses sont plus délicates. On peut (contre toute logique cela dit) s'appuyer sur le résultat suivant :

> **Propriété 4.22** Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et a un point de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Posons, pour $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Par hypothèse, $\tau(x) \to f'(a)$ quand $x \to a$. Or, on a

$$f(x) = (x - a)\tau(x) + f(a).$$

Ainsi, $f(x) \to f(a)$ quand $x \to a$. ■

Tout ceci nous donne les moyens de montrer qu'une fonction est continue et en particulier les fonctions de référence.

Corollaire 4.23. *Les fonctions affines sont continues, ainsi que les fonctions carré, cube, racine carrée, inverse et exponentielle.*

Démonstration. Nous savons que ces fonctions sont dérivables par la **Propriété** 3.6 et la définition de la fonction exponentielle, le résultat suit donc de la **Propriété** 4.22. ■

Reste à savoir à quoi la continuité peut bien servir. Dans le cadre du programme, elle a deux utilités. La première est l'étude des suites définies par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. La continuité de f permet d'étudier la limite de telles suites, grâce au résultat suivant :

> **Propriété 4.24** Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite qui converge vers un point a de I. Alors,
>
> $$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a).$$

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. On veut montrer que pour n assez grand, $f(u_n)$ est dans $]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$. Or on sait, parce que f est continue, que pour h assez petit, $f(a + h)$ est dans $]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$. Comme la suite converge vers a, on sait également que pour n assez grand, u_n est très proche de a. En particulier, on peut rendre $u_n - a$ aussi petit qu'on veut en prenant n assez grand. Mais alors, en posant $h = u_n - a$ on a que pour n assez grand,

$$f(a) - \epsilon < f(u_n) = f(a + h) < f(a) + \epsilon,$$

d'où le résultat. ■

Remarque. La réciproque de ce résultat est également vraie : si l'image par f de toute suite convergente est une suite convergeant vers l'image de la limite, alors f est continue. C'est ce qu'on appelle la *caractérisation séquentielle de la continuité*.

Voici un exemple d'application de cette propriété.

Exercice 4.4.1. *On considère la fonction* $f : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ *définie par* $f(x) = \sqrt{1+x}$. *Pour un réel* a, *on définit une suite en posant* $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) *Étudier les variations de* f.
2) *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *possède une unique solution sur* $[0;+\infty[$, *qu'on notera* α.
3) *Montrer que si* $a \in [0;\alpha]$, *alors* $u_n \in [0;\alpha]$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.
4) *On pose* $g(x) = f(x) - x$. *Justifier que* g *est continue et déterminer ses variations.*
5) *Pour* $a = 1$, *montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*
6) *Que se passe-t-il si* $a = 2$?

Correction. 1) La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geqslant 0.$$

Par conséquent, f est croissante sur $[0;+\infty[$.

2) Si $f(x) = x$, alors en élevant au carré $1 + x = x^2$, c'est-à-dire $x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et les racines sont donc

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Seule la solution avec un signe + est dans $[0;+\infty[$, c'est donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

3) Nous allons procéder par récurrence avec l'hypothèse de récurrence

$$H_n : \text{« } u_n \in [0;\alpha] \text{ »}.$$

Par hypothèse, H_0 est vraie. Supposons maintenant H_n vraie. Alors, $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et comme f est croissante,

$$0 \leqslant 1 = f(0) \leqslant f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(\alpha) = \alpha.$$

Donc H_{n+1} est vraie.

4) La fonction g est une fonction continue et dérivable comme somme de fonctions dérivables, et

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}.$$

Pour $x \geqslant 0$, cette quantité est toujours négative, donc g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

5) Comme $1 < \alpha$, on sait par une question précédente que $u_n \in [0;\alpha]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, nous avons vu que g est décroissante sur $[0;+\infty[$. Elle ne s'annule qu'en α, donc elle est positive sur $[0;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;+\infty[$. En particulier, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0,$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par α, elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors, comme f est continue, on a

$$f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell,$$

d'où

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6) En procédant comme pour les questions précédentes, on montre que si $a \geqslant \alpha$, alors $u_n \geqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci entraîne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et comme elle est minorée, elle converge. La limite est la même que précédemment puisqu'elle doit, pour les mêmes raisons, vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$.

■

La seconde application est l'inénarrable Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 4.25 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et soit k un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration. La démonstration n'est pas exigible, mais le programme propose de l'explorer pour approfondir ce chapitre. Comme elle accessible avec les notions de Terminale et permet d'utiliser les propriétés des suites, nous la donnons.

Supposons pour simplifier que $f(a) < k < f(b)$, le cas où l'inégalité est inversée se traitant de la même manière, *mutatis mutandis*. Nous allons construire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par *dichotomie* de la façon suivante :

1) On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;

2) Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant k$, alors on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;

3) Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Par définition, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante tandis que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. De plus, la première suite est majorée par b tandis que la seconde est minorée par a. Ainsi, elles convergent toutes les deux vers des limites que nous noterons respectivement ℓ et ℓ'. Pour conclure, remarquons (cela se montre aisément par récurrence) que pour tout entier naturel n,

$$0 < b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, le Théorème des gendarmes (pour les suites) implique que $b_n - a_n$ tend vers 0. Or, nous savons déjà que cette suite tend vers $\ell - \ell'$, d'où il suit que $\ell = \ell'$. Nous pouvons maintenant porter le *coup de grâce* : par la **Propriété** 4.24,

$$f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant k \text{ et } f(\ell) = f(\ell') = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geqslant k$$

donc $f(\ell) = k$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans le second cas, on considère la fonction $x \mapsto -f(x)$, qui vérifie la première condition avec $-k$ à la place de k, et le résultat s'en déduit immédiatement. ■

Ce résultat aura deux applications, l'une pratique et l'autre théorique. L'application pratique est la recherche de solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ (ou plus généralement $g(x) = k$, mais on se ramène en général à un second membre nul). Voici un exemple d'exercice sur ce sujet :

Exercice 4.4.2. *On considère la fonction g définie sur $[-10;+\infty[$ par*

$$g(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 500.$$

On donne son tableau de variations :

x	-10		-1		5		$+\infty$
$g(x)$	-950	$\nearrow$	508	$\searrow$	400	$\nearrow$	$+\infty$

1) *Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $[-10;+\infty[$.*

2) *Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) avec une amplitude de $0,01$.*

Correction. 1) On voit sur le tableau de variations que $g(-10) < 0$ tandis que $g(-1) > 0$. Comme la fonction g est continue car c'est une fonction polynôme, le Théorème des valeurs intermédiaires 4.25 assure que g s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-10;-1]$. Comme de plus g est strictement monotone que $[-10;-1]$, elle s'y annule exactement une fois[3].

Enfin, d'après le tableau de variations, g ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[-1;\infty[$, donc ne s'y annule pas. Ainsi, g s'annule exactement une fois.

2) On peut procéder par dichotomie en utilisant le programme suivant sur Python :

```
def g(x):
    return x**3-6*x*x-15*x+500
A=-10
B=1
E=0.01
while B-A>=E :
    C=(A+B)/2.
    if f(A)*g(C)<=0 :
        B=C
    else :A=C
alpha=round(A,2)
print(alpha)
```

■

Remarque. On pourrait également reprendre l'Exercice 2.3.2 en rendant la résolution plus rigoureuse.

L'application théorique concerne les fonctions strictement monotones et sera nécessaire pour définir la fonction logarithme.

Propriété 4.26 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors, il existe un intervalle J de $\mathbf{R}$ et une fonction $g : J \to \mathbf{R}$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ existent toutes deux et pour tout x de I et tout y de J,

$$f \circ g(x) = x \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

3. Nous anticipons ici d'une certaine façon sur la **Propriété** 4.26 ci-après.

Démonstration. Notons J l'ensemble de tous les réels y tels qu'il existe x pour lequel $y = f(x)$. Si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ sont deux éléments de J avec $y_1 < y_2$ et si $y_3 \in]y_1; y_2[$, considérons la fonction

$$h : x \mapsto f(x) - y_3.$$

Alors, h est continue, $h(x_1) < 0$ et $h(x_2) > 0$ dont par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_3 \in]x_1; x_2[$ tel que $h(x_3) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x_3) = y_3$. Ceci montre que J est un intervalle.

Considérons maintenant un élément $y \in J$ et supposons qu'il existe x et x' distincts dans I tels que

$$f(x) = y = f(x').$$

On peut supposer sans perte de généralité que $x < x'$, mais alors si f est strictement croissante on doit avoir $f(x) < f(x')$ et si f est strictement décroissante on doit avoir $f(x) > f(x')$. Dans les deux cas, on a une contradiction, ce qui signifie qu'il existe un unique x dans I tel que $y = f(x)$.

Nous pouvons donc maintenant définir une fonction $g : J \to \mathbf{R}$ en posant $g(y) = x$, où x est l'unique élément de I tel que $f(x) = y$. Par définition, on a bien $g \circ f(x) = x$. De plus, pour $y \in J$ de la forme $y = f(x)$,

$$f \circ g(y) = f \circ g(f(x)) = f(x).$$

■

Remarque. L'énoncé omet volontairement le mot-clef "*bijective*", qui est la notion sous-jacente à ce résultat mais qui est hors-programme.

4.5 Fonction logarithme

L'année de Terminale est l'occasion d'enrichir encore le répertoire des fonctions de référence, en particulier en introduisant la fonction logarithme. On pourrait la définir via l'intégration, mais le programme suggère de traiter le calcul intégral après la fonction logarithme et impose explicitement d'introduire le logarithme comme réciproque de l'exponentielle. Nous suivrons donc cet ordre.

Propriété 4.27 Pour tout réel strictement positif y, il existe un unique réel x tel que

$$y = e^x.$$

Démonstration. La fonction exponentielle est strictement croissante et continue, donc par la **Propriété** 4.26, il existe une fonction $f : J \to \mathbf{R}$, où J est l'ensemble de réels de la forme e^x. Il nous suffit donc de montrer que $J = \mathbf{R}_+^*$, ce qui se fait en appliquant judicieusement le Théorème des valeurs intermédiaires.

On sait déjà que e^x est strictement positif pour tout x. Considérons maintenant un réel $y > 0$. Comme la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $a > 0$ tel que $e^x > 2y$ dès que $x > a$. De même, comme la fonction exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, il existe $b < 0$ tel que $e^x < \frac{y}{2}$ dès que $x < b$. Considérons maintenant la fonction $h : [b-1; a+1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$h(x) = e^x - y.$$

Alors, h est continue, $h(b-1) < -\frac{y}{2} < 0$ et $h(a+1) > y > 0$, donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [b-1; a+1]$ tel que $h(x) = 0$, c'est-à-dire telle que $e^x = y$. ■

Définition 4.28. La fonction qui a $y > 0$ associe l'unique x tel que $y = e^x$ est appelée *fonction logarithme* et notée

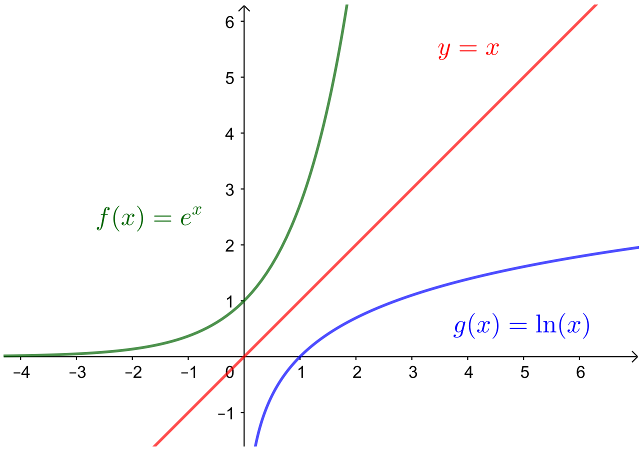
$$\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}.$$

Comme dans le cas des fonctions carré et racine carrée vu en Seconde (voir **Propriété** 2.3), on peut observer que le graphe de la fonction logarithme se déduit graphiquement de celui de la fonction exponentielle.

Propriété 4.29 La courbe représentative de la fonction logarithme est la symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Démonstration. Soit M un point de la courbe représentative de la fonction exp. Ses coordonnées sont donc de la forme (x, e^x). En posant $y = e^x$, ces coordonnées deviennent $(\ln(y), y)$. Le symétrique M' de M par rapport à la première bissectrice des axes a donc pour coordonnées $(y, \ln(y))$, qui appartient bien à la courbe représentative de la fonction ln.

Réciproquement, soit N est un point de la courbe représentative de la fonction ln de coordonnées $(y, \ln(y))$ avec $y > 0$. Alors en posant $x = e^y$, le symétrique de N par rapport à la première bissectrice des axes a pour coordonnées $(\ln(y), y) = (x, e^x)$, qui appartient bien à la courbe représentative de la fonction exp. ∎



L'un des intérêts de la fonction logarithme réside dans ses propriétés vis-à-vis de l'addition, qui découlent immédiatement des propriétés correspondantes de la fonction exponentielle.

Propriété 4.30 Pour tous réels strictement positifs a et b, on a

1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2) $\ln(1) = 0$;
3) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
4) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent de la première, qui se déduit elle-même aisément des propriétés de la fonction exponentielle.

1) Écrivons $a = e^x$ et $b = e^y$. Alors, par la **Propriété** 3.13,
$$ab = e^x e^y = e^{x+y},$$
donc
$$\ln(ab) = \ln\left(e^{x+y}\right) = x + y = \ln(a) + \ln(b).$$

2) On a
$$\ln(1) = \ln(1 \times 1) = \ln(1) + \ln(1) = 2\ln(1),$$
d'où $\ln(1) = 0$.

3) On a
$$\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0,$$
d'où le résultat.

4) C'est une combinaison de la première et de la troisième propriété.

5) On a
$$2\ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{(a)} \times \sqrt{a}) = \ln(a),$$
d'où le résultat.

■

L'autre propriété importante de la fonction logarithme est son lien avec la fonction inverse, qui est utile pour le calcul d'intégrales.

Théorème 4.31 La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. La dérivabilité est admise dans le programme. Pourtant, elle peut se faire simplement en utilisant la dérivabilité de l'exponentielle et permet d'obtenir en même temps l'expression de la dérivée. Nous allons donc en donner une démonstration [4].

Commençons par montrer la dérivabilité en 1. Il faut pour cela considérer le taux d'accroissement
$$\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

En posant $k = \ln(1+h)$, cette expression devient
$$\frac{k}{e^k - 1} = \frac{k-0}{e^k - 1}.$$

Ceci est l'inverse du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0 et converge donc vers
$$\frac{1}{\exp'(0)} = 1$$
quand k tend vers 0 (et donc également quant h tend vers 0 par composition des limites). Soit maintenant $a > 0$, alors
$$\frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} = \frac{\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{h}{a}}\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right).$$

En posant $k = \frac{h}{a}$, ceci devient
$$\frac{1}{a}\frac{\ln(1+k)}{k}$$
qui converge d'après ce qui précède vers $\frac{1}{a}$, ce qu'il fallait démontrer. ■

4. C'est en fait un résultat général pour les fonctions réciproques, mais nous nous restreindrons au cas de la fonction logarithme pour plus de simplicité

Remarque. On peut également déduire la dérivée de la fonction ln de celle de la fonction exp en remarquant que $\exp\circ\ln(x) = x$, donc que

$$\ln'(x)\times\exp\circ\ln(x) = 1.$$

Cependant, pour que ce calcul soit licite il faut déjà savoir (ou admettre) que la fonction ln est dérivable.

Remarque. On peut déduire de ce résultat et de la **Propriété** 4.22 que la fonction logarithme est continue, ce qui n'était pas évident sur la définition !

Maintenant que nous connaissons la dérivée de la fonction logarithme, nous pouvons étudier ses variations.

Propriété 4.32 La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

■

Pour compléter le tableau de variations, il ne manque que les limites :

Propriété 4.33 On a

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty.$$

Démonstration. Soit $M > 0$. La fonction logarithme étant croissante, on a pour tout $x > e^M$,

$$\ln(x) > \ln\left(e^M\right) > M,$$

d'où le premier résultat. Si maintenant $M < 0$, on a pour tout $x < e^M$,

$$\ln(x) < \ln\left(e^M\right) < M.$$

Comme e^M tend vers 0 quand M tend vers $-\infty$, ceci donne le second résultat. ■

Il est maintenant possible de dresser le tableau de variations complet :

x	0		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Il nous reste pour conclure à comparer la croissance du logarithme à celle des fonctions polynomiales.

Propriété 4.34 (Croissances comparées) La fonction ln croît moins vite $+\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to0^+}x^n\ln(x) = 0.$$

Démonstration. Nous allons d'abord considérer le cas $n = 1$. Commençons par remarquer que la fonction logarithme est deux fois dérivable et que

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Par conséquent, ln est une fonction concave, c'est-à-dire que $-\ln$ est une fonction convexe. Il suit que la courbe représentative de la fonction ln est en-dessous de toutes ses tangentes par le Théorème 4.15. En particulier, une équation de la tangente en 1 étant $y = x - 1$, on a pour tout $x > 0$

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

Cette inégalité permet d'obtenir une autre majoration de la façon suivante :

$$\ln(x) = 2\frac{1}{2}\ln(x) = 2\ln(\sqrt{x}) \leqslant 2(\sqrt{x} - 1).$$

Nous pouvons maintenant en déduire que pour $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}.$$

Comme le membre de droite tend vers 0, on peut conclure par le Théorème des gendarmes 4.10. Si maintenant n est un entier naturel quelconque,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{n\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{\ln(x^n)}{x^n} = 0$$

par composition des limites. De même,

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{1}{x^n}}\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = 0$$

par composition des limites. ∎

Nous concluons avec un exemple d'exercice faisant intervenir la fonction logarithme.

Exercice 4.5.1. *Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal (noté* Pa*). La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à* 20×10^{-6} Pa *s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels (notés* dB*). On note* $p_0 = 20\times10^{-6}$*. Pour une pression de* p Pa *s'exerçant sur le tympan, avec* $p \geqslant p_0$*, le niveau sonore perçu est égal à*

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000\times p)\,\mathrm{dB}.$$

1) *Calculer* $f(p_0)$*.*
2) *Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de* 2 Pa *? de* 0,2 Pa *? de* 0,02 Pa *?*
3) *À partir d'un niveau sonore de* 120 dB*, on ressent une douleur. Déterminer la pression* p *correspondant à ce niveau sonore.*
4) *Démontrer que le niveau sonore augmente de* 20 *quand la pression est multipliée par* 10*.*
5) *Pour* $p \geqslant p_0$*, exprimer* $f(100p)$ *en fonction de* $f(p)$*.*

Correction. 1) On calcule

$$f(p_0) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000\times20\times10^{-6}) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(1) = 0.$$

2) Pour une pression de 2 Pa, on a

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(100000) = 100 \text{ dB}.$$

Pour une pression de 0,2 Pa, on a

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10000) = 80 \text{ dB}.$$

Pour une pression de 0,02 Pa, on a

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(1000) = 60 \text{ dB}.$$

3) On a

$$\begin{aligned} f(10 \times p) &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(10 \times 50000 \times p) \\ &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(10) + \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times p) \\ &= 20 + f(p). \end{aligned}$$

4) On a

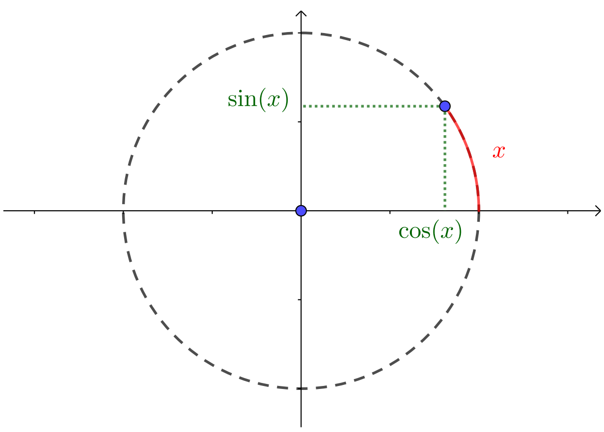
$$\begin{aligned} f(100 \times p) &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(100 \times 50000 \times p) \\ &= \frac{20}{\ln(10)} \ln(100) + \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times p) \\ &= 40 + f(p). \end{aligned}$$

■

4.6 Fonctions sinus et cosinus

Le répertoire des fonctions de référence est complété, après la fonction logarithme, par les fonctions sinus et cosinus. La définition de ces fonctions se fait graphiquement à l'aide du cercle trigonométrique.

Définition 4.35. Soit x un réel et soit M le point du cercle trigonométrique associé [5] à x. On définit le cosinus de x comme étant l'abscisse du point M et le sinus de x comme étant l'ordonnée du point M. On note ces nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$.



5. C'est-à-dire l'unique point du cercle de centre O et de rayon 1 définissant une longueur d'arc (dans le sens direct) égale à x modulo 2π.

Ainsi définie, il n'est pas clair que ces fonctions soient continues, et encore moins dérivables. C'est pourtant le cas. Avant de le prouver, on peut remarquer quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de la définition.

PROPRIÉTÉ 4.36 1) Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, c'est-à-dire que pour tout réel x,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \& \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

2) La fonction cosinus est paire.

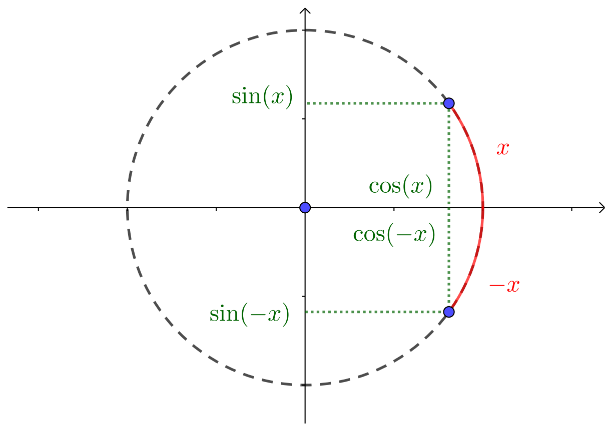
3) La fonction sinus est impaire.

Démonstration. 1) Par définition, les réels x et $x+2\pi$ définissent le même point du cercle trigonométrique. Ainsi leur cosinus et leur sinus sont les mêmes.

2) Le point du cercle trigonométrique correspondant à $-x$ s'obtient à partir du point correspondant à x par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Comme cette transformation ne change pas l'abscisse des points, les cosinus de ces deux nombres sont les mêmes.

3) Le point du cercle trigonométrique correspondant à $-x$ s'obtient à partir du point correspondant à x par réflexion par rapport à l'axe des abscisses. Comme cette transformation change l'ordonnée des points en leur opposée, les sinus de ces deux nombres sont opposés.

Ces deux propriétés se comprennent et se retiennent mieux visuellement :



■

Passons maintenant à la dérivabilité, qui est l'un des résultats les plus importants de ce chapitre.

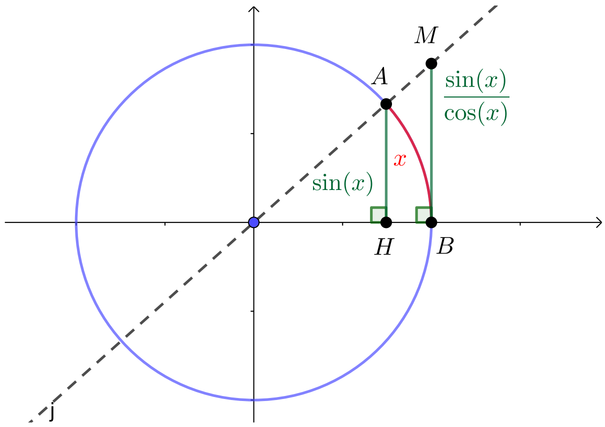
THÉORÈME 4.37 Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus,

$$\cos' = -\sin \quad \& \quad \sin' = \cos.$$

Démonstration. La preuve est hors programme et pourtant accessible à des élèves de Terminale. Commençons par regarder la dérivabilité en 0 de la fonction sinus. Il nous faut calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Pour comprendre la situation, faisons un dessin :



On observe sur cette figure [6] qu'on a l'encadrement, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suit en divisant par $\sin(x)$ (qui est non-nul pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$) que

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)},$$

et en inversant on obtient finalement

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

En admettant que le cosinus tend vers 1 quand x tend vers 0 (ce qui se constate encore une fois bien graphiquement), on conclut que sin est dérivable en 0 et que

$$\sin'(0) = 1 = \cos(0).$$

Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour montrer que la fonction cosinus est elle aussi dérivable en 0. En effet, on sait que

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par opération sur les fonctions dérivables, on en déduit que cos est dérivable en 0 et que

$$\cos'(0) = -2 \times 2 \times \frac{1}{2}\sin'\left(\frac{0}{2}\right)\sin\left(\frac{0}{2}\right) = 0 = -\sin(0).$$

La dérivabilité des fonctions cosinus et sinus en tout point suit maintenant par une petite manipulation trigonométrique. En effet, pour tout a dans $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

et cette quantité a pour limite, d'après les calculs précédents, $\cos(a)$. De même,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\ &= \cos(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

et cette quantité a pour limite, d'après les calculs précédents, $-\sin(a)$. ■

6. Cette observation peut être admise en classe de Terminale. Pour démontrer la première inégalité, il suffit de remarquer que l'arc de cercle reliant A à B (en rouge) est de longueur x tandis que le segment $[AB]$, qui est le plus court chemin de A à B, est l'hypoténuse du triangle AHB, donc de longueur supérieure à $AH = \sin(x)$. Pour montrer la seconde inégalité, on peut par exemple comparer l'aire du secteur angulaire délimité par A et B, qui vaut $\frac{x}{2}$, à celle du triangle OMB, qui vaut $\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$.

Ajoutons qu'une fois connues les limites de $\sin(x)/x$ et de $(\cos(x)-1)/x$, il est possible de lever de nombreuses indéterminations dans les calculs de limite. Voici un exemple d'exercice de ce type.

Exercice 4.6.1. *1) Pour* $t \in \mathbf{R}$*, exprimer* $\cos(t)$ *en fonction de* $\cos(t/2)^2$ *et* $\sin(t/2)^2$.

2) En déduire que pour tout $t \in \mathbf{R}$*,*

$$\cos(t)-1 = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

3) En utilisant le résultat précédent, calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t^2}.$$

4) On considère la fonction $f : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ *définie par* $f(x) = \cos(\sqrt{x})$*. Est-elle dérivable en* 0 *?*

Solution. 1) On a

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \cos\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

2) En utilisant le fait que $1 = \cos(t/2)^2 + \sin(t/2)^2$, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(t)-1 &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2\\ &= -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

3) On écrit

$$\begin{aligned}\frac{\cos(t)-1}{t^2} &= -2\frac{\sin(t/2)^2}{t^2}\\ &= \frac{-1}{2}\frac{\sin(t/2)^2}{(t/2)^2}\\ &= \frac{-1}{2}\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^2.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = t/2$, on a alors

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t^2} = \frac{-1}{2}\left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 = \frac{-1}{2}.$$

4) Par définition, f est dérivable en 0 si la quantité

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$$

admet une limite quand x tend vers 0. Or, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t^2} = \frac{-1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0.

■

Remarque. La troisième question de l'exercice précédent peut se reformuler de la façon suivante :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2}\left(\cos(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\right) = 0.$$

Dans le langage mathématique du supérieur, une quantité qui tend vers 0 quand elle est divisée par t^2 est dite *négligeable devant* t^2 et se note $o(t^2)$. On peut donc écrire

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Autrement dit, nous avons établi de développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0.

Forts de ce résultat, il est possible de donner les tableaux de variations des fonctions trigonométriques, en prenant bien sûr soin de se restreindre à l'intervalle $[0; 2\pi]$ par périodicité.

Propriété 4.38 Le tableau de variations de la fonction cosinus est

x	0		π		2π
$\cos(x)$	1	↘	-1	↗	1

Le tableau de variations de la fonction sinus est

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

Démonstration. Les variations des fonctions suivent du Théorème 4.37 ainsi que des inégalités suivantes, qui se vérifient graphiquement :

- $\sin(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0; \pi]$;
- $\sin(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\pi; 2\pi]$;
- $\cos(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;
- $\cos(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

■

Le programme demande que les élèves soient capables d'étudier des fonctions définies simplement à partir des fonctions trigonométriques. L'exemple le plus simple dans cet ordre idée est la fonction tangente, d'ailleurs explicitement mentionnée comme approfondissement possible. On peut donc envisager de faire d'une pierre deux coups en la traitant en exercice.

Exercice 4.6.2. *Soit x un réel qui n'est pas de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec k un entier impair et soit M le point correspondant du cercle trigonométrique. On note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle trigonométrique au point $(1,0)$ (voir figure ci-dessous). L'ordonnée du point T est noté* $\tan(x)$ *et appelée* tangente *de x.*

1) *Montrer que*
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2) *La fonction* tan *est-elle paire ? Est-elle impaire ?*

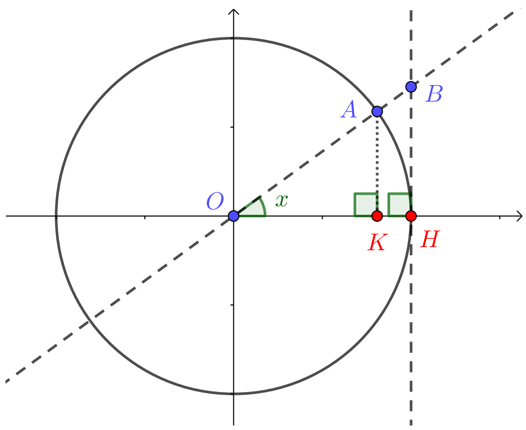
3) *Étudier les variations de la fonction* tan *sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

4) *Déterminer la limite de* $\tan(x)$ *quand x tend vers* $\frac{\pi}{2}$.

5) *En déduire la limite de* $\tan(x)$ *quand x tend vers* $-\frac{\pi}{2}$ *et dresser le tableau de variations de la fonction* tan.

6) *Étudier la convexité de la fonction tangente puis tracer l'allure de sa courbe représentative.*

Correction. 1) Utilisons la figure ci-dessous :



Les droites (AK) et (BH) sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à l'axe des abscisses. On peut donc appliquer le THÉORÈME DE THALÈS pour obtenir
$$BH = \frac{BH}{1} = \frac{BH}{OH} = \frac{AK}{OK} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2) Comme la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on a
$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Ainsi, la fonction tangente est impaire.

3) On calcule
$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

En particulier, ce nombre est toujours strictement positif, donc la fonction tangente est strictement croissante.

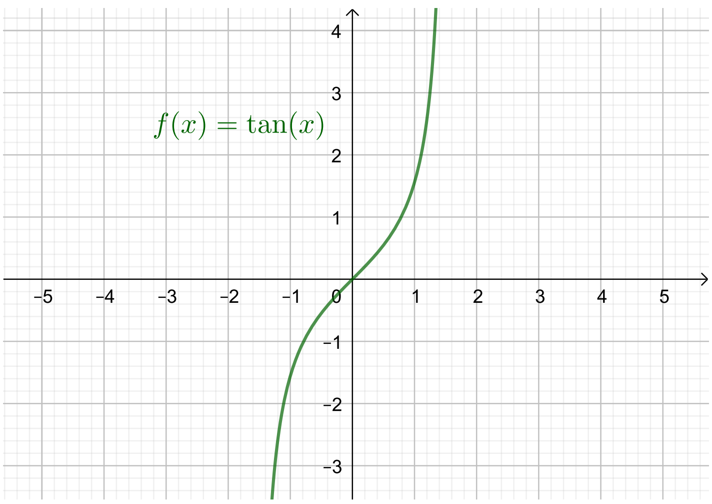
4) Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin(x)$ tend vers 1 tandis que $\cos(x)$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $\tan(x)$ tend vers $+\infty$.

5) Par imparité de la fonction tangente, sa limite en $-\frac{\pi}{2}$ est égale à $-\infty$. Nous pouvons donc maintenant donner son tableau de variations :

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6) Comme la fonction tangente est croissante et à valeurs positives sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, il en est de même pour la fonction $\tan^2$ (car la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$). Donc $\tan'$ est croissante et tan est convexe sur $[0;\frac{\pi}{2}[$.

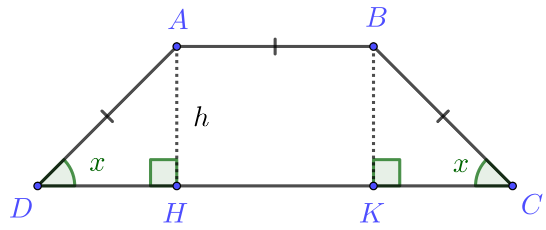
De même, la fonction tangente est croissante et à valeurs négatives sur $]-\frac{\pi}{2},0]$ donc la fonction $\tan^2$ est cette fois décroissante, ce qui signifie que tan est concave sur cet intervalle. Par conséquent, il y a un point d'inflexion en 0.



■

Les fonctions trigonométriques sont particulièrement utiles en géométrie. Voici un exemple de fonctions les faisant intervenir.

Exercice 4.6.3. *On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-dessous, où $AD = AB = BC = 1$. On note x la mesure commune, en radians, des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$.*



1) *Exprimer la hauteur h du trapèze en fonction de x.*

2) *Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze est donnée, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par*

$$\mathcal{A}(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$

3) *Montrer que*

$$\mathcal{A}'(x) = 2\cos(x)^2 + \cos(x) - 1.$$

4) *Factoriser le trinôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire le signe de $\mathcal{A}'(x)$.*

5) *Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est maximale.*

Correction.

1) En se plaçant dans le triangle rectangle ADH, on a

$$h = AH = \sin(x) \times AD = \sin(x).$$

2) On peut calculer l'aire du trapèze en additionnant l'aire des deux triangles rectangles ADH et BCK, qui sont chacune égale à

$$\frac{AH \times DH}{2} = \frac{\cos(x)\sin(x)}{2},$$

et l'aire du rectangle $ABKH$, qui est égale à

$$AB \times KH = h = \sin(x).$$

Ainsi, on a

$$\mathcal{A}(x) = 2 \times \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} + \sin(x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$

3) Il suffit de dériver

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(x) &= \cos(x)(1 + \cos(x)) + \sin(x) \times (-\sin(x)) \\ &= \cos(x) + \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ &= \cos(x) + \cos(x)^2 - (1 - \cos(x)^2) \\ &= 2\cos(x)^2 + \cos(x) - 1.\end{aligned}$$

4) Le discriminant du trinôme est $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$. Les racines sont donc

$$\frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad \& \quad \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2X^2+X-1 &= 2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)\\ &= (2X-1)(X+1).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A}'(x) = (2\cos(x)-1)(\cos(x)+1).$$

Comme $\cos(x)+1$ est toujours positif, $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $2\cos(x)-1$. Sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$, cette dernière expression est positive pour $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$ et négative pour $x \in [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$.

Le tableau de variations de $\mathcal{A}$ suit de la question précédente :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}(x)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	
	0		1

On constate sur le tableau de variations que la fonction $\mathcal{A}$ a pour maximum

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

et que ce dernier est atteint en $x = \frac{\pi}{4}$. ■

4.7 Primitives, équations différentielles

En plus des compléments sur la dérivation, le programme de Terminale aborde la question de l'opération réciproque, c'est-à-dire la recherche de primitive. Pour cela, le programme propose de voir le problème du calcul de primitive comme un cas particulier d'équation différentielle. Cette dernière notion servira donc de fil conducteur, via une définition intuitive comme la suivante :

Définition 4.39. Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée en général y, et qui fait intervenir les dérivées de y.

Le premier exemple, à la fois simple et extrêmement général, est celui de l'équation

$$y' = f.$$

Ici, $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I et on cherche donc une fonction y dont la dérivée est f. Ce problème motive l'introduction d'un vocabulaire approprié.

Définition 4.40. On appelle *primitive* de f toute solution de l'équation différentielle $y' = f$. Autrement dit, toute fonction dont la dérivée est égale à f.

Une équation contient toujours implicitement deux questions, celle de l'existence et celle de l'unicité. Il est possible de les énoncer ensemble ou séparément. Le programme semble suggérer une séparation, mais comme la preuve de l'existence est de toute façon impossible tant que l'intégration n'a pas été traitée, nous les donnerons ensemble.

Théorème 4.41 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f admet au moins une primitive. De plus, si F et G sont deux primitives de f, alors elles diffèrent d'une constante.

Démonstration. L'existence est admise pour l'instant, elle sera démontrée (dans le cas d'une fonction à valeurs positives) à l'aide de l'intégrale (voir le Théorème fondamental de l'analyse 4.47). Quant à l'unicité, remarquons que si F et G sont deux primitives de f, alors

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Or, on sait par la **Propriété** 3.11 qu'une fonction dont la dérivée est nulle est constante, d'où le résultat. ■

Une fois n'est pas coutume, il est bon d'illustrer toute cela à l'aide des fonctions de référence

Propriété 4.42 1) Pour un entier naturel n, les primitives de $x \mapsto x^n$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,$$

où C est un nombre réel.

2) Les primitives de la fonction inverse sont les fonctions

$$x \mapsto \ln(x) + C,$$

où C est un nombre réel.

3) Les primitives de la fonction racine carrée sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

où C est un nombre réel.

4) Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions

$$x \mapsto e^x + C,$$

où C est un nombre réel.

5) Les primitives de la fonction cosinus sont les fonctions

$$x \mapsto \sin(x) + C,$$

où C est un nombre réel.

6) Les primitives de la fonction sinus sont les fonctions

$$x \mapsto -\cos(x) + C,$$

où C est un nombre réel.

Démonstration. Il suffit dans chaque cas de dériver la fonction de l'énoncé et de vérifier que cela donne bien le résultat annoncé. Nous laissons cette vérification au lecteur. ■

Pour poursuivre vers les équations différentielles proprement dites, il faut maintenant considérer l'égalité $y' = ay$. Or cette équation différentielle a déjà été résolue, sans le dire, en classe de première !

Propriété 4.43 Soit a un réel non-nul. Alors, les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions
$$x \mapsto Ce^{ax},$$
où C est un nombre réel.

Démonstration. Le fait que les fonctions de l'énoncé vérifient bien l'équation différentielle est immédiat. De plus, la même preuve que pour le Théorème 3.12 montre que si g est une fonction dérivable telle que $g' = ag$, alors la fonction

$$x \mapsto g(x)e^{-ax}$$

est une fonction constante. Ainsi, les fonctions de l'énoncé sont bien toutes les solutions. ■

Une fois ce rappel effectué, on peut donc aborder l'ajout d'un terme constant. Cela ne modifie cependant pas beaucoup la réponse :

Théorème 4.44 Soit a un réel non-nul et b un réel quelconque. Alors, les solutions de l'équation différentielle
$$y' = ay + b$$
sont les fonctions
$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a},$$
où C est un nombre réel.

Démonstration. Soit f une solution de l'équation différentielle et considérons la fonction $g = f + \frac{b}{a}$. Alors,

$$\begin{aligned} g' &= \left(f + \frac{b}{a}\right)' \\ &= f' \\ &= af + b \\ &= a\left(f + \frac{b}{a}\right) \\ &= ag, \end{aligned}$$

donc par la **Propriété** 4.43, il existe un réel C tel que $g(x) = Ce^{ax}$, d'où le résultat. ■

De nombreuses situations issues de la physique ou de la chimie fournissent des exercices sur les équations différentielles, qui feront en plus intervenir les fonctions exponentielle et logarithme.

Exercice 4.7.1. *Le Carbone 14 (noté C^{14}) est un isotope radioactif du Carbone qui est utilisé pour la datation des restes organiques. Lorsqu'un organisme meurt, le C^{14} se désintègre progressivement en Carbone 12 (noté C^{12}) non-radioactif. Lors de cette désintégration, l'échantillon perd, par unité de temps, une proportion constante d'atomes. Autrement dit, si on note $N(t)$ le nombre d'atomes de C^{14} dans un organisme à l'instant t après sa mort, alors à l'instant $t+h$ la proportion vérifie*

$$\frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \lambda h,$$

où λ est une constante de la nature.

1) *Montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.*
2) *En notant N_0 le nombre d'atomes au moment de la mort de l'organisme, exprimer $N(t)$ en fonction de t.*
3) *Le Carbone 14 a un temps de demi-vie de 5730 ans. Cela signifie qu'au bout de ce temps, le nombre d'atomes a été divisé par 2. En déduire la valeur de λ en année^{-1}.*
4) *Quelle pourcentage de Carbone 14 reste-t-il au bout de 70000 ans ?*

Correction. 1) L'équation de l'énoncé peut s'écrire

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{N(t)} = -\lambda h$$

ce qui donne, pour h non nul,

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda N(t).$$

Le membre de gauche tend vers $N'(t)$ quand h tend vers 0 tandis que le membre de droite ne dépend pas de h. On obtient ainsi l'équation différentielle.

2) On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$. La valeur en 0 d'une telle solution est C, d'où

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

3) On sait que $N(5730) = \frac{N_0}{2}$, d'où en divisant par N_0

$$e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2}.$$

En prenant le logarithme de cette expression il vient $-5730\lambda = -\ln(2)$, ce qui donne finalement[7]

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} \approx 0,00012 \text{ année}^{-1} = 1,2.10^{-4} \text{ année}^{-1}.$$

4) La proportion de Carbone 14 au bout de 70000 ans sera de

$$\frac{N(70000)}{N_0} = e^{-70000\lambda} \approx 0,00021$$

soit 0,021%.

■

7. Dans la mesure où la donnée en années comporte cinq chiffres, seuls les cinq premiers chiffres après la virgule seront significatifs dans la réponse.

4.8 Calcul intégral

Le dernier point du programme de Terminale concernant les fonctions que nous allons considérer est le calcul intégral. Celui-ci présente des difficultés conceptuelles liées à l'absence de construction de l'intégrale de Riemann. En effet, celle-ci nécessite des outils trop poussés pour le lycée (la notion de *continuité uniforme* notamment) mais en son absence, nous en sommes réduits à définir l'intégrale en termes d'aire sous la courbe de la façon suivante :

Définition 4.45. Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et positive. On appelle *intégrale de f entre a et b* et on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Cette définition appelle de nombreux commentaires. Tout d'abord, l'interprétation graphique nécessite de se restreindre aux fonctions positives. Ensuite, l'intérêt d'introduire un tel concept est difficile à expliquer à ce stade. Le lien avec la théorie des probabilités permet peut-être d'interpréter l'intégrale comme une « sorte de somme » (voir la notion de valeur moyenne dans le Théorème 4.53 ci-dessous).

Mais le plus gros problème de cette définition, c'est la question suivante qu'un élève curieux ou pointilleux pourrait poser : pourquoi f doit-elle être continue ? Nous voyons à cela deux réponses :

- La première réponse est qu'elle n'a pas besoin de l'être, et que même dans le cadre de l'intégrale de Riemann la continuité par morceaux suffit (et est nécessaire pour la construction).
- La seconde réponse est que la question met en lumière le fait que notre définition de l'intégrale est pipée : comment définir l'aire d'une partie du plan ? Nous semblons suggérer que cela est possible et naturel, alors qu'il existe des parties du plan pour laquelle la notion d'aire n'a pas de sens [8].

La conclusion de la discussion précédente est donc qu'il faut avec humilité admettre que nous ne travaillerons qu'avec des notions floues et mal définies, mais que tout cela peut prendre un sens rigoureux avec du travail et de l'abstraction. Mais même en admettant que notre notion d'intégrale a un sens, elle est inutile si nous ne savons pas la calculer, sauf dans le cas d'une fonction constante :

Propriété 4.46 Si f est une fonction constante sur $[a;b]$ égale à C, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\times C.$$

Démonstration. La région dont l'intégrale donne l'aire est un rectangle de côtés $(b-a)$ et C, d'où le résultat. ■

Remarque. Ce résultat n'est pas tout à fait anodin, puisque c'est par lui qu'on définit l'intégrale rigoureusement. Rappelons simplement en effet que toute fonction continue peut être approchée uniformément par des fonctions constantes par morceaux. De plus, l'intégrale de ces fonctions constantes par morceaux converge vers une valeur que l'on définit comme étant l'intégrale de f.

C'est ici que va se faire le lien miraculeux avec les primitives, souvent appelé, et pour cause, Théorème fondamental de l'analyse :

8. Nous entendons par là qu'il existe, sous réserve de l'axiome du choix, des parties de $\mathbf{R}^2$ qui ne sont pas mesurables pour la mesure de Lebesgue.

Théorème 4.47 (Théorème fondamental de l'analyse) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue positive. Alors la fonction $F : [a;b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f.

Démonstration. La preuve de ce résultat est admise car elle n'est pas faisable avec notre définition de l'intégrale. Nous en donnons néanmoins une démonstration en indiquant le seul point problématique.

Il nous faut calculer la limite, pour $x \in]a;b[$, de

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Pour cela, remarquons d'abord que, par additivité des aires [9],

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

de sorte que le taux d'accroissement peut s'écrire

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

On souhaite montrer que cette quantité converge quand h tend vers 0 vers

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t$$

(on fera ici attention au fait qu'on intègre la fonction constante égale à $f(x)$). Ainsi, nous pourrons conclure si nous montrons que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t$$

tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Pour t suffisamment proche de x, $f(t) \in]f(x)-\epsilon; f(x)+\epsilon[$. Autrement dit, pour t suffisamment proche de x,

$$g(t) = f(t) - f(x) \in]-\epsilon;\epsilon[.$$

Ici, il faut admettre qu'avec une vraie définition, l'intégrale de la fonction g aura un sens même si elle n'est pas nécessairement à valeurs positives, et que

$$-\epsilon h = \int_x^{x+h} -\epsilon \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} \epsilon \mathrm{d}t = \epsilon h.$$

Il suit alors, en admettant le croissance de l'intégrale que nous démontrerons a posteriori dans la **Proposition** 4.50, que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)\mathrm{d}t \in]-\epsilon;\epsilon[,$$

ce qui conclut la preuve.

Notons qu'on peut conduire une preuve rigoureuse si on suppose de plus que f est monotone. En effet, dans ce cas la fonction g est positive donc son intégrale a un sens. De plus, le raisonnement précédent donne $0 \leqslant g(t) \leqslant \epsilon$ pour tout $t \in [x;x+h]$, donc la courbe représentative

9. Nous voulons ici parler de l'idée intuitive selon laquelle l'aire d'une région formée de deux parties qui ne se recoupent que sur un segment est égale à la somme des aires des parties.

de g est au-dessus de la droite d'équation $y = 0$ et en dessous de la droite d'équation $y = \epsilon$. Ceci conduit naturellement à l'inégalité d'aires

$$0 \leqslant \int_x^{x+h} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \epsilon h.$$

■

Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour calculer l'intégrale d'une fonction continue positive :

Propriété 4.48 Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et positive et soit F une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Si F est la primitive donnée par le Théorème 4.47, alors par définition

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F(b)\\ &= F(b) - 0\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Si G est une autre primitive de F, on sait qu'il existe un réel C tel que $G = F + C$. Donc,

$$\begin{aligned}G(b) - G(a) &= (F(b) + C) - (F(a) + C)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Tout ceci suggère une définition alternative de l'intégrale via les primitives, dont nous avons déjà admis l'existence :

Définition 4.49. Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et soit F une primitive de f. On pose

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a)\\ &= [F]_a^b.\end{aligned}$$

Remarque. Notons que cette définition n'est pas parfaitement rigoureuse puisqu'il faudrait montrer d'abord que la quantité que nous définissons ne dépend pas du choix de la primitive, ce qui se fait comme dans la preuve de la **Propriété** 4.48 ci-dessus.

Notre définition de l'intégrale a le mérite de rendre évidentes ses propriétés principales :

Propriété 4.50 Soient $f, g : [a;b] \to \mathbf{R}$ des fonctions continues. Alors,

1) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

2) Pour tout réel λ, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

3) Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0;$$

4) Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

5) Si $c \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Cette dernière propriété est appelée *Relation de Chasles*.

Démonstration. 1) Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$, d'où

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x &= (F+G)(b)-(F+G)(a)\\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2) Si F est une primitive de f, alors λF est une primitive de λf, d'où

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x &= \lambda F(b)-\lambda F(a)\\ &= \lambda(F(b)-F(a))\\ &= \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3) Soit F une primitive de f. Comme par hypothèse $F' = f$ est positive, F est croissante, d'où

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \geqslant 0.$$

4) Il suffit d'appliquer le point précédent à la fonction $f-g$, qui est positive.

5) Soit F une primitive de f. Alors,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a))+(F(b)-F(c))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Toutes ces propriétés permettent de simplifier le calcul d'intégrales, mais ne permettent par exemple pas de gérer des intégrales de produit de fonctions de référence. Pour cela, le seul outil disponible est l'intégration par parties.

Propriété 4.51 (Intégration par parties) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a;b[$. Alors,

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x = [u\times v]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Posons $f = u \times v$. Alors, $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$, donc

$$\begin{aligned}[f]_a^b &= \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

Pour conclure, le programme demande d'aborder la notion de valeur moyenne d'une fonction.

Définition 4.52. Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. La *valeur moyenne* de f est la quantité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque. On peut motiver cette définition en faisant remarquer que la valeur moyenne de f est la valeur de l'unique fonction constante qui a la même intégrale que f sur $[a;b]$.

La valeur moyenne est intéressante pour son interprétation probabiliste, dont nous ne parlerons pas. Mentionnons toutefois, bien qu'elle ne soit pas explicitement au programme, l'*inégalité de la moyenne*.

Théorème 4.53 (Inégalité de la moyenne) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Alors,

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

Démonstration. Soit h la fonction constante égale à m. Alors $h \leqslant f$, donc par la **Propriété** 4.50,

$$(b-a)m = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et la première inégalité suit en divisant par $b-a$.

Soit g la fonction constante égale à M. Alors $g \geqslant f$, donc par la **Propriété** 4.50,

$$(b-a)M = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et la seconde inégalité suit en divisant par $(b-a)$. ■

Voici un exemple d'exercice sur les intégrales.

Exercice 4.8.1. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier n par*

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

1) *Montrer que pour tout réel x, $-x^2 \leqslant -2x+1$.*

2) *En déduire que $u_n \leqslant \frac{e}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

3) *Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

4) *Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.*

Correction. 1) Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc

$$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

et l'inégalité demandée suit immédiatement.

2) On a

$$\begin{aligned} u_n \leqslant \int_0^n e^{2x+1}\mathrm{d}x &= e\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^n \\ &= \frac{e(1-e^{-2n})}{2}. \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers $\frac{e}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

3) Comparons deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{n+1} e^{-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} e^{-x^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme $e^{-x^2} > 0$, son intégrale est positive donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

4) D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge.

■

ANNEXE A

LE SECRET DE L'ANALYSE RÉELLE

A.1 Une démonstration presque complète

Plusieurs fois dans ce texte nous nous sommes heurtés à une difficulté insurmontable dans le cadre des programmes du secondaire : la nécessité d'utiliser le Théorème des accroissements finis pour démontrer des résultats impliquant la dérivations. Nous avons souhaité donner ici un énoncé et une démonstration complète de ce résultat, pour plusieurs raisons :

- Pour la culture et la satisfaction intellectuelle du lecteur ;
- Parce qu'il nous semble qu'un enseignant doit maîtriser ce résultat tant il est central, bien que caché, dans le programme d'analyse du lycée ;
- Parce que si cet énoncé n'est pas au programme, c'est qu'il repose *in fine* sur la difficulté fondamentale de l'analyse réelle (gardons le suspens jusqu'à la Section A.3) et qu'il est bon d'en avoir conscience.

L'utilité essentielle de la dérivation est de nous donner des informations sur une fonction, et c'est l'objet du Théorème des accroissement finis de décrire ce lien de façon précise. Cependant, la démonstration de ce théorème se base généralement sur un cas particulier, le Théorème de Rolle. Celui-ci étant d'un énoncé plus simple, il peut permettre de mieux comprendre ce qui se joue. Nous allons donc le donner.

> **Théorème A.1** (Théorème de Rolle) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f étant continue sur le segment $[a;b]$, elle est bornée et atteint ses bornes d'après le Théorème des bornes atteintes (voir Théorème A.5 ci-dessous). Notons M le maximum de f et m le minimum de f. Il existe donc des points $c_1, c_2 \in [a;b]$ tels que $f(c_1) = M$ et $f(c_2) = m$. Nous allons distinguer deux situations :

- Si $m < M$, alors $f(c_1) \neq f(c_2)$ donc au moins un des deux nombres c_1 ou c_2 est distinct de a et b. Supposons qu'il s'agisse de c_1. Comme f est alors dérivable en $c_1 \in]a;b[$ et qu'elle y a un maximum, $f'(c_1) = 0$ d'après la **Proposition** 3.9 et le résultat est prouvé. On procède de même s'il s'agit de c_2.
- Si $m = M$, alors f est constante. Par conséquent, sa dérivée est nulle (voir **Proposition** 3.6) sur tout $]a;b[$ donc n'importe quel point de cet intervalle convient.

■

Remarque. La grande difficulté de la preuve est évidemment cachée dans l'utilisation du Théorème des bornes atteintes, qui affirme que si $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ est continue, alors elle admet un maximum et un minimum (voir Théorème A.5 ci-dessous pour une démonstration). Ce théorème lui-même repose de façon cruciale sur le Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente. On voit donc qu'en dernière analyse, c'est la *topologie* de $\mathbf{R}$ (le fait que les segments sont des parties *compactes*) qui permet d'obtenir ces résultats. Il y a donc une difficulté conceptuelle qui est difficilement saisissable par des élèves de lycée, ce qui peut expliquer qu'on évite. Nous verrons cependant à la Section A.3 que le problème est encore plus profond.

Une fois ce résultat établi, on peut aisément obtenir la forme générale.

Théorème A.2 (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. L'idée est de retrancher à f une fonction linéaire de sorte que les valeurs aux extrémités de l'intervalle de définition deviennent égales. Cherchons donc une fonction de la forme

$$g : x \mapsto f(x) - \lambda x.$$

On souhaite que $g(a) = g(b)$, c'est-à-dire que

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b,$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Maintenant, le Théorème de Rolle appliqué à la fonction g donne l'existence d'un $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

d'où le résultat. ■

Une autre façon d'exprimer ce résultat, c'est que tous les taux d'accroissements de f sont égaux à des valeurs de la dérivée, d'où le nom.

A.2 Bolzano & Weierstrass à la rescousse

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, la démonstration du Théorème de Rolle utilise une propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, à savoir le fait que toute suite bornée admet une sous-suite convergente. Ce résultat peut apparaître comme une sorte de boîte noire de l'analyse réelle, ce qui expliquerait qu'on l'évite soigneusement dans le secondaire. Il n'en est en fait rien, et la démonstration utilise des idées qui sont exploitées dans les programmes, par exemple pour la démonstration du Théorème des valeurs intermédiaires ou ses applications algorithmiques. Toutefois, l'énoncé et la preuve nécessitent d'introduire la notion de sous-suite, ce que nous allons faire.

Définition A.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. Une *sous-suite* (ou *suite extraite*) est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une fonction strictement croissante.

Théorème A.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Alors, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge.

Démonstration. La suite étant bornée, il existe des réels $a < b$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [a;b]$. Nous allons maintenant construire par récurrence trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\phi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ telles que

i) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eſt croissante et majorée, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eſt décroissante et minorée et
$$|a_n - b_n| = 2^{-n}|a-b|;$$

ii) L'intervalle $[a_n;b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

iii) $\phi(n+1) > \phi(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;

iv) $u_{\phi(n)} \in [a_n;b_n]$.

Pour commencer, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\phi(0) = 0$. Supposons maintenant les suites définies jusqu'à un rang $n \geqslant 0$ et posons
$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$
On dispose maintenant de deux intervalles $[a_n;c_n]$ et $[c_n;b_n]$ et comme $[a_n;b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, l'un au mois des deux demi-intervalles contient aussi une infinité de termes de cette suite. Si c'eſt le premier, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Ainsi, les deux premières conditions sont vérifiées. Soit maintenant $\phi(n+1)$ un entier ſtrictement plus grand que $\phi(n)$ et tel que $u_{\phi(n+1)} \in [a_{n+1};b_{n+1}]$. Un tel entier exiſte car l'intervalle contient une infinité de termes de la suite, et les deux dernière propriétés sont alors vérifiées.

Maintenant, par le Théorème de convergence monotone (voir Théorème A.8 ci-dessous), les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers des limites que nous noterons respectivement ℓ et ℓ'. Mais comme $|a_n - b_n|$ tend à la fois vers 0 (par la première propriété) et vers $|\ell - \ell'|$ par opérations sur les limites, on a $\ell = \ell'$. Or la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ eſt une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (car ϕ eſt ſtrictement croissante) et on a pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$a_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant b_n.$$
Par le Théorème des gendarmes [1] (pour les suites), on conclut que la sous-suite converge vers ℓ, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque. La démonſtration précédente présente deux difficultés. La première eſt la subtilité du raisonnement par récurrence, qui requiert une rédaction précautionneuse pour permettre le passage du rang n au rang $n+1$. Joint au fait que la manipulation de la notion d'infini peut être délicate pour des élèves de lycée, ceci juſtifie en partie l'omission de ce résultat au lycée. La seconde difficulté eſt l'utilisation du Théorème de convergence monotone pour les suites. En effet, celui-ci eſt admis au lycée car il repose sur la propriété de la borne supérieure. Nous touchons là au véritable cœur du problème, mais nous y reviendrons.

Armés de ce résultat, nous pouvons enfin démontrer le Théorème des bornes atteintes qui, rappelons-le, eſt l'ingrédient manquant de notre preuve du Théorème des accroissements finis. Toute la difficulté vient de l'utilisation de la notion de borne supérieure d'une partie de $\mathbf{R}$. Nous allons pour l'inſtant le faire sans plus de commentaire et y reviendrons dans la dernière section.

> **Théorème A.5** (Théorème des bornes atteintes) Soit $f : [a;b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f eſt bornée et atteint ses bornes.

Démonſtration. Soit M la borne supérieur de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$. Par définition de la borne supérieure, il exiſte une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $[a;b]$ telle que $f(x_n) \to M$. Or, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il exiſte une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers une limite x. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$a \leqslant x_{\phi(n)} \leqslant b,$$

1. Celui-ci se démontre pour les suites comme pour les fonctions dans le Théorème 4.10.

on obtient par passage à la limite dans les inégalités larges

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Nous pouvons maintenant utiliser la continuité de f, et plus spécifiquement la **Propriété** 4.24, pour conclure que $f(x_{\phi(n)}) \to f(x)$. Ainsi, nous avons trouvé un élément $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = M$. Ceci prouve deux choses :

- M n'est pas égal à $+\infty$, donc f est majorée ;
- $f(x) = M$ donc la borne supérieure M est atteinte.

Le même raisonnement en partant de la borne inférieure complète la démonstration. ■

A.3 Le mot de la fin

Nous sommes presque parvenus à prouver tous les théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle, et ce en finalement peu de pages. Même si certaines des preuves sont plus délicates que celles habituellement faites au lycée, l'ensemble pourrait paraître abordable avec des élèves motivés. Toutefois, il reste une zone d'ombre à éclaircir. En effet, dans la démonstration du Théorème A.5, nous avons considéré la borne supérieure d'une partie de $\mathbf{R}$. Rappelons ce que nous entendons par là.

Définition A.6.

- Un *majorant* d'un ensemble A de nombres réels est un nombre réel M plus grand que tous les éléments de A ;
- S'il existe un majorant plus petit que tous les autres majorants, on l'appelle *borne supérieure* de A et on le note $\sup(A)$. Si A n'a pas de majorant, on pose $\sup(A) = +\infty$;
- Un *minorant* d'un ensemble A de nombres réels est un nombre réel m plus petit que tous les éléments de A ;
- S'il existe un minorant plus grand que tous les autres minorants, on l'appelle *borne inférieure* de A et on le note $\inf(A)$. Si A n'a pas de minorant, on pose $\inf(A) = -\infty$.

L'élément manquant pour compléter nos démonstrations est donc l'énoncé suivant, d'une simplicité trompeuse :

> **Théorème A.7** (Théorème de la borne supérieure) Soit A un ensemble non-vide de nombres réels. Alors, A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Et la démonstration ? C'est là que le bât blesse ! Pour démontrer un tel résultat, il va d'abord falloir savoir précisément ce qu'est $\mathbf{R}$ en tant qu'ensemble. Autrement dit, il faut une construction ensembliste de $\mathbf{R}$. Ces constructions existent, bien sûr, mais n'ont rien d'évident. Et même une fois qu'une telle construction est réalisée, démontrer le théorème ci-dessus n'est pas une mince affaire.

Nous sommes donc arrivés à l'aporie de notre quête du secret de l'analyse réelle, à savoir la théorie des ensembles. Aller plus loin nous conduirait dans les méandres de la logique mathématiques qui, quoique fascinantes, nous porteraient très loin de notre sujet. Nous nous arrêterons donc au bord de ce nouveau monde en gardant simplement à l'esprit qu'un univers infini se cache derrière la propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels sur laquelle toute l'analyse est construite.

Remarque. Pour saisir l'aspect non-trivial du Théorème de la borne supérieure, on peut observer qu'il n'est pas valable pour tous les sous-ensembles de $\mathbf{R}$. Par exemple l'ensemble des nombres rationnels x tels que $x^2 \leqslant 2$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$.

Pour conclure, remarquons que l'autre résultat admis dans la preuve du Théorème de Bolzano-Weierstrass, à savoir le Théorème de convergence monotone, peut être démontré à l'aide du Théorème de la borne supérieure.

Théorème A.8 (Théorème de convergence monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite monotone et bornée. Alors, elle converge.

Démonstration. Supposons la suite croissante et considérons l'ensemble A des termes de la suite. C'est une partie de $\mathbf{R}$ non-vide, donc elle admet une borne supérieure. Comme de plus la suite est majorée, la borne supérieure est finie et nous la noterons M. Soit maintenant $\epsilon > 0$ et considérons l'intervalle $[M-\epsilon; M]$. S'il n'y avait aucun terme de la suite dans cet intervalle, alors on aurait

$$u_n < M - \epsilon$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, $M-\epsilon/2$ serait alors un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ plus petit que M, ce qui contredit la définition de la borne supérieure. Ainsi, il existe n_0 tel que

$$u_{n_0} \in [M-\epsilon; M].$$

Comme la suite est croissante, on a alors pour tout $n \geqslant n_0$ que

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M - \epsilon,$$

donc $u_n \in [M-\epsilon; M]$. Nous avons donc prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers M. La preuve pour une suite décroissante est similaire. ■

Rappelons pour conclure que nous avons utilisé dans la démonstration du Théorème des bornes atteintes A.5 une propriété de la borne supérieure qu'il nous faut, pour être complet, démonter.

Propriété A.9 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure) Soit A une partie non-vide bornée de $\mathbf{R}$ et soit M sa borne supérieure. Alors, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'élements de A qui converge vers M. Un résultat analogue est valable pour la borne inférieure.

Démonstration. Soit $n \in N$ un entier strictement positif. Alors, il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[M-1/n, M]$. En effet, comme M est un majorant de A, on aurait sinon que $x \leqslant M - 1/n$ pour tout $x \in A$. Ceci signifierai que $M-1/n$ est un majorant de A strictement inférieur à M, contredisant la définition de la borne supérieure. Notons donc u_n un tel élément de A. Alors, on a par construction pour tout entier n strictement positif

$$M - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant M$$

donc par le Théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers M. La preuve pour la borne inférieure est similaire. ■

Remarque. Le résultat peu bien sûr être étendu au cas où A n'est pas borné en construisant alors une suite qui tend vers $+\infty$. De plus, ce résultat admet une réciproque : si M est un majorant de A et qu'il existe une suite d'élements de A qui converge vers M, alors $M = \sup(A)$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette assertion, qui justifie le vocable de "critère".

ANNEXES : PROGRAMMES OFFICIELS

Nous joignons à ce document, en guise de complément, les parties des programmes officiels traitant des fonctions.

Programme de Seconde

Approfondissements possibles

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab\,\sin C$.
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

- **Représenter et caractériser les droites du plan**

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite.

Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithme

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Fonctions

- **Objectifs**

Au cycle 4, les élèves ont découvert progressivement la notion de fonction, manipulé différents modes de représentation : expression algébrique, tableau de valeurs, représentation graphique, programmes de calcul. Ils connaissent le vocabulaire de base : variable, fonction, antécédent, image et la notation $f(x)$. Selon le mode de représentation choisi, ils déterminent une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction. Ils ont étudié les fonctions linéaires, les fonctions affines et leur représentation graphique.

En seconde, les objectifs sont les suivants :

- consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre ;

- exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ;
- étendre la panoplie des fonctions de référence ;
- étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.

Les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ permettent de modéliser des phénomènes continus. On peut confronter les élèves à des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ pour modéliser des phénomènes discrets. La notation $u(n)$ est alors utilisée.

La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ou dans l'espace, biologie, économie, physique, sciences sociales. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t est mise en évidence

Les outils numériques sont mis à profit :

- un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs ;
- Python, le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

Dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés (parité, monotonie sur un intervalle…) sur les fonctions de référence. Ces propriétés se généralisent peu à peu aux fonctions quelconques. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Leur formalisation est l'occasion d'un travail sur les quantificateurs.

• Histoire des mathématiques

On peut évoquer la très lente élaboration de la notion de fonction, depuis l'Antiquité jusqu'à la codification actuelle par Dirichlet, en mettant en évidence quelques étapes importantes : Newton, Leibniz, Euler. On souligne alors l'importance de la notation algébrique.

• Se constituer un répertoire de fonctions de référence

Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

Contenus

- Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.

Capacités attendues

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

Démonstration

- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$.

• Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions

Contenus

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.

Capacités attendues
- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

Approfondissement possible
- Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

- **Étudier les variations et les extremums d'une fonction**

Contenus
- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

Capacités attendues
- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Démonstration
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Exemples d'algorithme
- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Approfondissement possible
- Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

Statistiques et probabilités

- **Objectifs**

En matière d'information chiffrée, les élèves ont travaillé au cycle 4 effectifs, fréquences, proportions, pourcentages, coefficient de proportionnalité, taux d'évolution, coefficient multiplicateur. L'objectif est de consolider et de prolonger ce travail par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Les élèves doivent distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

Programme de Première

Analyse

- **Objectifs**

Deux points fondamentaux du programme de première sont ici étudiés : le concept de dérivée, avec ses applications à l'étude des fonctions, et la fonction exponentielle.

L'étude de la dérivation distingue le point de vue local (nombre dérivé) et le point de vue global (fonction dérivée). Les fonctions étudiées sont toutes régulières et le nombre dérivé est introduit à partir de la perception intuitive de la limite du taux de variation. On n'en donne pas de définition formelle, mais on s'appuie sur :

- des représentations graphiques fournies par les outils logiciels (calculatrice, tableur, logiciel de géométrie dynamique) ;
- le calcul algébrique du taux de variation dans des cas qui s'y prêtent : fonctions du second degré, fonction inverse ;
- le calcul numérique d'expressions $f(a + h) - f(a)$, où h prend des valeurs proches de 0, faisant apparaître une approximation linéaire, par exemple avec $a = 1$ et f étant une des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Il est intéressant d'exploiter ces divers registres dans l'étude d'un même nombre dérivé.

Taux de variation et nombre dérivé gagnent à être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente ;
- en cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.

Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution.

Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières).

En liaison avec les autres disciplines, on peut signaler et utiliser la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour un taux de variation et $\frac{dy}{dx}$ pour une dérivée ; si $y = f(x)$, on peut ainsi écrire $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, en adaptant selon le contexte : $x = f(t)$, $q = f(t)$…

- **Histoire des mathématiques**

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation).

Le développement d'un calcul des variations chez Leibniz et Newton se fonde sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations. Leurs approches partent de notions intuitives mais floues d'infiniment petit. Ce n'est que très progressivement que les notions de limites et de différentielles, qui en fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au XIXe siècle.

La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVIIe siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

La trigonométrie a été utilisée chez les Anciens dans des problèmes de natures diverses (géométrie, géographie, astronomie). Elle est à l'époque fondée sur la fonction corde, d'un maniement bien moins facile que les fonctions sinus et cosinus de la présentation actuelle.

- **Dérivation**

Contenus

Point de vue local

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$
- Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Démonstrations

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.

Exemple d'algorithme

- Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

- **Variations et courbes représentatives des fonctions**

Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Newton, en se limitant à des cas favorables.

- **Fonction exponentielle**

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.
- Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $((1+\frac{1}{n})^n)$.

Approfondissements possibles

- Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

- **Fonctions trigonométriques**

Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de *x,* les cosinus et sinus d'angles associés à *x*.

Démonstration

- Calcul de $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Géométrie

• Objectifs

L'étude de la géométrie plane menée au collège et en seconde a familiarisé les élèves à la géométrie de configuration, au calcul vectoriel et à la géométrie repérée.

En première, on poursuit l'étude de la géométrie plane en introduisant de nouveaux outils. L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

- donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique (produit scalaire) ;
- enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

Les élèves doivent conserver une pratique du calcul vectoriel en géométrie non repérée.

• Histoire des mathématiques

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparait chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIXe siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique.

Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre *AB* comme ensemble des points *M* tels que le triangle *AMB* soit rectangle en *M* semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVIIe siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

• Calcul vectoriel et produit scalaire

Contenus

- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Programme de Terminale

- **Représentations paramétriques et équations cartésiennes**

L'objectif de cette section est de montrer comment la donnée d'un repère, qu'on supposera orthonormé, permet d'établir un lien entre la géométrie de l'espace et les calculs algébriques dans $\mathbb{R}^3$. L'objectif majeur est une bonne maîtrise des représentations paramétriques de droites et des équations de plans.

Contenus

– Représentation paramétrique d'une droite.
– Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues

– Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
– Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
– Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
– Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

Démonstration

– Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.

Approfondissements possibles

– Déterminer l'intersection de deux plans.
– Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
– Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
– Intersection d'une sphère et d'une droite.

Analyse

- **Objectifs**

L'analyse est une part centrale des mathématiques et, comme outil de modélisation et de calcul, elle joue un rôle essentiel dans l'étude de phénomènes issus des autres disciplines.

Les buts essentiels du programme de la classe terminale sont de donner aux élèves une bonne intuition des notions fondamentales : convergence, limites, dérivées, intégrales et une solide pratique des calculs afférents.

Les difficultés de mise en forme des concepts sont évoquées, sans constituer le but central de l'enseignement. Le programme s'articule autour des notions de suite et de fonction. Ces deux notions sont intimement liées et le dialogue discret-continu mérite d'être évoqué régulièrement.

En classe de première, l'étude des suites est abordée sous un angle essentiellement algébrique. En classe terminale, on commence l'étude de la convergence.

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu.

Les objectifs sont plutôt d'installer une pratique solide des aspects opératoires (détermination de limites) et d'introduire la problématique des théorèmes d'existence, notamment la convergence d'une suite croissante majorée.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Les suites interagissent avec les autres parties du programme. Outre leurs interventions en analyse, de nombreux problèmes de probabilités conduisent naturellement à étudier un modèle probabiliste dépendant d'un entier n.

En classe terminale, le thème des fonctions s'enrichit avec la notion de fonction convexe, l'étude des fonctions trigonométrique, l'introduction du logarithme et un travail autour des notions de limite et de continuité.

Le travail sur les limites, de même nature que celui mené sur les suites, combine présentation intuitive et pratique d'exemples élémentaires. À travers le théorème des valeurs intermédiaires, l'étude de la continuité permet de préciser les arguments assurant qu'une équation du type $f(x) = k$ a des solutions.

Le dernier volet du programme d'analyse porte sur les équations différentielles et le calcul intégral.

On introduit d'abord la notion de primitive d'une fonction continue f, que l'on présente comme « problème inverse » de celui de la dérivation ou, de façon équivalente, comme résolution de l'équation différentielle $y' = f$. On étudie ensuite les équations différentielles linéaires de la forme $y' = ay + b$, d'importance fondamentale pour des questions de modélisation.

L'intégrale est introduite à partir de la notion intuitive d'aire, sur laquelle on ne soulève aucune difficulté théorique. On fait ensuite le lien avec la notion de primitive, et on présente la technique d'intégration par parties, qui enrichit considérablement les calculs possibles.

La méthode des rectangles fournit des encadrements pertinents de sommes pour lesquelles on ne dispose pas de formule exacte ; c'est l'occasion de faire dialoguer simultanément analyse et géométrie, discret et continu.

- **Histoire des mathématiques**

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux.

On trouve des anticipations du calcul intégral chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, cubature des solides), Liu-Hui (volume d'un cylindre), Ibn al-Haytham (volume d'un paraboloïde) puis, bien plus tard, chez Grégoire de Saint-Vincent (méthode d'exhaustion) ou encore chez Galilée ou Cavalieri (méthode des indivisibles).

Les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme et les fonctions trigonométriques illustrent les liens entre discret et continu et fournissent une source féconde d'activités. On peut mentionner les méthodes de Ptolémée et d'Al Kashi, la méthode de Briggs ou l'utilisation de développements en série. Ces travaux, dont certains ont été anticipés hors d'Europe, par exemple en Inde par l'école du Kerala, indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVIIe siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation) ; ce thème peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole.

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le *Cours d'Analyse* de Cauchy

(1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse. Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore les ponts entre le discret et le continu.

- **Suites**

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, etc.

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

- **Limites des fonctions**

Les opérations sur les limites sont admises. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- Limites et comparaison.

- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.

Approfondissements possibles

- Asymptotes obliques. Branches infinies.

- **Compléments sur la dérivation**

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée et l'introduction de la dérivée seconde.

L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elles donnent l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.

Contenus

- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Approfondissements possibles

- Courbe de Lorenz.
- Dérivée n-ième d'une fonction.
- Inégalité arithmético-géométrique.

- **Continuité des fonctions d'une variable réelle**

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un objectif du programme. Hormis pour la fonction exponentielle, l'étude de la réciproque d'une fonction continue n'est pas au programme.

Contenus

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples d'algorithme

- Méthode de dichotomie.
- Méthode de Newton, méthode de la sécante.

Approfondissements possibles

- Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.
- Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y.
- Prolongement par continuité.

- **Fonction logarithme**

La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstration

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x\ln(x)$.

Exemple d'algorithme

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

Approfondissements possibles

- Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^{\alpha}$.
- Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

- ## Fonctions sinus et cosinus

Contenus

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi,\pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

Approfondissement possible

- Fonction tangente.

- ## Primitives, équations différentielles

Cette section introduit la notion d'équation différentielle sur des cas simples. Les élèves découvrent en situation le concept d'équation dont l'inconnue est une fonction. L'équation $y' = f$ est l'occasion de définir la notion de primitive. Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées. Il est utile d'admettre ici que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, résultat qui est démontré dans la section sur le calcul intégral. On note aussi que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.

L'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle. Lorsque $b = 0$, on remarque que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Pour travailler le concept d'équation différentielle, on peut donner d'autres exemples d'équations différentielles, dont on peut donner des solutions sans en faire de résolution complète : $y' = y^2$, $y'' + \omega^2 y = 0$. Aucune connaissance n'est exigible sur ces exemples.

Contenus

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.

- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Approfondissements possibles

- Autres exemples d'équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l'équation logistique.

Exemple d'algorithme

- Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

• Calcul intégral

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures $\int_a^b f(x)dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a,b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Notation $[F(x)]_a^b$.
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b.
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations

- Pour une fonction positive croissante f sur $[a,b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. Pour toute primitive F d f, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Approfondissements possibles

- Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales.

Exemples d'algorithme

- Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo.
- Algorithme de Brouncker pour le calcul de ln(*2*).

Probabilités

• Objectifs

Dans cette partie, on diversifie et on approfondit les modèles probabilistes rencontrés, en exploitant des situations où interviennent les probabilités conditionnelles, l'indépendance, les variables aléatoires. Un axe majeur est l'étude de la succession d'un nombre quelconque d'épreuves aléatoires indépendantes.

Le schéma de Bernoulli est fondamental : succession de n épreuves identiques indépendantes à deux issues. L'univers est formalisé par $\{0,1\}^n$ (ou $\{a,b\}^n$) mais il importe d'exploiter la représentation à l'aide d'arbres, et de conserver l'intuition des situations concrètes familières : tirage avec remise dans une urne de Bernoulli, lancers de pièce, etc. L'indépendance des expériences se traduit par la propriété multiplicative : la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités des résultats.

On l'introduit en s'appuyant sur le programme de la classe de première, avant d'enrichir cette approche par de nouveaux outils. Une première étape est la traduction du schéma de Bernoulli en termes de variables aléatoires, ce qui conduit à introduire la notion de variables aléatoires indépendantes, l'indépendance étant prise ici au sens d'indépendance mutuelle.

Les deux premiers indicateurs relatifs à une variable aléatoire, l'espérance et la variance, ont été introduits en classe de première. On en approfondit l'étude dans le cadre des variables aléatoires finies. La linéarité de l'espérance donne un outil très puissant permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire sans avoir à en déterminer la loi. L'additivité de la variance pour les variables indépendantes est présentée dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. Elle permet d'établir l'expression de la variance de la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Dans la troisième section, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev explicite le rôle de la variance comme indicateur de dispersion. Tous ces outils se conjuguent pour établir l'inégalité de concentration pour la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire, qui justifie l'apparition du facteur $1/\sqrt{n}$ en théorie de l'estimation, aperçue expérimentalement en classe de seconde, et permet d'aboutir à la démonstration de la loi des grands nombres.

• Histoire des mathématiques

La parution de l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1713), reprenant notamment d'anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne.

Un résultat majeur de cet ouvrage est son « théorème d'or », la loi des grands nombres, qui relie fréquences et probabilité, valide le principe de l'échantillonnage et est le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. Le mathématicien français Bienaymé (en 1853, publication en 1867) et le mathématicien russe Tchebychev (en 1867) démontrent l'inégalité qui porte leur nom, en parlant de fréquences d'échantillons plutôt que