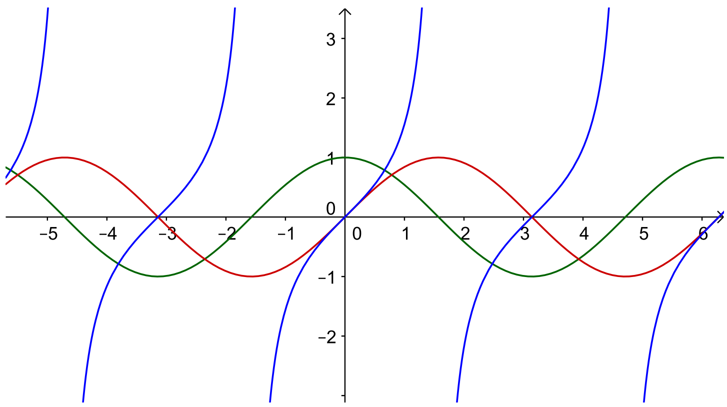
Formulaire de trigonométrie

1. Fonctions circulaires

Les fonctions trigonométriques dites *circulaires* sont les fonctions cosinus et sinus usuelles ainsi que la fonction tangente qui est, rappelons le, définie par $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(t) \neq 0$.

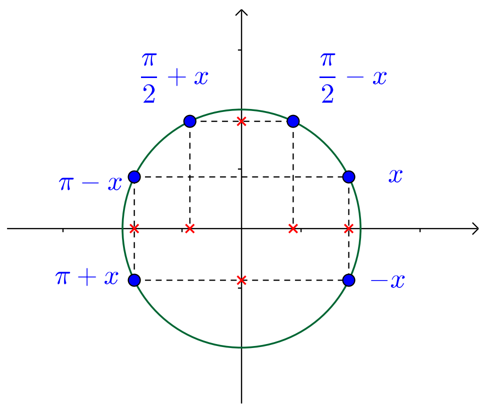
1.1. Symmétries. — Rappelons tout d'abord les représentations graphiques des fonctions cosinus (en vert), sinus (en rouge) et tangente (en bleu).



Les fonctions cosinus et sinus vérifient de nombreuses relations. Les principales sont résumées ci-dessous :

- $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Ces formules peuvent être visualisées (et mémorisées) graphiquement, par exemple grâce à la figure suivante :



Rappelons également la formule célèbre et utile suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

1.2. Valeurs remarquables. — Il est en général impossible de calculer exactement le valeur d'un cosinus ou d'un sinus. Il existe cependant quelques valeurs particulières qu'il est utile de connaître. Elles sont ici résumées dans un tableau.

t	**0**	$\pi/\mathbf{6}$	$\pi/\mathbf{4}$	$\pi/\mathbf{3}$	$\pi/\mathbf{2}$	π
cos(**t**)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin(**t**)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
tan(**t**)	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

1.3. Formules d'addition. — Il est possible de calculer le cosinus ou le sinus d'une somme de deux angles en fonction des valeurs des fonctions en chacun de ces angles. Plus précisément, on a

- Cosinus :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

- Sinus :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

- Tangente :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

On en déduit en particulier les relations suivante :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$$

2. Fonctions hyperboliques

2.1. Définition et propriétés élémentaires. — Les fonctions trigonométriques hyperboliques peuvent être vues comme les valeurs des fonctions trigonométriques circulaires aux nombres imaginaires purs. Plus explicitement, en voici la définition.

***Définition 2.1.* —** La fonction *cosinus hyperbolique* est la fonction $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La fonction *sinus hyperbolique* est la fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

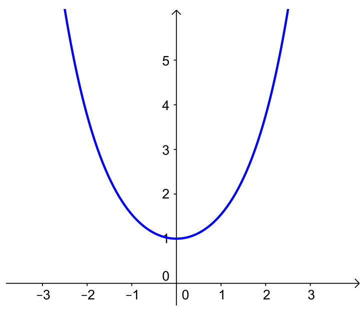
La fonction *tangente hyperbolique* est la fonction $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

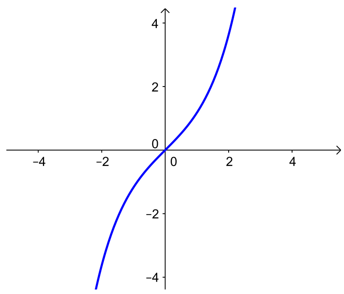
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

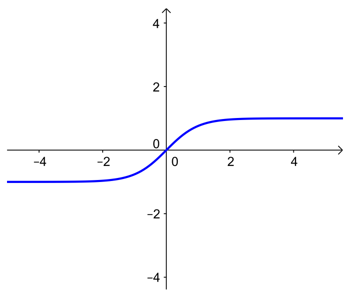
Les propriétés suivantes se démontrent facilement à partir des définitions précédentes :

- La fonction cosinus hyperbolique est *paire* et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\cosh'(t) = \sinh(t).$$
- La fonction cosinus hyperbolique est *impaire* et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\sinh'(t) = \cosh(t).$$
- La fonction tangente hyperbolique est *impaire* et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\tanh'(t) &= 1 - \tanh^2(t)\\ &= \frac{1}{\cosh^2(t)}.\end{aligned}$$

Voici les représentations graphiques de ces fonctions, de gauche à droite dans l'ordre de leur définition :







2.2. Formules d'addition. — Les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques hyperboliques peuvent se déduire de celles pour les fonctions trigonométriques circulaires grâce à la méthode mnémotechnique suivante : il suffit de remplacer formellement cos par cosh et sin par $i.\sinh$. Par exemple, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

Appliquée systématiquement, cette méthode donne les égalités suivantes :

- Cosinus hyperbolique :
$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)\\ \cosh(a-b) &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\end{aligned}$$
- Sinus hyperbolique :
$$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)\\ \sinh(a-b) &= \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)\end{aligned}$$

- Tangente hyperbolique :

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$$
$$\tanh(a-b) = \frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}$$

On en déduit en particulier les relations suivante :

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a)+\sinh^2(a)$$
$$\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)$$
$$\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh(a)^2}$$