Devoir du 16/05/2012

Calculatrices et documents interdits. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées, par un calcul et/ou par un raisonnement s'appuyant sur les résultats du cours.

1. Démontrer que, pour tous entiers a, b et c, si a divise b et a divise c, alors a divise $b+c$.
2. *On rappelle que φ désigne la fonction d'Euler. Les réponses à (a), (b) et (c) n'ont pas à être justifiées.*
   (a) Donner l'énoncé du théorème d'Euler.
   (b) Pour n entier naturel, donner la définition de $\varphi(n)$.
   (c) Donner la décomposition de 1176 en produit de facteurs premiers.
   (d) Calculer $\varphi(1176)$.
3. Calculer $3^{101} \mod 8$.
4. Démontrer que pour tout n entier naturel, $27^n - 3^{n+2}$ est divisible par 4.
5. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:
$$75x + 17y = 1. \tag{1}$$
6. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:
$$5x + 2y = 2. \tag{2}$$
7. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:
$$2x + 10y = 3. \tag{3}$$
8. Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 1 pièce. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 0 pièce. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?
   On donne (tout n'est pas utile) :
$$17 \times 11 = 187, \quad 17 \times 6 = 102, \quad 17 \times 11 \times 6 = 1122,$$
$$1 = 1 \times 187 + (-31) \times 6, \quad 1 = (-31) \times 17 + 8 \times 66, \quad 1 = (-37) \times 11 + 4 \times 102,$$
$$1 \times 187 + 5 \times (-31) \times 17 \equiv 918 \mod 1122,$$
$$(-31) \times 6 + 5 \times 8 \times 66 \equiv 210 \mod 1122,$$
$$187 \times 5 + 8 \times 66 \equiv 341 \mod 1122,$$
$$5 \times 187 - 31 \times 17 \equiv 408 \mod 1122.$$

Corrigé du devoir d'arithmétique du 16/05/2012

1. Soient a, b et c tels que a divise b et a divise c. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$ et $c = k'a$. D'où $b + c = ka + k'a = (k + k')a$ donc a divise $b + c$.
2. (a) Si a et n sont deux entiers premiers entre eux, alors $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.
   (b) $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et n premiers avec n.
   (c) $1176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.
   (d) $\varphi(1176) = \varphi(2^3\times3\times7^2) = \varphi(2^3)\times\varphi(3)\times\varphi(7^2) = (2^3-2^2)\times(3-1)\times(7^2-7) = 4\times2\times42 = 336$.
3. On a $3^2 \equiv 1 \mod 8$ d'où $3^{101} \equiv (3^2)^{50} \times 3 \mod 8 \equiv 3 \mod 8$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $27 \equiv 3 \mod 4$ donc $27^n \equiv 3^n \mod 4$. Par ailleurs $3^{n+2} \equiv 3^n \times 3^2 \mod 4 \equiv 3^n \times 1 \mod 4$. Ainsi $27^n - 3^{n+2} \equiv 0 \mod 4$ et $27^n - 3^{n+2}$ est un multiple de 4.
5. Remarquons d'abord que 17 et 75 sont premiers entre eux, donc l'équation (1) a des solutions. Pour trouver une solution particlière, disposons les calculs de l'algorithme d'Euclide étendu :

a	b	r	q	u	v
				1	0
				0	1
75	17	7	4	1	-4
17	7	3	2	-2	9
7	3	1	2	5	14
3	1	0			

On a donc $75 \times 5 + 17 \times (-22) = 1$.
Soit maintenant (x, y) une solution de (1). En soustrayant la relation précédente de (1), on trouve :

$$75(x - 5) + 17(y + 22) = 0$$

soit : $75(x - 5) = -17(y + 22)$. Ainsi 75 divise $17(y + 22)$; comme 75 et 17 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss on a que 75 divise $22 + y$, donc $22 + y = 75k$ pour $k \in \mathbb{Z}$, soit : $y = 75k - 22$.
On trouve alors $75(x - 5) = -17 \times 75k$ d'où $x = -17k + 5$.
Réciproquement, on vérifie facilement que tout couple $(-17k+5, 75k-22)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ vérifie (1).
Ainsi, l'ensemble des solutions de (1) est $\{(-17k + 5, 75k - 22), k \in \mathbb{Z}\}$.
6. On a facilement que $5 \times 1 + 2 \times (-2) = 1$ donc (en multipliant par 2) $5 \times 2 + 2 \times (-4) = 2$. Soit (x, y) solution de (2) ; en soustrayant cette relation de (2) on trouve :

$$5(x - 2) + 2(y + 4) = 0$$

par un raisonnement similaire à celui mené à la question précédente, 5 divise $y+4$ donc $y = 5k-4$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et donc $x = -2k + 2$.
Soit maintenant $\mathcal{S} = \{(-2k + 2, 5k - 4), k \in \mathbb{Z}\}$. On vérifie que tout couple $(x, y) \in \mathcal{S}$ est solution de (2) donc l'ensemble des solutions de (2) est $\mathcal{S}$.
7. On a PGCD(2,10)=2 mais 2 ne divise pas 3, donc l'équation (3) n'a pas de solutions (son ensemble de solution est $\emptyset$).
8. Soit x le nombre de pièces. On a d'après l'énoncé :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 17 \\ x \equiv 0 \mod 11 \\ x \equiv 5 \mod 6 \end{cases}$$

On a que : 187 est congru à 0 mod 17 et mod 11, et à 1 mod 6, et 8×66 est congru à 0 mod 6 et mod 11, et à 1 mod 17.
On cherche alors le reste dans la division par $17 \times 11 \times 6 = 1122$ de :

$$1 \times 8 \times 66 + 5 \times 187,$$

soit 341. Ainsi le cuisinier peut espérer récupérer au moins 341 pièces.