TD III – Corrigé

1. Plan tangent

Exercice 1.1. — Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cosh(s) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cosh(t) \\ -\cosh(s) \\ \cosh(s)\cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$ un point de $\mathcal{S}$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0). D'après le cours, une équation de $T_{M_0}\mathcal{S}$ est donnée par

$$-\cosh(t_0)(x - x_0) - \cosh(s_0)(y - y_0) + \cosh(s_0)\cosh(t_0)(z - z_0) = 0.$$

En isolant les variables d'un côté et les constantes de l'autre, cette équation devient

$$\cosh(s_0)\cosh(t_0)z - \cosh(t_0)x - \cosh(s_0)y = \cosh(s_0)\cosh(t_0)(s_0 + t_0) - \cosh(t_0)\sinh(s_0) - \sinh(t_0)\cosh(s_0).$$

qui après division par $\cosh(s_0)\cosh(t_0)$ (la fonction cosinus hyperbolique ne s'annule jamais) prend la forme

$$z - \frac{x}{\cosh(s_0)} - \frac{y}{\cosh(t_0)} = s_0 + t_0 - \tanh(s_0) - \tanh(t_0).$$

***Exercice 1.2* (Paramétrage stéréographique).** — **1**. Montrons que le support de φ_N est la sphère de centre 0 et de rayon 1 privée du pôle nord. Pour cela, posons $k = 1 + s^2 + t^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
d(O, \varphi(s,t)) &= x(s,t)^2 + y(s,t)^2 + z(s,t)^2 \\
&= \frac{1}{k^2}\left(4s^2 + 4t^2 + (-1 + s^2 + t^2)^2\right) \\
&= \frac{1}{k^2}\left(4s^2 + 4t^2 + 1 + s^4 + t^4 - 2s^2 - 2t^2 + 2s^2t^2\right) \\
&= \frac{1}{k^2}\left(1 + s^4 + t^4 + 2s^2 + 2t^2 + 2s^2t^2\right) \\
&= \frac{1}{k^2}\left(1 + s^2 + t^2\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc le support de φ_N est inclus dans la sphère. De plus, si $x(s,t) = 0 = y(s,t)$ alors $z(s,t) = -1$. Ainsi, l'intersection du support de φ_N avec l'axe $O\vec{k}$ ne contient que le pôle sud, ce qui montre que le support de φ_N ne contient pas le pôle nord. Réciproquement, soit M un point de la sphère de coordonnées (x, y, z) qui n'est pas le pôle nord. Si M est le pôle sud, nous avons vu que $M = \varphi(0,0)$ appartient au support de φ_N. Sinon, supposons $x \neq 0$. On doit alors avoir $2s = kx$ et $2t = ky$, d'où

$$t = \frac{sy}{x}.$$

Ceci permet de trouver une équation donnant s. En effet,

$$\begin{aligned}
2s &= kx \\
2s &= x + s^2x + t^2x \\
s^2x + s^2\frac{y^2}{x} - 2s + x &= 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 4 - 4x\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = 4(1 - x^2 - y^2) = 4z^2 \geqslant 0.$$

L'équation admet au moins une solution, donc M appartient au support de φ_N. Si $x = 0$, alors $y \neq 0$ et un calcul similaire permet de conclure.

2. Calculons les dérivées partielles de φ_N :

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial s} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} 2k - 4s^2 \\ -4ts \\ 2sk - 2(k-2)s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} 2k - 4s^2 \\ -4ts \\ 4s \end{pmatrix}$$

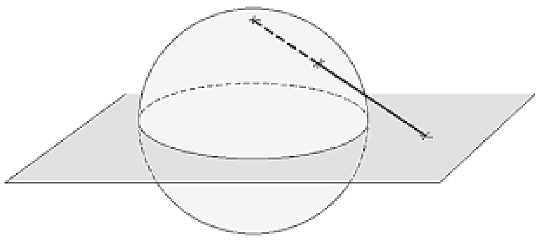
et

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial t} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} -4ts \\ 2k - 4t^2 \\ 2tk - 2(k-2)t \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} -4ts \\ 2k - 4t^2 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel est donc égal à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_N}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} &= \frac{1}{k^4}\begin{pmatrix} -16t^2 s - 4s(2k - 4t^2) \\ -16ts^2 - 4t(2k - 4s^2) \\ (2k - 4s^2)(2k - 4t^2) - 16t^2 s^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{k^4}\begin{pmatrix} -4t^2 s - 2sk + 4st^2 \\ -4ts^2 - 2tk + 4ts^2 \\ k^2 - 2kt^2 - 2ks^2 + 4s^2t^2 - 4t^2s^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{k^3}\begin{pmatrix} -2s \\ -2t \\ k - 2t^2 - 2s^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{k^3}\begin{pmatrix} -2s \\ -2t \\ 1 - s^2 - t^2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4}{k^2}\overrightarrow{O\varphi(s,t)}.
\end{aligned}$$

D'une part, le produit vectoriel ne s'annule pas donc la nappe est régulière et d'autre part, le vecteur normal est colinéaire à $\overrightarrow{O\varphi(s,t)}$ donc le plan tangent est le plan tangent usuel à la sphère.



Exercice 1.3. — **1**. Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s\sin(t) \\ s\cos(t) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix},$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t)-s\cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t)\\ -s\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t)-\cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t)\\ s\end{pmatrix}.$$

Si ce vecteur est nul, on a $s=0$ donc

$$\begin{cases}\sin(t)\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,t)=0\\ \cos(t)\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,t)=0\end{cases}$$

Comme $\cos(t)$ et $\sin(t)$ ne s'annulent pas en même temps, on doit donc avoir $\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)=0$. Réciproquement, si t vérifie $\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)=0$ alors le point $\varphi(0,t)$ est singulier.

2. Soit M un point de coordonnées (x,y,z) et soit $M_0=\varphi(s_0,t_0)$ un point régulier. Si M appartient à l'axe $O\vec{k}$, on a $x=y=0$. Si de plus, M appartiant à $T_{M_0}\mathcal{S}$, alors $\overrightarrow{MM_0}$ est orthogonal au vecteur normal en ce point, d'où

$$\begin{aligned}0&=\left(\sin(t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(s_0,t_0)-s_0\cos(t_0)\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)\right)(0-s_0\cos(t_0))\\&+\left(-s_0\sin(t_0)\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)-\cos(t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(s_0,t_0\right)(0-s_0\sin(t_0))\\&+s_0(z-f(s_0,t_0))\\ s_0z&=-s_0^2\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)+s_0f(s_0,t_0)\end{aligned}$$

Si $s_0\neq 0$, l'intersection du plan tangent avec l'axe $O\vec{k}$ est donc le point de coordonnées $(0,0,z)$ avec

$$z=-s_0\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)+f(s_0,t_0).$$

Si $s_0=0$, le vecteur normal est orthogonal à $O\vec{k}$. Comme de plus $\varphi(s_0,t_0)$ appartient à $O\vec{k}$, ce dernier est inclus dans le plan tangent et l'intersection est donc l'axe $O\vec{k}$ lui-même.

Exercice 1.4. — **1.** Considérons la nappe paramétrée $\varphi:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(s,t)=\left(s,\frac{t^3}{s},t\right).$$

Le support de φ est contenu dans $\mathcal{S}_f$. Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x,y,z) de $\mathcal{S}_f$. Comme $x\neq 0$, $M=\varphi(x,z)$ et le support de φ est exactement $\mathcal{S}_f$ privé de $O\vec{j}$.

2. Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\begin{pmatrix}1\\-t^3/s^2\\0\end{pmatrix}\text{ et }\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}0\\3t^2/s\\1\end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}-t^3/s^2\\-1\\3t^2/s\end{pmatrix}.$$

Une équation du plan tangent en un point $M = \varphi(s_0, t_0)$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) est donc

$$0 = -\frac{t_0^3}{s_0^2}(x - x_0) - (y - y_0) + 3\frac{t_0^2}{s_0}(z - z_0)$$
$$0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0) - (y - y_0) + 3\frac{z_0^2}{x_0}(z - z_0)$$

ce qui après simplification donne

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{x_0}x + y - 3\frac{z_0^2}{x_0}z &= y_0 + y_0 - 3\frac{z_0^3}{x_0} \\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z &= 2x_0y_0 - 3z_0^3 \\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z &= -z_0^3 \end{aligned}$$

Les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les plan d'équation $x = 2$ et $y = 3z - 3$ vérifient donc

$$2y_0 + x_0(3z - 3) - 3z_0^2z = -z_0^3$$
$$3z(x_0 - z_0^2) = -z_0^3 - 2y_0 + 3x_0$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour tout z, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} x_0 - z_0^2 & = & 0 \\ -z_0^3 - 2y_0 + 3x_0 & = & 0 \end{cases}$$

De la première équation on déduit $x_0 = z_0^2$ et donc $y_0 = z_0$. La second équation devient alors

$$\begin{aligned} -z_0^3 - 2z_0 + 3z_0^2 &= 0 \\ z_0(z_0^2 - 3z_0 + 2) &= 0 \\ z_0(z_0 - 1)(z_0 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi les plans tangents contenant la droite considérée sont les plans tangents aux points de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $(4, 2, 2)$.

2. Courbure

***Exercice 2.1* (Cône de révolution).** — Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cot(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s\sin(t) \\ s\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s\cos(t)\cot(\alpha) \\ -s\sin(t)\cot(\alpha) \\ s(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s\cot(\alpha)\cos(t) \\ -s\cot(\alpha)\sin(t) \\ s \end{pmatrix}.$$

La norme de ce vecteur est égale à $\sqrt{s^2(1 + \cot^2(\alpha))}$ et on en déduit le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ en divisant. Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de φ :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} -s\cos(t) \\ -s\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les formes fondamentales :

$$\Phi_1(h, k) = (1 + \cot^2(\alpha))h^2 + s^2k^2$$

et

$$\Phi_2(h, k) = \frac{1}{\sqrt{s^2(1 + \cot^2(\alpha))}}s^2\cot(\alpha)k^2.$$

Le minimum de Φ_2/Φ_1 est 0, atteint en $k=0$. Quant à son maximum, il est atteint en $h=0$ et vaut (en remarquant que pour $\alpha\in]0,\pi/2[$, $\sin(\alpha)>0$)

$$\frac{1}{\sqrt{s^2(1+\cot^2(\alpha))}}\frac{s^2\cot(\alpha)}{s^2}=\frac{1}{|s|}\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\sin(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{|s|}.$$

Les courbures principales sont donc 0 et $\cos(\alpha)/|s|$.

***Exercice 2.2* (Tore).** — **1**. Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\begin{pmatrix}-r\sin(s)\cos(t)\\ -r\sin(s)\sin(t)\\ r\cos(s)\end{pmatrix}\text{ et }\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\begin{pmatrix}-(R+r\cos(s))\sin(t)\\ (R+r\cos(s))\cos(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

On remarque que les deux dérivées partielles sont orthogonales. Il n'y aura donc pas de terme en hk dans Φ_1. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix}-r(R+r\cos(s))\cos(s)\cos(t)\\ -r(R+r\cos(s))\cos(s)\sin(t)\\ -r(R+r\cos(s))(\sin(s)\cos^2(t)+\sin(s)\sin^2(t))\end{pmatrix}\\ &= r(R+r\cos(s))\begin{pmatrix}-\cos(s)\cos(t)\\ -\cos(s)\sin(t)\\ -\sin(s)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le vecteur de la dernière égalité étant de norme 1 et positivement colinéaire au produit vectoriel, c'est le vecteur normal $\overrightarrow{N}$. Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de φ :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=\begin{pmatrix}-r\cos(s)\cos(t)\\ -r\cos(s)\sin(t)\\ -r\sin(s)\end{pmatrix},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\begin{pmatrix}-(R+r\cos(s))\cos(t)\\ -(R+r\cos(s))\sin(t)\\ 0\end{pmatrix}\text{ et }\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}=\begin{pmatrix}r\sin(s)\sin(t)\\ -r\sin(s)\cos(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

Notons que $\frac{\partial\varphi}{\partial s\partial t}$ est orthogonal à $\overrightarrow{N}$ et qu'il n'y a par conséquent pas de terme en hk dans Φ_2. On en déduit les formes fondamentales :

$$\begin{cases}\Phi_1(h,k) &= r^2h^2+(R+r\cos(s))^2k^2\\ \Phi_2(h,k) &= rh^2+\cos(s)(R+r\cos(s))k^2\end{cases}$$

Les vecteurs $\vec{v}_1=(r^{-1},0)$ et $\vec{v}_2=(0,(R+r\cos(s))^{-1})$ forment une base orthonormée pour Φ_1. Les courbures principales sont donc les valeurs de Φ_2 sur ces deux vecteurs, à savoir

$$\lambda_1=\frac{1}{r}\text{ et }\lambda_2=\frac{\cos(s)}{R+r\cos(s)}.$$

On en déduit la courbure moyenne et la courbure de Gauss :

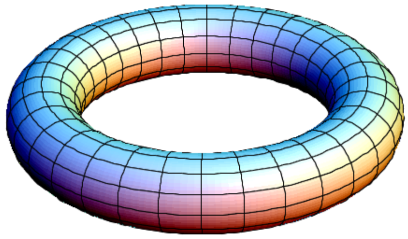
$$c_m=\frac{R+2r\cos(s)}{r(R+r\cos(s))}\text{ et }K=\frac{\cos(s)}{r(R+r\cos(s))}.$$

2. Nous avons vu plus haut que

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|=r(R+r\cos(s))$$

La courbure totale est donc donnée par

$$\begin{aligned}c &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(s)}{r(R+r\cos(s))}r(R+r\cos(s))dsdt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s)dsdt\\ &= 2\pi\int_0^{2\pi}\cos(s)ds\\ &= 0.\end{aligned}$$



***Exercice 2.3* (Hyperboloïde à une nappe).** — **1**. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = \sinh(s).$$

Alors,

$$x^2 + y^2 = 1 + \sinh^2(s) = \cosh(s),$$

donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cosh(s)\cos(t)$ et $y = \cosh(s)\sin(t)$. Ainsi, la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(s,t) = (\cosh(s)\cos(t), \cosh(s)\sin(t), \sinh(s))$$

est un paramétrage de $\mathcal{S}$.

2. Calculons les dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \sinh(s)\cos(t) \\ \sinh(s)\sin(t) \\ \cosh(s) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cosh(s)\sin(t) \\ \cosh(s)\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les deux dérivée partielles sont orthogonales et qu'il n'y aura par conséquent pas de terme en hk dans Φ_1. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -\cosh^2(s)\cos(t) \\ -\cosh(^2 s)\sin(t) \\ \sinh(s)\cosh(s)\cos^2(t) + \cosh(s)\sinh(s)\sin^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cosh^2(s)\cos(t) \\ -\cosh^2(s)\sin(t) \\ \cosh(s)\sinh(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons $\alpha(s) = \cosh(s)\sqrt{1 + \tanh^2(s)}$. Alors,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \cosh^2(s)\alpha(s) \begin{pmatrix} -\cos(t)/\alpha(s) \\ -\sin(t)/\alpha(s) \\ \tanh(s)/\alpha(s) \end{pmatrix}$$

Le vecteur du membre de droite étant de norme 1 et positivement colinéaire au produit vectoriel, c'est le vecteur normal $\overrightarrow{N}$. Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de φ :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} \cosh(s)\cos(t) \\ \cosh(s)\sin(t) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} -\cosh(s)\cos(t) \\ -\cosh(s)\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t} = \begin{pmatrix} -\sinh(s)\sin(t) \\ \sinh(s)\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons que $\frac{\partial\varphi}{\partial s\partial t}$ est orthogonal à $\overrightarrow{N}$ et qu'il n'y aura par conséquent pas de terme en hk dans Φ_2. Nous pouvons maintenant calculer les formes fondamentales :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(h,k) &= h^2\left(\sinh^2(s)\cos^2(t)+\sinh^2(s)\sin^2(t)+\cosh^2(s)\right)+k^2\left(\cosh^2(s)\sin^2(t)+\cosh^2(s)\cos^2(t)\right)\\
&= h^2\left(\cosh^2(s)+\sinh^2(s)\right)+k^2\cosh^2(s)\\
&= h^2\cosh^2(s)\alpha(s)^2+k^2\cosh^2(s)
\end{aligned}$$

et

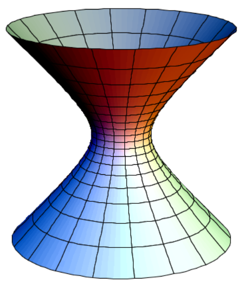
$$\begin{aligned}
\Phi_2(h,k) &= h^2\frac{-\cosh(s)\cos^2(t)-\cosh(s)\sin^2(t)+\sinh(s)\tanh(s)}{\alpha(s)}+k^2\frac{\cosh(s)\cos^2(t)+\cosh(s)\sin^2(t)}{\alpha(s)}\\
&= h^2\frac{\sinh^2(s)-\cosh^2(s)}{\cosh(s)\alpha(s)}+k^2\frac{\cosh(s)}{\alpha(s)}\\
&= -h^2\frac{1}{\cosh(s)\alpha(s)}+k^2\frac{\cosh(s)}{\alpha(s)}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{v}_1=((\cosh(s)\alpha(s))^{-1},0)$ et $\vec{v}_2=(0,\cosh(s)^{-1})$ forment une base orthonormée pour Φ_1. Les courbures principales sont donc les valeurs de Φ_2 sur ces deux vecteurs, à savoir

$$\lambda_1=-\frac{1}{\cosh^3(s)\alpha(s)^3}\text{ et }\lambda_2=\frac{1}{\cosh(s)\alpha(s)}.$$

On en déduit la courbure de Gauss :

$$K(s,t)=-\frac{1}{(\cosh(s)\alpha(s))^4}=-\frac{1}{\left(\cosh^4(s)+\cosh^2(s)\sinh^2(s)\right)^2}=-\frac{1}{d(O,\varphi(s,t))^4}.$$



***Exercice 2.4* (Paraboloïde elliptique). —**
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}.$$

La surface $\mathcal{S}$ est le graphe de f, nous pouvons donc utiliser les résultats du cours pour calculer sa courbure de Gauss. Pour cela, il faut d'abord calculer les dérivées partielles de f. Les dérivées partielles premières sont

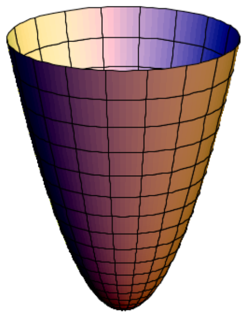
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{p}\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{q}$$

et les dérivées partielles secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{p},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{q}\text{ et }\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

La courbure de Gauss est donc égale à

$$K=\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left(1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{pq}}{\left(1+\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\right)^2}=\frac{1}{pq\left(1+\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\right)^2}.$$



3. Exercices complémentaires

Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.

Exercice 3.1. — Il faut simplement faire soigneusement les calculs.

***Exercice 3.2* (Surfaces de révolution).** — Les surfaces étudiées dans cet exercice sont appellées *de révolution* car elles sont obtenues en faisant tourner le support de l'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (x(t), 0, y(t))$ autour de l'axe $O\vec{k}$.

1. Le calcul des dérivées partielles de φ donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -\sin(s)x(t) \\ \cos(s)x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos(s)x'(t) \\ \sin(s)x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = x(t) \begin{pmatrix} \cos(s)y'(t) \\ \sin(s)y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de l'égalité ci-dessus est de norme 1, donc le produit vectoriel s'annule si et seulement si $x(t)$ s'annule. Ainsi les points réguliers sont les points tels que $x(t) \neq 0$.

2. Comme $x(t) \geqslant 0$ par hypothèse, le vecteur précédent est le vecteur normal en tout point régulier. Il suffit alors d'appliquer la formule du cours.

3. En appliquant la formule du cours avec les déterminants des formes fondamentales, on trouve

$$K = \frac{y'(t)}{x(t)}(y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t))$$

qu'il faut maintenant simplifier. En dérivant l'équation $y'(t)^2 + x'(t)^2 = 1$, on obtient

$$y'(t)y''(t) + x'(t)x''(t) = 0.$$

D'autre part, la même équation de départ peut se réécrire $y'(t)^2 = 1 - x'(t)^2$. En combinant ces deux résultats, on a

$$\begin{aligned} K &= \frac{y'(t)y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)^2}{x(t)} \\ &= \frac{-x'(t)x''(t)x'(t) - x''(t)(1 - x'(t)^2)}{x(t)} \\ &= -\frac{x''(t)}{x(t)}. \end{aligned}$$

4. Grâce à la question précédente, si la courbure de Gauss est constante on peut trouver une équation différentielle simple vérifiée par $x(t)$. Il faut cependant distinguer suivant le signe de la courbure.

- Si $K=0$ alors $x''(t)=0$ donc $x(t)=At^2+Bt+C$, avec $A,B,C\in\mathbb{R}$.
- Si $K>0$ alors $x''(t)+Kx(t)=0$ donc $x(t)=A\cos(\sqrt{K}t)+B\sin(\sqrt{K}t)$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.
- Si $K<0$ alors $x''(t)+Kx(t)=0$ donc $x(t)=A\cosh(\sqrt{-K}t)+B\sinh(\sqrt{-K}t)$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Dans chaque cas, on a ensuite une expression explicite de $y'(t)=\pm\sqrt{x'(t)^2-1}$ qui détermine y à une constante près. Notons qu'il n'est pas en général possible d'exprimer y en fonction de t à l'aide de fonctions usuelles.

***Exercice 3.3* (Surfaces réglées).** — Les surfaces étudiées dans cet exercice sont dites *réglées* car elles sont obtenues en prenant la réunion de toutes les droites D_t dirigées par $\vec{u}(t)$ et passant par le point de coordonnées $(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$.

1. Le calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\vec{u}(t)\text{ et }\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\vec{v}(t)+s\vec{u}'(t),$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t)+s\vec{u}(t)\wedge\vec{u}'(t).$$

2. Les vecteurs $\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t)$ et $\vec{u}'(t)$ sont par hypothèses tous deux orthogonaux à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc, il existe $p(t)\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t)=p(t)\vec{u}'(t)$ et un calcul élémentaire donne

$$p(t)=\frac{\langle\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t),\vec{u}'(t)\rangle}{\|\vec{u}'(t)\|}=\frac{\det\left(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{u}'(t)\right)}{\|\vec{u}'(t)\|}.$$

De plus,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial t}=p(t)\vec{u}'(t)+s\vec{u}(t)\wedge\vec{u}'(t).$$

Comme $\vec{u}(t)$ et $\vec{u}'(t)$ sont orthogonaux, $\|\vec{u}\wedge\vec{u}'(t)\|=\|\vec{u}\|\|\vec{u}'(t)\|=\|\vec{u}'(t)\|$ donc la norme du produit vectoriel des dérivées partielles premières est égale à

$$\sqrt{p(t)^2+s^2}\left\|\vec{u}'(t)\right\|.$$

3. Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\vec{v}'(t)+s\vec{u}''(t)\text{ et }\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}=\vec{u}'(t).$$

On a alors

$$\det(\Phi_1)=(p(t)^2+s^2)\left\|\vec{u}'(t)\right\|^2.$$

et

$$\det(\Phi_2)=\frac{-(p(t)\left\|\vec{u}'(t)\right\|^2)^2}{\left(\sqrt{p(t)^2+s^2}\left\|\vec{u}'(t)\right\|\right)^2}=-\frac{p(t)^2\left\|\vec{u}'(t)\right\|^2}{p(t)^2+s^2},$$

d'où

$$K(s,t)=\frac{-p(t)^2}{(p(t)^2+s^2)^2}.$$

4. La courbure de Gauss est nulle si et seulement si $p(t)=0$, ce qui équivaut au fait que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}'$.