Corrigé de l'examen – deuxième session

Courbes planes

Exercice 1. — Remarquons tout d'abord que $\rho(\theta) \leqslant 4$ quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$ et qu'il n'y a par conséquent pas de branche infinie. De plus, $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$, donc il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Enfin, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, donc il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $[0, \pi]$. Pour étudier la fonction ρ, commençons par calculer sa dérivée :

$$\rho'(\theta) = -2\sin(\theta).$$

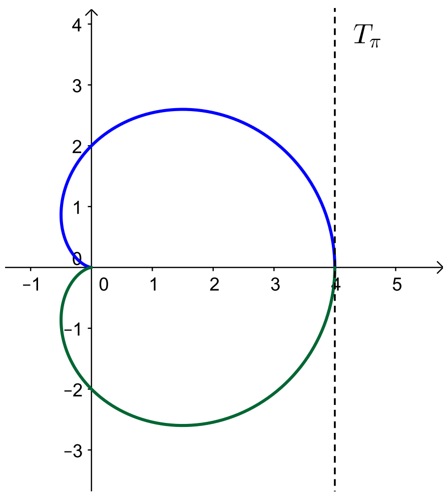
Sur l'intervalle $[0, \pi]$, $\sin(\theta) \geqslant 0$ donc $\rho'(\theta) \leqslant 0$. Ainsi, ρ est toujours décroissante. De plus, $\rho(0) = 4$ et $\rho(\pi) = 0$, donc ρ est toujours positive. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En $t = 0$ on a, avec les notations du cours,

$$\vec{\gamma}'(0) = \rho'(0)\vec{u}_\pi + \rho(0)\vec{v}_0 = (0, 4).$$

En $t = \pi$, ρ et ρ' s'annulent donc on a un point singulier. Il faut donc calculer la dérivée seconde :

$$\vec{\gamma}''(\pi) = \big(\rho''(\pi) + \rho(\pi)\big)\,\vec{u}_\pi + 2\rho'(\pi)\vec{v}_\pi = (2, 0).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à $[0, \pi]$ est en bleu. Le reste de la courbe, obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses, est en vert.



Coniques

Exercice 2. — **1.** Pour $\lambda = -1$, l'équation se factorise en

$$(x-y)^2 = 1.$$

L'ensemble des solutions est la réunion des deux droite d'équation $x - y = 1$ et $x - y = -1$. Pour $\lambda = 1$, l'équation se factorise en

$$(x-y)^2 = 1.$$

L'ensemble des solutions est la réunion des deux droite d'équation $x+y=1$ et $x+y=-1$. Pour $\lambda=0$, l'équation devient

$$x^2+y^2=1.$$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre O et de rayon 1.

2. Le discriminant de l'équation est $1-\lambda^2$. Si la courbe n'est pas dégénérée, on a donc une hyperbole si $|\lambda|>1$ et une ellipse ou un cercle si $|\lambda|<1$.

3. On a $x=(X+Y)/\sqrt{2}$ et $y=(X-Y)/\sqrt{2}$, d'où

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2\lambda xy-1 &= \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2+2\lambda\frac{(X+Y)(X-Y)}{2}-1 \\ &= \frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2+X^2-2XY+Y^2+2\lambda X^2-2\lambda Y^2-2) \\ &= (1+\lambda)X^2+(1-\lambda)Y^2-2. \end{aligned}$$

L'équation de $\mathscr{C}_\lambda$ s'écrit donc dans le nouveau repère

$$(1+\lambda)X^2+(1-\lambda)Y^2=1$$

Le changement de variables est en fait une rotation de $\pi/4$ du repère $\mathcal{R}$.

4. Il faut remarquer que si $1+\lambda<0$, alors $\lambda<0$ dont $1-\lambda>0$ et réciproquement, si $1-\lambda<0$ alors $1+\lambda>0$. Les coefficients de X^2 et Y^2 ne peuvent donc être tous les deux négatifs. La seule possibilité pour que $\mathscr{C}_\lambda$ soit dégénérée est donc qu'un des coefficients soit nul. Cela signifie que $\lambda\in\{1,-1\}$. Si la courbe n'est pas dégénérée, elle est une conique d'après la question 2 sauf si c'est un cercle. Ce cas n'est possible que si les deux coefficients sont égaux, c'est-à-dire $1+\lambda=1-\lambda$, qui a pour unique solution $\lambda=0$.

5. Considérons d'abord le cas $|\lambda|<1$. Nous avons déjà vu que $\mathcal{C}_\lambda$ est alors une ellipse. Nous allons distinguer deux cas :

- Si $\lambda>0$, $1+\lambda>1-\lambda$ donc $a=1+\lambda$ et $b=1-\lambda$.
- Si $\lambda<0$, $1-\lambda>1+\lambda$ donc $a=1-\lambda$ et $b=1+\lambda$.

Dans les deux cas, $a=1+|\lambda|$ et $b=1-|\lambda|$, d'où

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{1-\frac{(1-|\lambda|)^2}{(1+|\lambda|)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+|\lambda|)^2-(1-|\lambda|)^2}{(1+|\lambda|)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{4|\lambda|}}{1+|\lambda|} \\ &= \frac{2\sqrt{|\lambda|}}{1+|\lambda|} \end{aligned}$$

et

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{(1+|\lambda|)^2}{1-|\lambda|}.$$

Si $|\lambda|<1$, nous avons déjà vu que $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole. Comme précédemment, nous allons distinguer deux cas :

- Si $\lambda>0$, alors $1+\lambda>0$ donc $a=1+\lambda$ et $b=1-\lambda$.
- Si $\lambda<0$, alors $1-\lambda>0$ donc $a=1-\lambda$ et $b=1+\lambda$.

Dans les deux cas, $a = 1 + |\lambda|$ et $b = 1 - |\lambda|$, d'où

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{(1-|\lambda|)^2}{(1+|\lambda|)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+|\lambda|)^2 + (1-|\lambda|)^2}{(1+|\lambda|)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2(1+|\lambda|^2)}}{1+|\lambda|} \end{aligned}$$

et

$$p = \frac{b}{a^2} = \frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}.$$

Surfaces

Exercice 3. — **1**. Calculons les dérivées partielles premières de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -\sin(s)\sinh(t) \\ \cos(s)\sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos(s)\cosh(t) \\ \sin(s)\cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} \Phi_1(h,k) &= h^2(\sin^2(s)\sinh^2(t) + \cos^2(s)\sinh^2(t)) + k^2(\cos^2(s)\cosh^2(t) + \sin^2(s)\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) \\ &\quad + 2hk(-\cos(s)\sin(s)\cosh(t)\sinh(t) + \cos(s)\sin(s)\cosh(t)\sinh(t)) \\ &= h^2\sinh^2(t) + k^2(\sinh^2(t) + \cosh^2(t)). \end{aligned}$$

2. Il suffit de calculer le produit vectoriel des dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} \cos(s)\sinh^2(t) \\ \sin(s)\sinh^2(t) \\ -\sin^2(s)\sinh(t)\cosh(t) - \cos^2(s)\sinh(t)\cosh(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(s)\sinh^2(t) \\ \sin(s)\sinh^2(t) \\ -\sinh(t)\cosh(t) \end{pmatrix} \\ &= \sinh(t) \begin{pmatrix} \cos(s)\sinh(t) \\ \sin(s)\sinh(t) \\ -\cosh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme les fonctions cosh et sinh ne s'annulent pas en même temps, le vecteur de la dernière ligne du calcul n'est jamais nul. Ainsi, le produit vectoriel est nul si et seulement si $\sinh(t) = 0$, c'est-à-dire $t = 0$. Tous les points de paramètre (s,t) avec $t \neq 0$ sont donc réguliers. De plus, comme $t \in \mathbb{R}_+$, $\sinh(t) \geqslant 0$ et la norme du produit vectoriel est égale à $\sinh(t)\sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t)}$, d'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{\sinh(t)}{\sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t)}} \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ -\coth(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \coth^2(t)}} \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ -\coth(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\coth(t) = \cosh(t)/\sinh(t)$.

3. Calculons les dérivées partielles secondes de φ.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} -\cos(s)\sinh(t) \\ -\sin(s)\sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} \cos(s)\sinh(t) \\ \sin(s)\sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(s)\cosh(t) \\ \cos(s)\cosh(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit la seconde forme fondamentale :

$$\begin{aligned}\Phi_2(h,k) &= h^2\frac{-\cos^2(s)\sinh(t)-\sin^2(s)\sinh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} + k^2\frac{\cos^2(s)\sinh(t)+\sin^2(s)\sinh(t)-\cosh(t)\coth(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} \\ &\quad + 2hk\frac{-\cos(s)\sin(s)\cosh(t)+\cos(s)\sin(s)\cosh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} \\ &= h^2\frac{-\sinh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} + k^2\frac{\sinh(t)-\cosh^2(t)/\sinh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} \\ &= h^2\frac{-\sinh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} + k^2\frac{\sinh^2(t)-\cosh^2(t)}{\sinh(t)\sqrt{1+\coth^2(t)}} \\ &= h^2\frac{-\sinh(t)}{\sqrt{1+\coth^2(t)}} + k^2\frac{1}{\sinh(t)\sqrt{1+\coth^2(t)}}\end{aligned}$$

4. Il suffit de faire le quotient de déterminants. On trouve

$$\begin{aligned}K &= \frac{\det(\Phi_2)}{\det(\Phi_1)} \\ &= \frac{-1}{1+\coth^2(t)}\frac{1}{\sinh^2(\sinh^2+\cosh^2)} \\ &= \frac{-1}{(\sinh^2(t)+\cosh^2(t))^2}\end{aligned}$$

On peut remarquer que les points de la surface $\mathcal{S}$ vérifient l'équation $x^2+y^2-z^2=-1$. Il s'agit donc d'une quadrique à centre et le résultat est un cas particulier de l'exemple traité en cours. Il s'agit d'un *hyperboloïde à deux nappes*.