Corrigé du DM

Exercice 1. — **1**. On a deux branches infinies, quand t tend vers $-\infty$ et quand t tend vers 0^-. Traitons d'abord le permier cas. On a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 - \frac{1}{4t}}{t + \lambda t^2} \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

et

$$x(t) - \lambda y(t) = t + \lambda t^2 - \lambda \left(t^2 - \frac{1}{4t} \right) = t + \frac{\lambda}{4t} \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

donc $\mathscr{C}_\lambda$ a une branche parabolique dans la direction $\lambda y = x$. Considérons maintenant le second cas, on a

$$y(t) = t^2 - \frac{1}{4t} \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } x(t) = t + \lambda t^2 \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0$$

donc $\mathscr{C}_\lambda$ a une asymptote vertical d'équation $x = 0$.

2. Commençons par calculer les dérivées des fonctions coordonnées :

$$\begin{cases} x'(t) & = & 1 + 2\lambda t \\ y'(t) & = & 2t + \dfrac{1}{4t^2} \end{cases}$$

On voit alors que $y'(t)$ ne s'annule qu'en $t = -1/2$, qu'elle est négative pour $t < -1/2$ et positive pour $t > -1/2$. Quant à $x'(t)$, elle s'annule en $t = -(2\lambda)^{-1}$, est négative pour $t < -(2\lambda)^{-1}$ et positive pour $t > -(2\lambda)^{-1}$. Nous venons de démontrer que les deux dérivées ne s'annulent simultanément que si $\lambda = 1$. Si $\lambda \neq 1$, l'arc est donc régulier.

3. Les calculs précédents montrent que pour $\lambda = 1$, il y a un unique point singulier atteint en $t = -1/2$. Ses coordonnées sont

$$x = x_1(-1/2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$y = y_1(-1/2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Calculons les dérivées secondes des fonctions coordonnées :

$$\begin{cases} x''(t) & = & 2\lambda \\ y''(t) & = & 2 - \dfrac{1}{2t^3} \end{cases}$$

En particulier,

$$\overrightarrow{\gamma}'' \left(-\frac{1}{2} \right) = (2, 6) \neq \vec{0}$$

et $p = 2$. On a donc un point de rebroussement. Calculons maintenant les dérivées troisièmes des fonctions coordonnées :

$$\begin{cases} x'''(t) & = & 0 \\ y'''(t) & = & \dfrac{3}{2t^4} \end{cases}$$

En particulier,

$$\overrightarrow{\gamma}''' \left(-\frac{1}{2} \right) = (0, 24)$$

est linéairement indépendant de $\overrightarrow{\gamma}''(-1/2)$, donc $q = 3$ et le point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

4. Nous allons étudier chaque coordonnée séparément. Tout d'abord, $x(t_0) = x(t_1)$ donne

$$\begin{aligned} t_0 + \lambda t_0^2 &= t_1 + \lambda t_1^2 \\ (t_0 - t_1) + \lambda(t_0^2 - t_1^2) &= 0 \\ (t_0 - t_1) + \lambda(t_0 - t_1)(t_0 + t_1) &= 0 \\ (t_0 - t_1)(1 + \lambda(t_0 + t_1)) &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite, $y(t_0) = y(t_1)$ donne

$$\begin{aligned} t_0^2 - \frac{1}{4t_0} &= t_1^2 - \frac{1}{4t_1} \\ (t_0^2 - t_1^2) - \left(\frac{1}{4t_0} - \frac{1}{4t_1}\right) &= 0 \\ (t_0 - t_1)(t_0 + t_1) - \frac{t_1 - t_0}{4t_0t_1} &= 0 \\ (t_0 - t_1)\left(t_0 + t_1 + \frac{1}{4t_0t_1}\right) &= 0 \\ (t_0 - t_1)(4t_0^2t_1 + 4t_0t_1^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé les deux équations recherchées.

5. Supposons que γ_λ a un point double. Il existe donc $t_0 \neq t_1$ tels que $\gamma_\lambda(t_0) = \gamma_\lambda(t_1)$. On peut alors diviser par $t_0 - t_1$ les équations de la question précédente pour obtenir

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \lambda(t_0 + t_1) &= 0 \\ 4t_0^2t_1 + 4t_0t_1^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

La seconde équation se factorise en $4t_0t_1(t_0+t_1)+1 = 0$ ce qui, en combinant avec la première équation donne

$$\lambda(t_0 + t_1) = 4t_0t_1(t_0 + t_1).$$

Comme $t_0, t_1 < 0$, $t_0 + t_1 \neq 0$, donc $\lambda = 4t_0t_1$. De plus, la première équation donne également ($\lambda \neq 0$ par hypothèse) $t_0 + t^1 = -\lambda^{-1}$. Connaissant leur somme et leur produit, nous savons donc que t_0 et t_1 sont solutions de l'équation

$$t^2 + \frac{t}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = \lambda^{-2} - \lambda = (1 - \lambda^3)/\lambda^2$, il y a donc deux solutions réelles disctinctes si et seulement si $\lambda^3 < 1$, c'est-à-dire $\lambda < 1$. Réciproquement, si $\lambda < 1$ les deux racines de l'équation précédente fournissent les deux paramètres de l'unique point double de γ_λ. L'une de ces valeurs est

$$t_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^3}}{2\lambda},$$

qui donne, en notant $(X(\lambda), Y(\lambda))$ les coordonnées du point double,

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= t_0 + \lambda t_0^2 \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^3}}{2\lambda} + \lambda\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^3}}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^3}}{2\lambda} + \lambda\left(\frac{1 - 2\sqrt{1 - \lambda^3} + 1 - \lambda^3}{4\lambda^2}\right) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^3}}{2\lambda} + \frac{2 - 2\sqrt{1 - \lambda^3} - \lambda^3}{4\lambda} \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Y(\lambda) &= t_0^2 - \frac{1}{4t_0} \\
&= \left(\frac{-1+\sqrt{1-\lambda^3}}{2\lambda}\right)^2 - \frac{2\lambda}{4\left(-1+\sqrt{1-\lambda^3}\right)} \\
&= \frac{2-2\sqrt{1-\lambda^3}-\lambda^3}{4\lambda^2} - 2\lambda\frac{1+\sqrt{1-\lambda^3}}{4(1-\lambda^3-1)} \\
&= \frac{2-2\sqrt{1-\lambda^3}-\lambda^3}{4\lambda^2} + \frac{2+2\sqrt{1-\lambda^3}}{4\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\lambda}{4}
\end{aligned}$$

6. On a

$$X(\lambda) \underset{\lambda\to 1^-}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} = x_1(-1/2)$$

et

$$Y(\lambda) \underset{\lambda\to 1^-}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = y_1(-1/2).$$

En conclusion, les coordonnées du point double tendent vers les coordonnées de $\gamma_1(-1/2)$, le point singulier de γ_1.

7. Soit $f : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3\lambda}{2}x^2 - 2.$$

(i) On a

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3\lambda x = 3x\left(\frac{x}{2}+\lambda\right).$$

La dérivée s'annule donc au seul point $x = -2\lambda$. Ainsi, la fonction f est croissante de $-\infty$ à -2λ puis décroissante de -2λ à 0.

(ii) On a

$$f(-2\lambda) = -4\lambda^3 + 6\lambda^3 - 2 = 2(\lambda^3-1).$$

Si $\lambda > 1$, $f(-2\lambda) > 0$. Comme d'autre part $f(x) \to -\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et $f(x) \to -2$ quand x tend vers 0, le *Théorème des valeurs intermédiaires* assure l'existence d'exactement deux points d'annulation pour f. Si $0 < \lambda < 1$, $f(2\lambda) < 0$ et comme c'est le maximum de f d'après la question précédente, f ne s'annule jamais.

(iii) Calculons le déterminant de $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ et $\overrightarrow{\gamma}''(t)$:

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{\gamma}'_\lambda(t), \overrightarrow{\gamma}''_\lambda(t)) &= \begin{vmatrix} 1+2\lambda t & 2\lambda \\ 2t+\dfrac{1}{4t^2} & 2-\dfrac{1}{2t^3} \end{vmatrix} \\
&= (1+2\lambda t)\left(2-\frac{1}{2t^3}\right) - 2\lambda\left(2t+\frac{1}{4t^2}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2t^3} - \frac{3\lambda}{2t^2} \\
&= -f\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Si $0 < \lambda < 1$, f ne s'annule pas donc les deux vecteurs sont toujours linéairement indépendants, autrement dit l'arc γ_λ est birégulier. Si $\lambda > 1$, f s'annule exactement deux fois donc l'arc γ_λ a exactement deux points non-biréguliers.

(iv) Calculons le déterminant de $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ et $\overrightarrow{\gamma}'''(t)$:

$$\det(\overrightarrow{\gamma}'_\lambda(t), \overrightarrow{\gamma}'''_\lambda(t)) = \begin{vmatrix} 1+2\lambda t & 0 \\ 2t+\dfrac{1}{4t^2} & \dfrac{3}{2t^4} \end{vmatrix} = \frac{3}{2t^4}(1+2\lambda t).$$

Cette quantité n'est pas nulle si $t \neq -\frac{1}{2\lambda}$, donc les deux vecteurs sont linéairement indépendants dans ce cas.

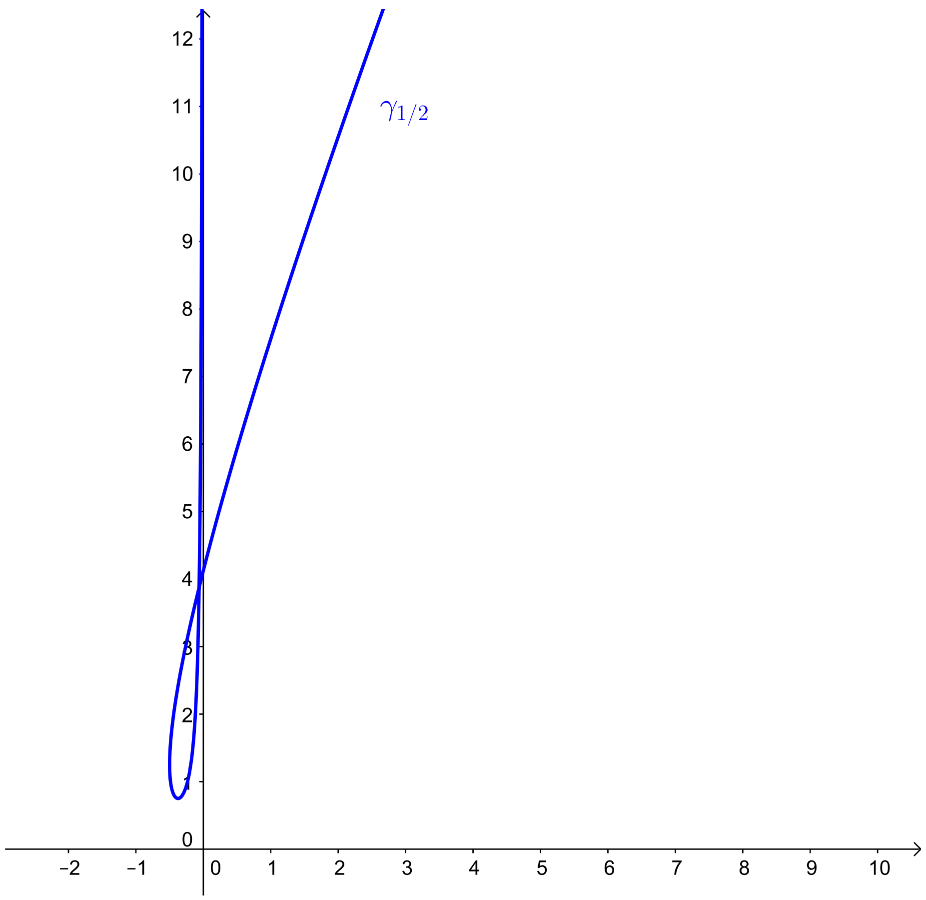
(v) Soit $t_0 \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\gamma_\lambda(t_0)$ ne soit pas birégulier. Alors, $f(t_0^{-1}) = 0$ donc $t_0 \neq -(2\lambda)^{-1}$. D'après la question précédente, on a donc $p = 1$ et $q = 3$, ce qui signifie que le point non-birégulier est un point d'inflexion.

8. Nous avons déjà calculé $\overrightarrow{\gamma}'_\lambda(t)$ ainsi que le déterminant. L'expression de la courbure en $t = -1/2$ est donc

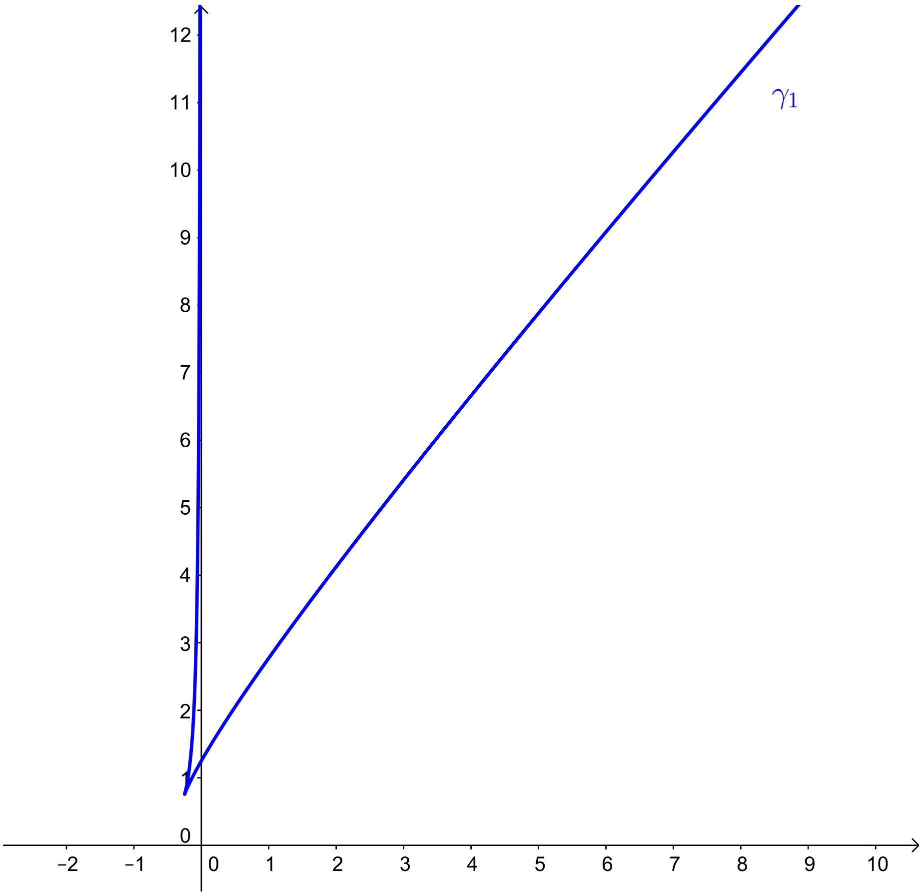
$$c(\lambda) = \frac{-f(-2)}{((1-\lambda)^2 + (-1+1)^2)^{3/2}} = \frac{6-6\lambda}{(1-\lambda)^3} = \frac{6}{(1-\lambda)^2}.$$

Ainsi, $c(\lambda) \to +\infty$ quand λ tend vers 1.

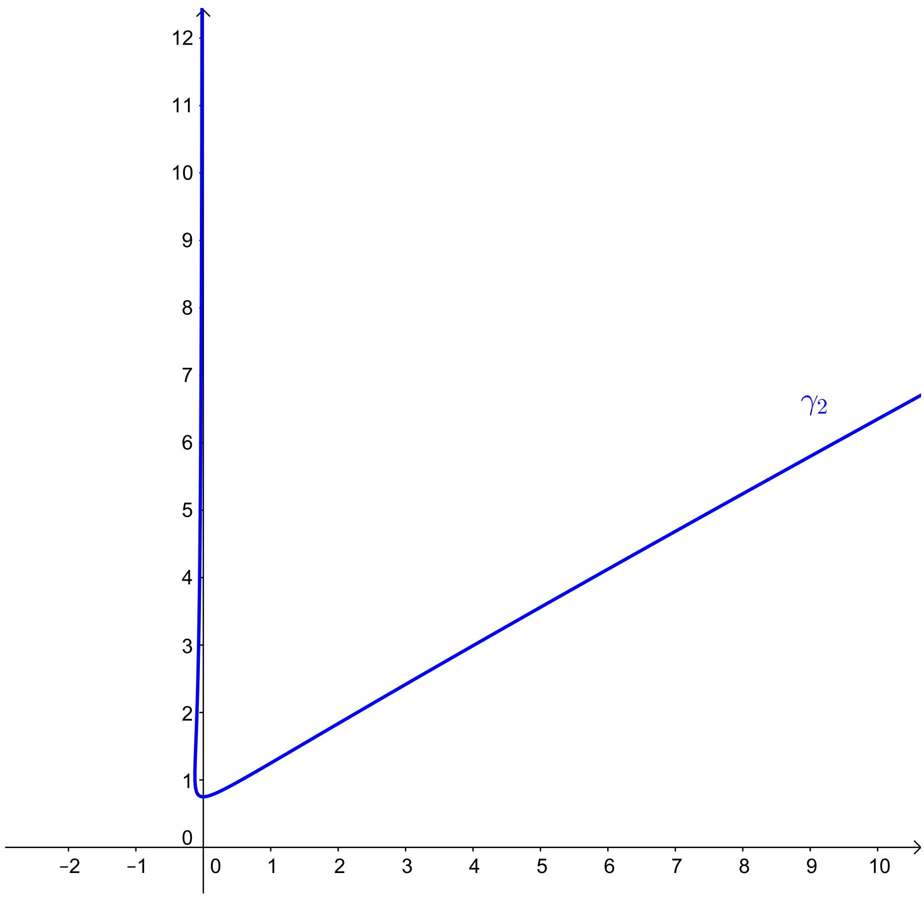
9. Voici la figure pour $\lambda = 1/2$:



Voici la figure pour $\lambda = 1$:



Voici la figure pour $\lambda = 2$:



10. Quand λ augmente, la boucle formée par la partie de la courbe située entre les deux passages au points doubles diminue jusqu'à s'écraser, pour $\lambda = 1$, en un point de rebroussement. Quand λ augmente encore, ce point de rebroussement disparaît et la courbe redevient régulière.